Elektrodynamika

Część 9

Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas

Spis treści

10 Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

10.1 Wprowadzenie potencjałów

10.1.1 Potencjały skalarny i wektorowy

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(i)} & \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho, & \text{(iii)} & \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, & \text{(iv)} & \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{równania}\\ \text{Maxwella}\end{array}$$

10 Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

10.1 Wprowadzenie potencjałów

10.1.1 Potencjały skalarny i wektorowy

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(i)} & \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho, & \text{(iii)} & \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, & \text{(iv)} & \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{array}\right\}\ \text{równania Maxwella}$$

Jakie są pola $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ i $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ jeśli znamy $\rho(\boldsymbol{r},t)$ i $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$?

10 Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

10.1 Wprowadzenie potencjałów

10.1.1 Potencjały skalarny i wektorowy

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(i)} & \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, & \text{(iii)} & \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, & \text{(iv)} & \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{array}\right\} \text{równania Maxwella}$$

Jakie są pola $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ i $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ jeśli znamy $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ i $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$?

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}}$$

10 Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

10.1 Wprowadzenie potencjałów

10.1.1 Potencjały skalarny i wektorowy

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(i)} & \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho, & \text{(iii)} & \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, & \text{(iv)} & \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{array}\right\}\ \text{równania Maxwella}$$

Jakie są pola $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ i $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ jeśli znamy $\rho(\boldsymbol{r},t)$ i $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$?

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})\quad \text{z prawa Faradaya}$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}}$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}}$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ z (i)

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}}$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ z (i)

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$ z (iv)

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}}$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ z (i)

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$ z (iv)

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A}$$ tożsamość wektorowa

$$\left(\Delta\boldsymbol{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\boldsymbol{J}$$

10.1.2 Przekształcenia cechowania

Możemy narzucić dodatkowe warunki na potencjały, które nie zmienią pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$.

$$\left(\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

10.1.2 Przekształcenia cechowania

Możemy narzucić dodatkowe warunki na potencjały, które nie zmienią pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}, \qquad V' = V + \beta$ zmieniamy potencjały

$$\left(\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

10.1.2 Przekształcenia cechowania

Możemy narzucić dodatkowe warunki na potencjały, które nie zmienią pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}, \qquad V' = V + \beta$ zmieniamy potencjały

$$\nabla\times\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \nabla\lambda$$

$$\left(\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

10.1.2 Przekształcenia cechowania

Możemy narzucić dodatkowe warunki na potencjały, które nie zmienią pól $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}, \qquad V' = V + \beta$ zmieniamy potencjały

$$\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \nabla\lambda$$

$$\nabla\beta + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0$$

nawias nie zależy od położenia

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t), \quad k(t) \text{ można włączyć do } \lambda$$

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t), \quad k(t) \text{ można włączyć do } \lambda$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \nabla\lambda \\ V' &= V - \tfrac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \text{przekształcenia cechowania}$$

10.1.3 Cechowanie Coulomba i cechowanie Lorentza

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0} \quad \text{cechowanie Coulomba}$$

10.1.3 Cechowanie Coulomba i cechowanie Lorentza

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0}$$ cechowanie Coulomba

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ równanie Poissona

10.1.3 Cechowanie Coulomba i cechowanie Lorentza

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0}$$ cechowanie Coulomba

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ równanie Poissona

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r'}, t)}{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}\tau$$ rozwiązanie gdy $V = 0$ w nieskończoności

10.1.3 Cechowanie Coulomba i cechowanie Lorentza

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0}$$ cechowanie Coulomba

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ równanie Poissona

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r'}, t)}{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}\tau$$ rozwiązanie gdy $V = 0$ w nieskończoności

$$\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0\epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

10.1.3 Cechowanie Coulomba i cechowanie Lorentza

$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0}$ cechowanie Coulomba

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$ równanie Poissona

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{\mathcal{R}}\, \mathrm{d}\tau$$ rozwiązanie gdy $V = 0$ w nieskończoności

$$\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0\epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

Samo $V(\boldsymbol{r}, t)$ nie wystarcza do wyznaczenia pola $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$!

