

# Elektrodynamika

Część 8

Fale elektromagnetyczne

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

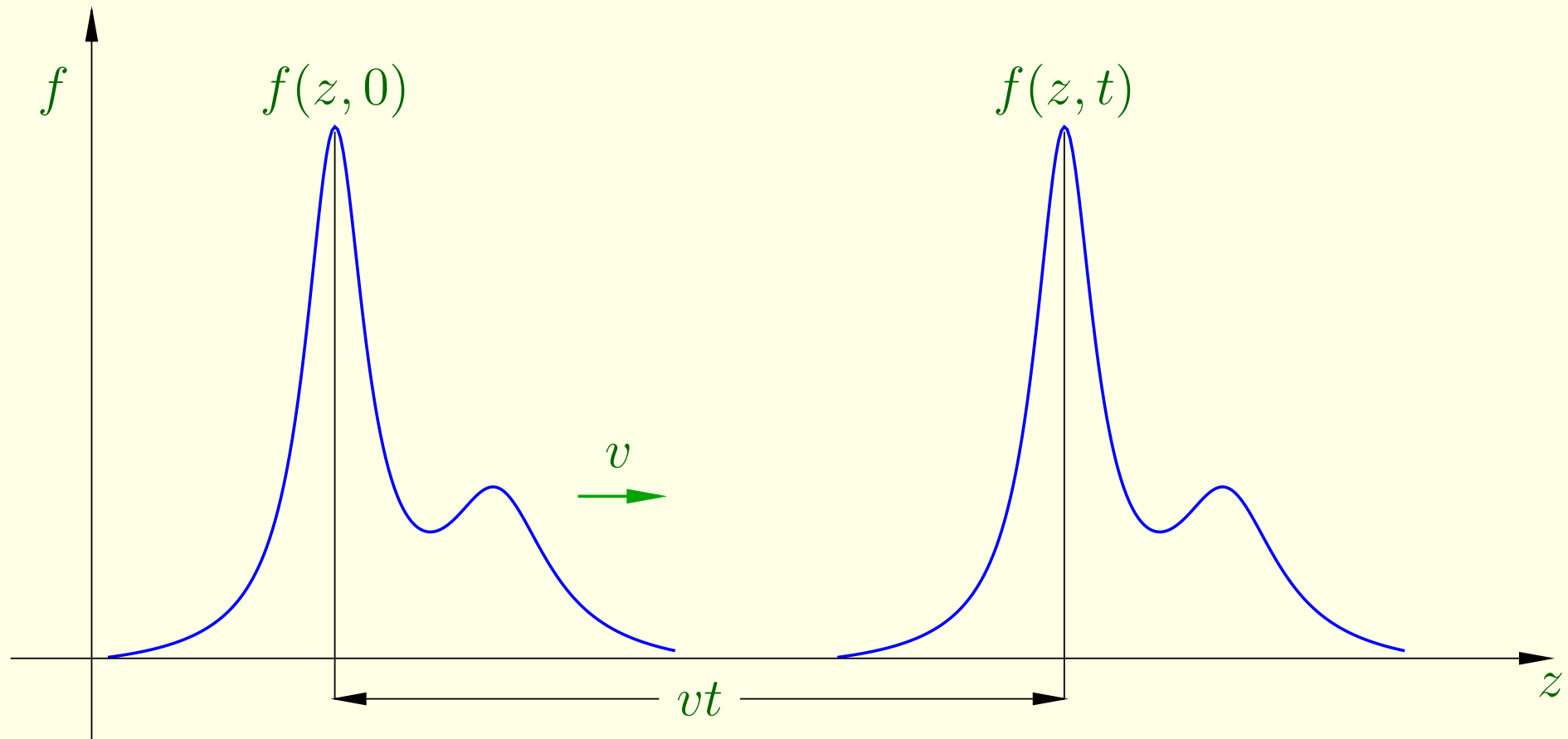
## Spis treści

<b>9</b>	<b>Fale elektromagnetyczne</b>	<b>3</b>
9.1	Fale w jednym wymiarze . . . . .	3
9.2	Fale elektromagnetyczne w próżni . . . . .	13
9.3	Fale elektromagnetyczne w ośrodku materialnym . . . . .	23
9.4	Absorpcja i dyspersja . . . . .	47