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$ cechowanie Lorentza

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$ cechowanie Lorentza

$$\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$ cechowanie Lorentza

$$\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$ cechowanie Lorentza

$$\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\boxed{\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Box}$$ dalambercjan

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$

cechowanie Lorentza

$$\Delta \boldsymbol{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\boxed{\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Box}$$

dalambercjan

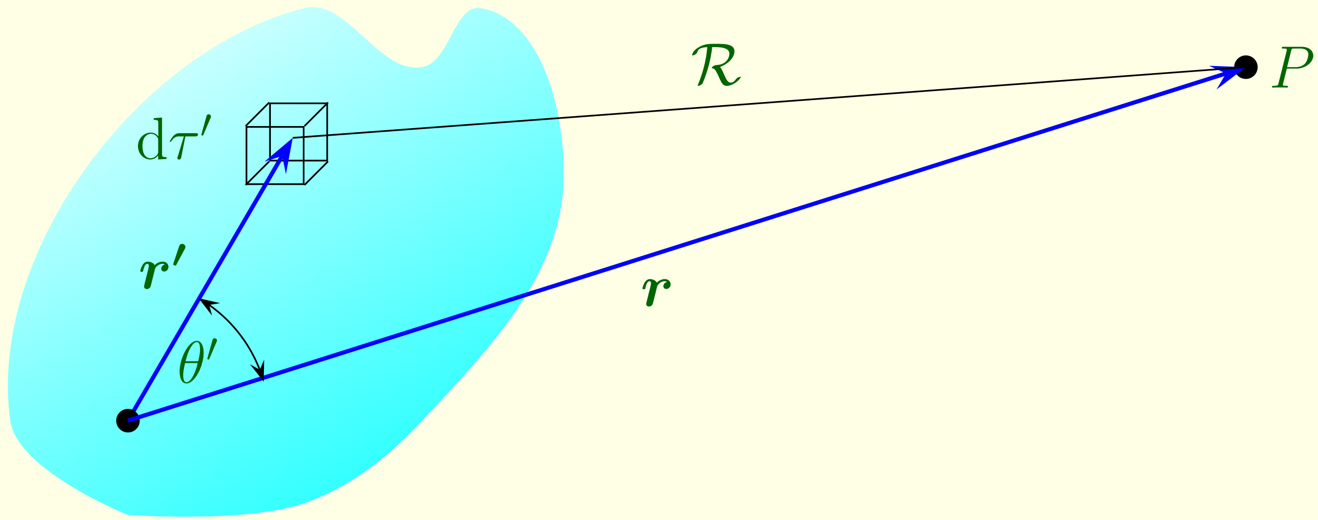
$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & \Box V = -\dfrac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \text{(ii)} & \Box \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{array}}$$