# 9 Fale elektromagnetyczne

## 9.1 Fale w jednym wymiarze

### 9.1.1 Równanie falowe



$$f(z, t) = f(z - vt, 0) = g(z - vt)$$

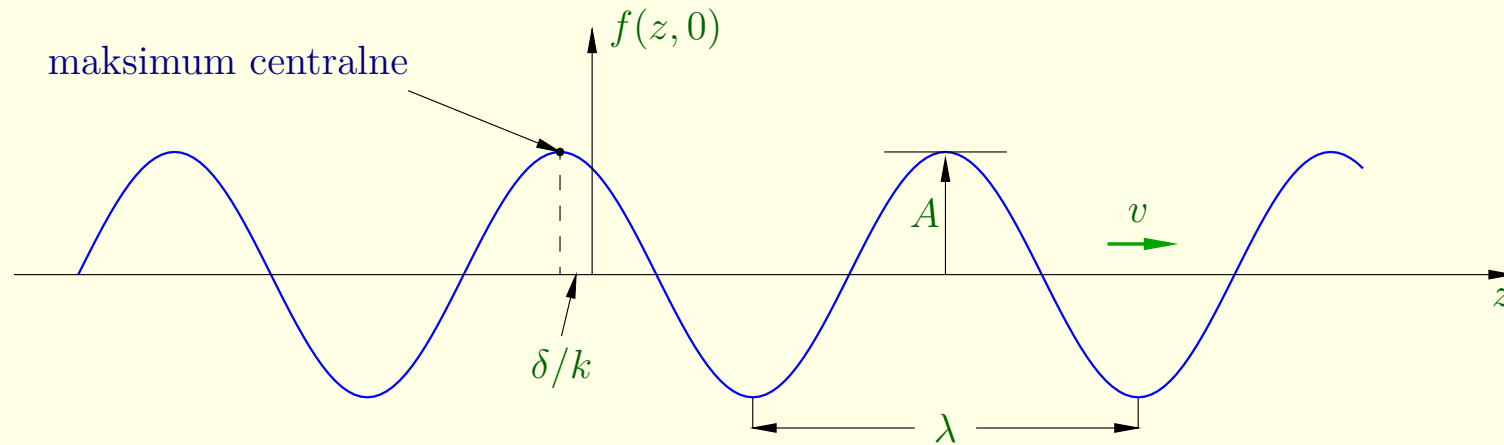
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

równanie falowe

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad \text{rozwiązanie ogólne}$$

## 9.1.2 Fale sinusoidalne

### (i) Terminologia



$$f(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \delta]$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \lambda \text{ — długość fali, } k \text{ — liczba falowa}$$

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}, \quad \text{okres}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}, \quad \text{częstość}$$

$$\omega = 2\pi\nu = kv, \quad \text{częstość kątowna}$$

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta) \quad \text{fala biegnąca w prawo}$$

$$f(z, t) = A \cos(-kz - \omega t + \delta) \quad \text{fala biegnąca w lewo, } k \Rightarrow -k$$

## (ii) Notacja zespolona

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{wzór Eulera}$$

$$f(z, t) = \operatorname{Re}[Ae^{i(kz - \omega t + \delta)}]$$

$$\tilde{f}(z, t) \equiv \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{zespolona funkcja falowa}$$

$$\tilde{A} = Ae^{i\delta} \quad \text{zespolona amplituda}$$

$$f(z, t) = \operatorname{Re}[\tilde{f}(z, t)]$$

### (iii) Liniowe kombinacje fal sinusoidalnych

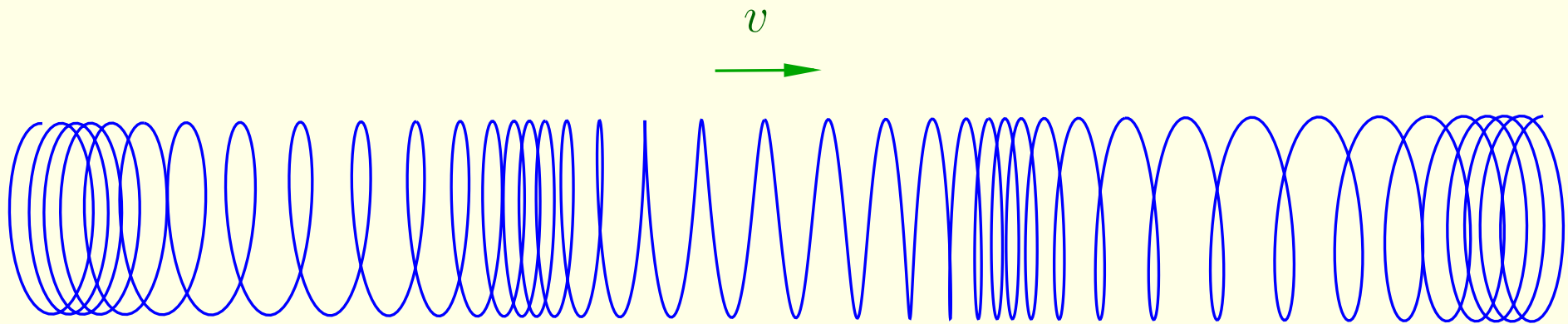
$$\tilde{f}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

każdą falę można przedstawić  
w postaci kombinacji liniowej  
fal sinusoidalnych

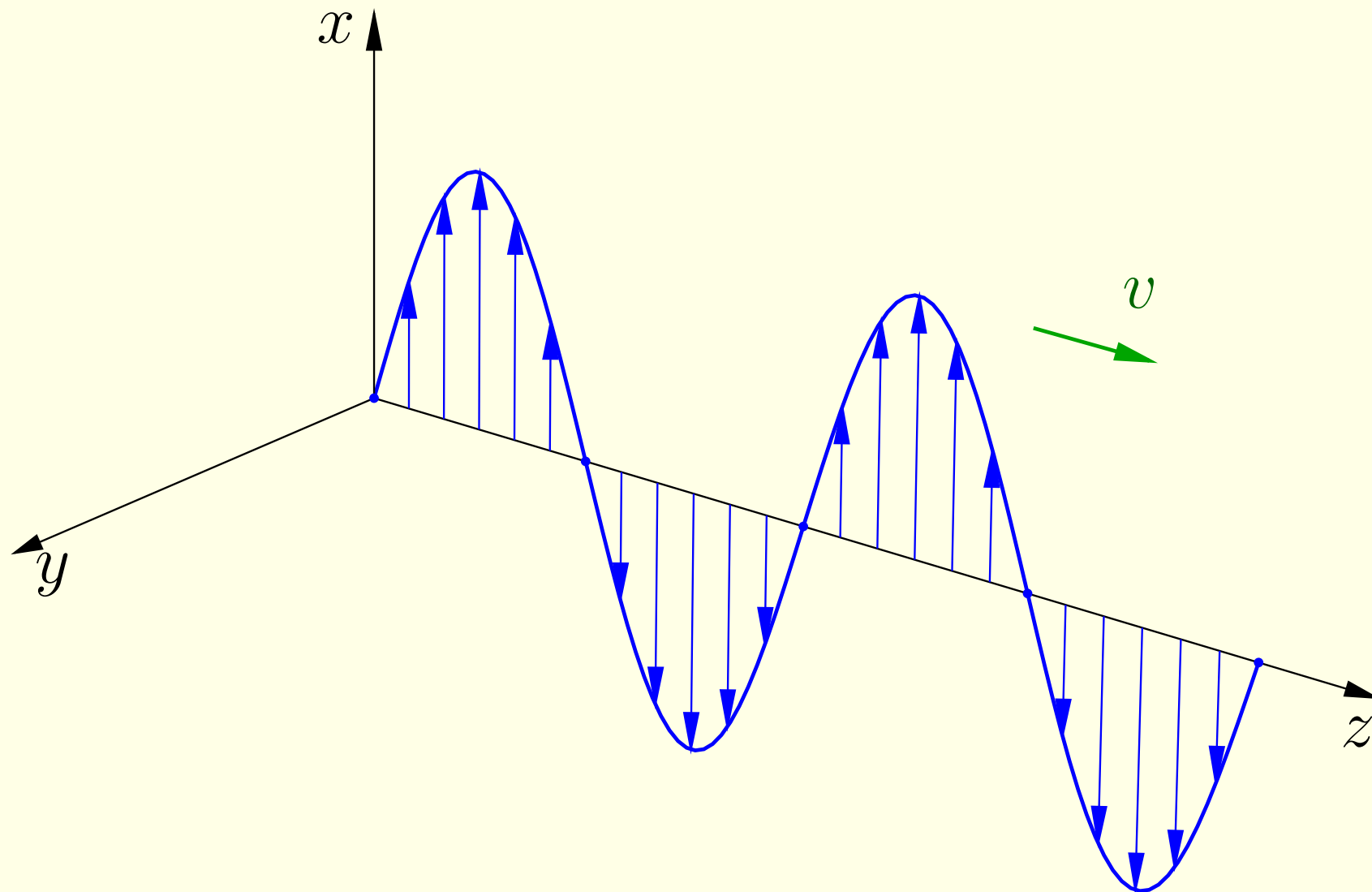
Amplitudę  $\tilde{A}(k)$  można wyznaczyć z warunków początkowych  $f(z, 0)$  i  $\dot{f}(z, 0)$  przy wykorzystaniu teorii **transformat Fouriera**.