niejednorodne

równania falowe

10.2 Rozkłady ciągłe

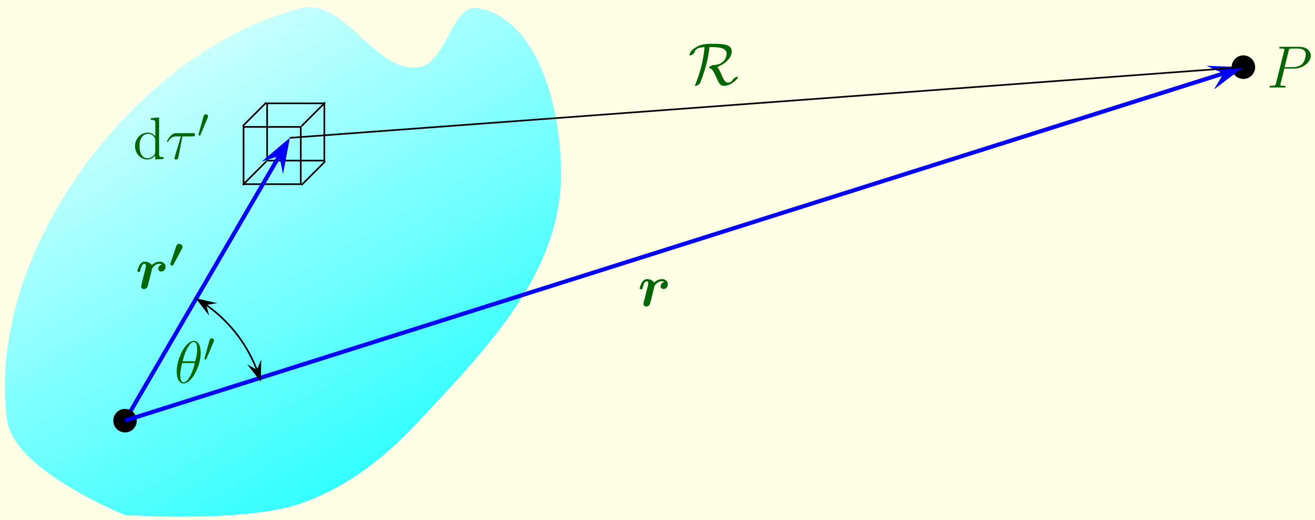
10.2.1 Potencjały opóźnione



$\Delta V = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho, \qquad \Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$ dla pól statycznych

10.2 Rozkłady ciągłe

10.2.1 Potencjały opóźnione



$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \qquad \Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$ dla pól statycznych

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{\mathcal{R}}\,\mathrm{d}\tau'$$

„Wieści" elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła!

$$\boxed{t_{\mathrm{r}} \equiv t - \frac{\mathcal{R}}{c}}$$

czas opóźniony

„Wieści” elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła!

$$\boxed{t_{\mathrm{r}} \equiv t - \frac{\mathcal{R}}{c}}$$

czas opóźniony

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}})}{\mathcal{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}})}{\mathcal{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

potencjały opóźnione

„Wieści” elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła!

$$\boxed{t_\mathrm{r} \equiv t - \frac{\mathcal{R}}{c}}$$

czas opóźniony

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t_\mathrm{r})}{\mathcal{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_\mathrm{r})}{\mathcal{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

potencjały opóźnione

Czy wzory te są poprawne?

„Wieści" elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła!

$$\boxed{t_{\mathrm{r}} \equiv t - \frac{\mathcal{R}}{c}}$$ czas opóźniony

$$V(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}})}{\mathcal{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t_{\mathrm{r}})}{\mathcal{R}} \, \mathrm{d}\tau'$$

potencjały opóźnione

Czy wzory te są poprawne?

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\nabla \rho) \frac{1}{\mathcal{R}} + \rho \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) \right] \mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_{\mathrm{r}} = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla \mathcal{R}$$

$$\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_{\mathrm{r}} = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla \mathcal{R}$$

$$\nabla \mathcal{R} = \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}, \qquad \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_{\mathrm{r}} = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla \mathcal{R}$$

$$\nabla \mathcal{R} = \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}, \qquad \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}} - \rho \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2} \right] \mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\rho = \dot{\rho}\nabla t_{\mathrm{r}} = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\mathcal{R}$$

$$\nabla\mathcal{R} = \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}, \qquad \nabla\left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) = -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}} - \rho\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\begin{aligned}\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\Bigg\{&-\frac{1}{c}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}}\cdot(\nabla\dot{\rho}) + \dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}}\right)\right]\\ &- \left[\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\cdot(\nabla\rho) + \rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\right)\right]\Bigg\}\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

$$\nabla\dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\nabla\mathcal{R} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$$

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\nabla \mathcal{R} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2}, \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\nabla\mathcal{R} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2}, \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{\mathcal{R}} - 4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})\right] \mathrm{d}\tau' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\nabla \mathcal{R} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2}, \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{\mathcal{R}} - 4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})\right]\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\nabla\dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\nabla\mathcal{R} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2}, \qquad \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{\mathcal{R}} - 4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathcal{R}})\right]\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r},t)$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r},t)$$

Potencjał opóźniony spełnia niejednorodne równanie falowe.