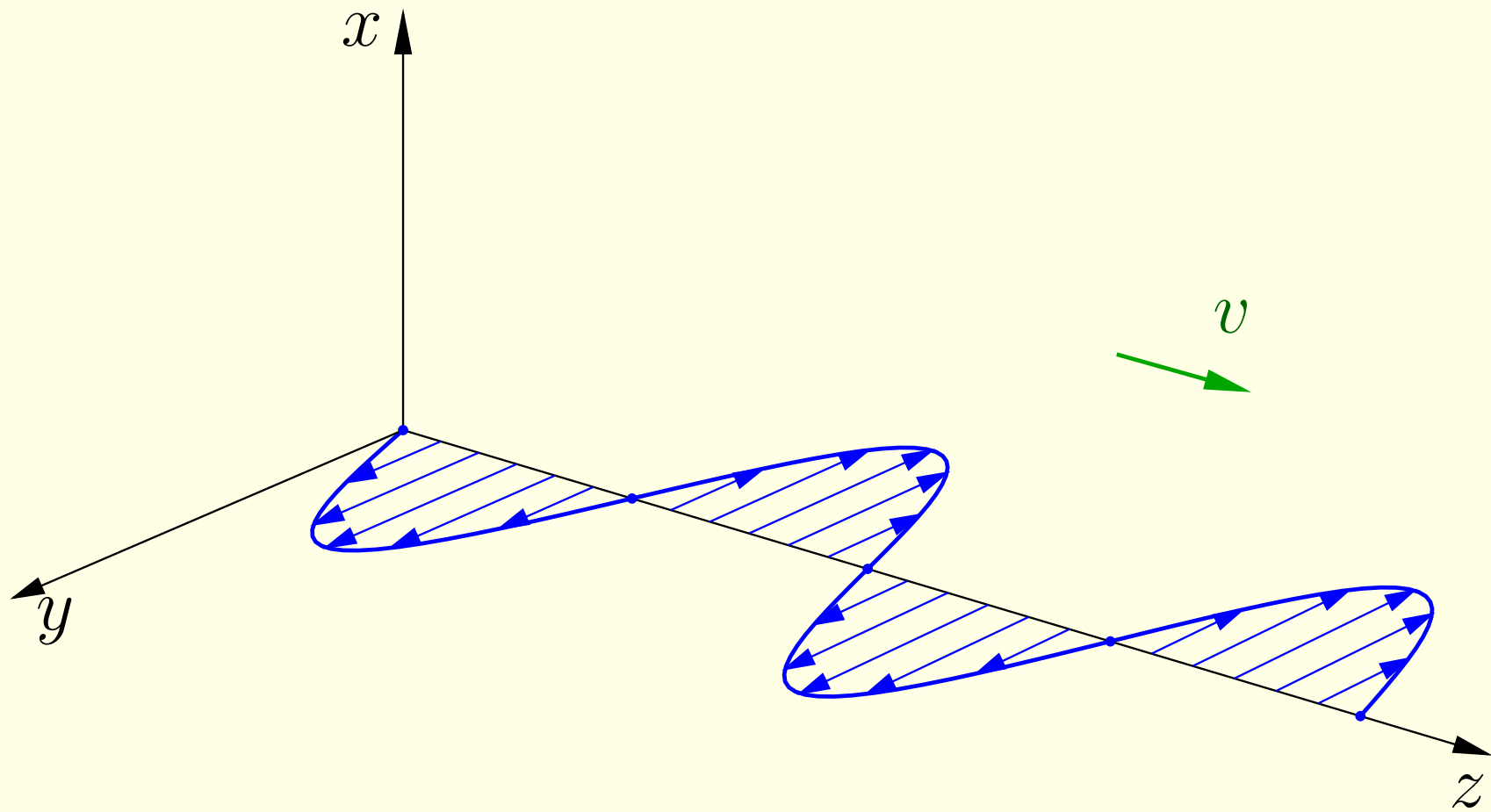
## 9.1.4 Polaryzacja



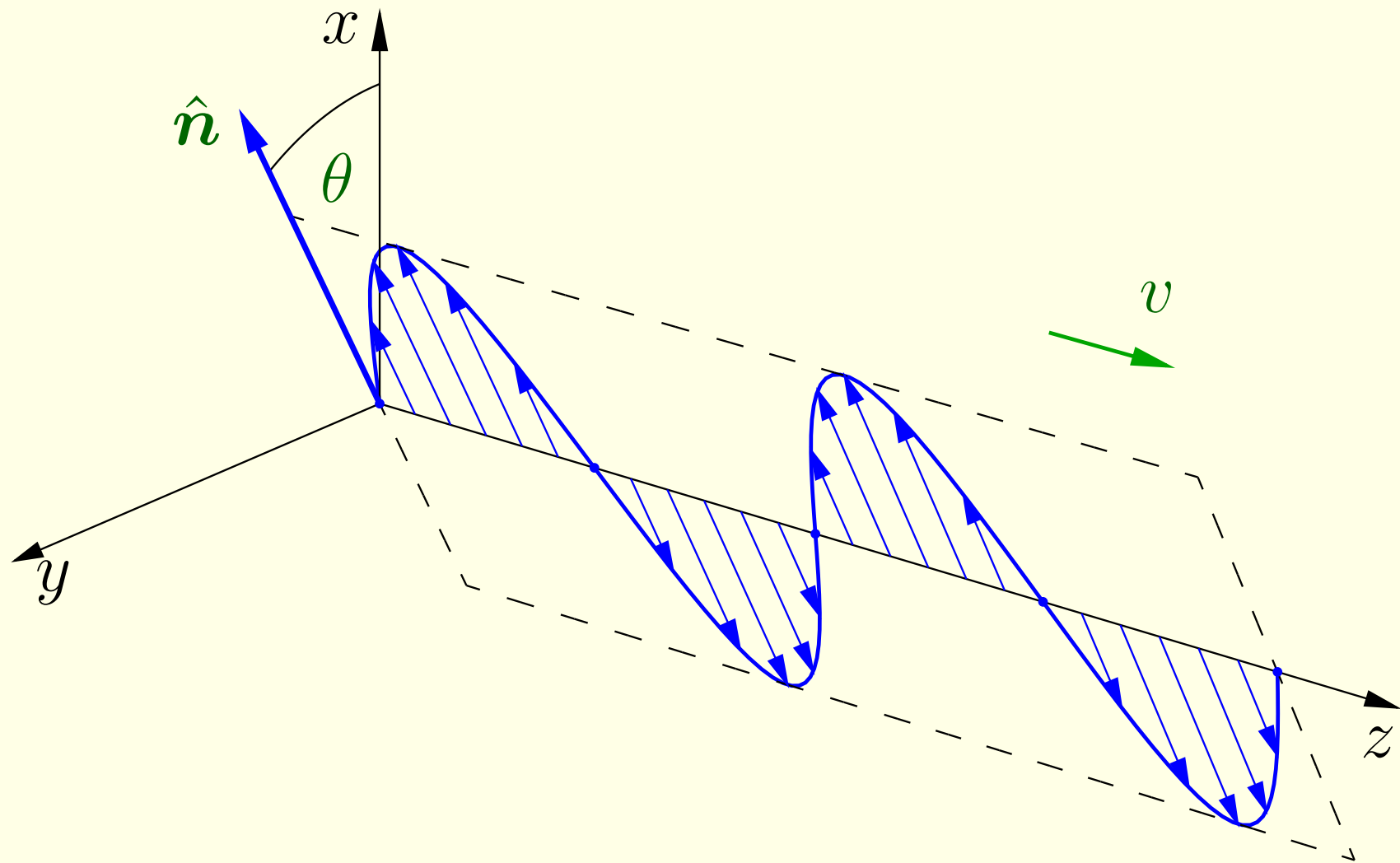
fala podłużna



fala poprzeczna: polaryzacja pionowa,  $\tilde{\mathbf{f}}_v(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$



fala poprzeczna: polaryzacja pozioma,  $\tilde{\mathbf{f}}_h(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{y}}$



fala poprzeczna: polaryzacja ukośna,  $\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}$

$\hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$ ,  $\theta$  — kąt polaryzacji

$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = (\tilde{A} \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} + (\tilde{A} \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

## 9.2 Fale elektromagnetyczne w próżni

### 9.2.1 Równanie falowe dla $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{równania Maxwella} \\ \text{w obszarach bez} \\ \text{ładunków i prądów} \end{array}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \nabla \times \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  i  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  w obszarach bez ładunków

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

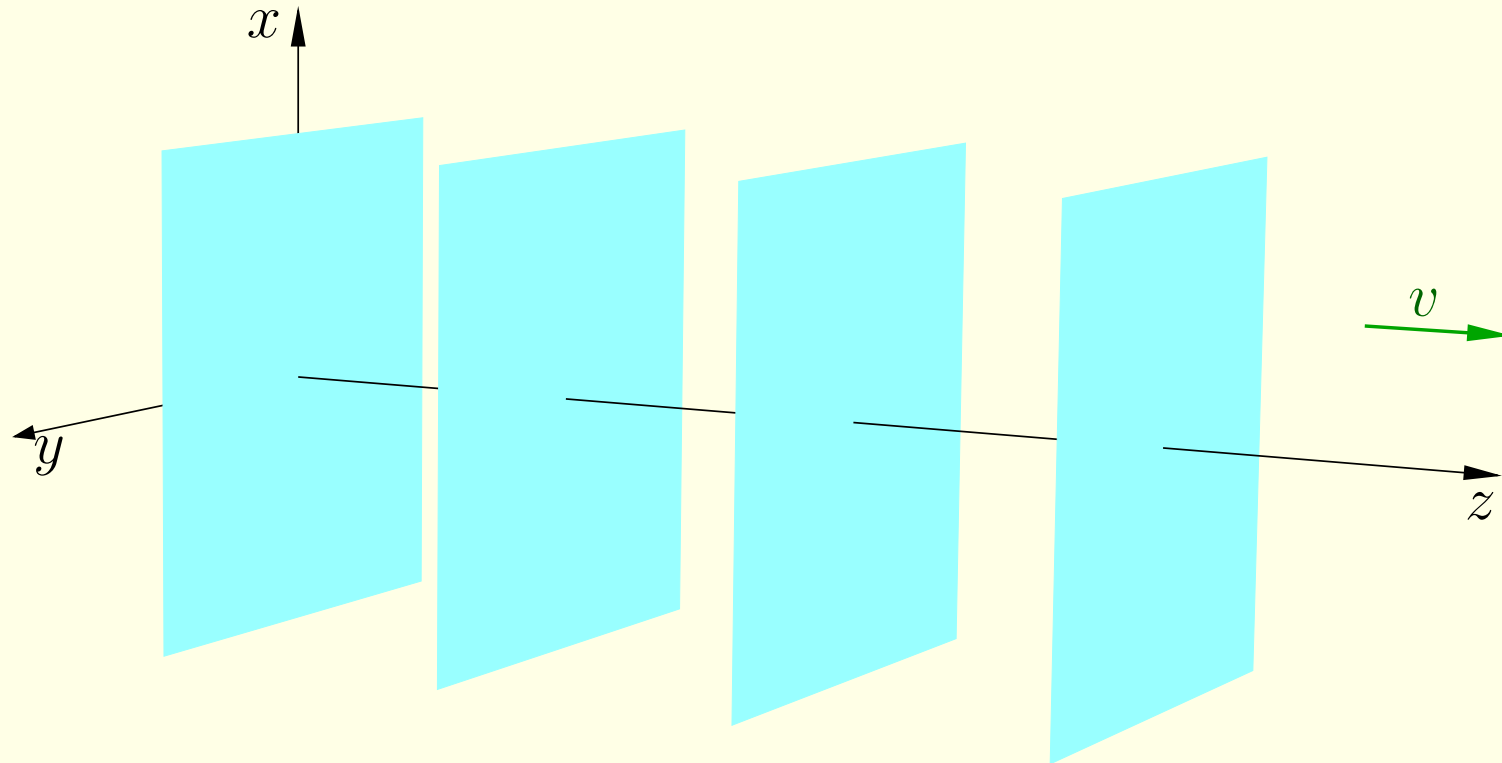
każda składowa pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  spełnia  
trójwymiarowe równanie falowe

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

prędkość fali elektromagnetycznej  
w próżni

## 9.2.2 Fale monochromatyczne płaskie

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$



fala płaska

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ i } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow (\tilde{E}_0)_z = (\tilde{B}_0)_z = 0 \quad \text{fale są poprzeczne}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow -k(\tilde{E}_0)_y = \omega(\tilde{B}_0)_x, \quad k(\tilde{E}_0)_x = \omega(\tilde{B}_0)_y$$

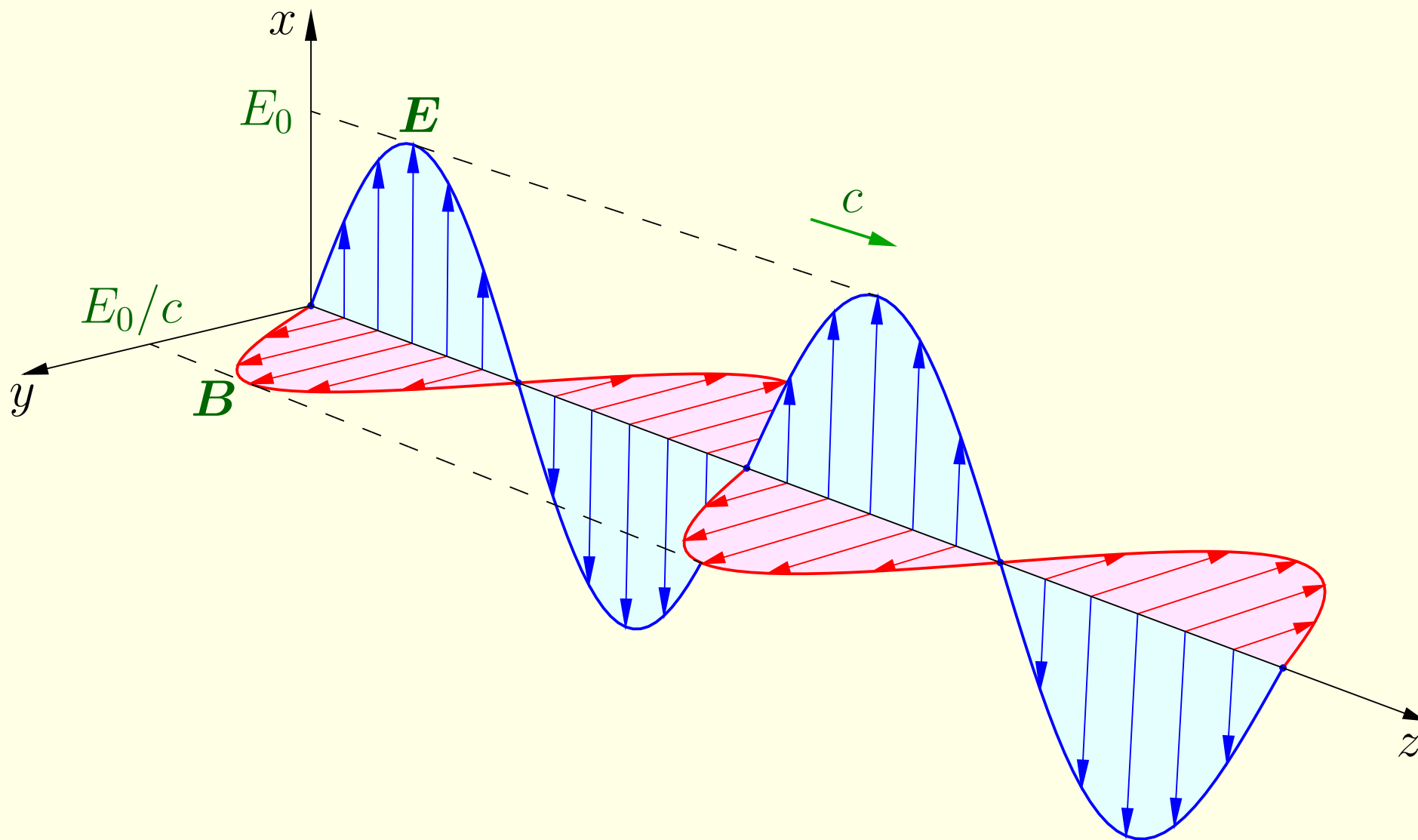
$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0)$$

pola  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są zgodne w fazie  
i wzajemnie prostopadłe

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

amplitudy pola elektrycznego i  
magnetycznego są ze sobą związane





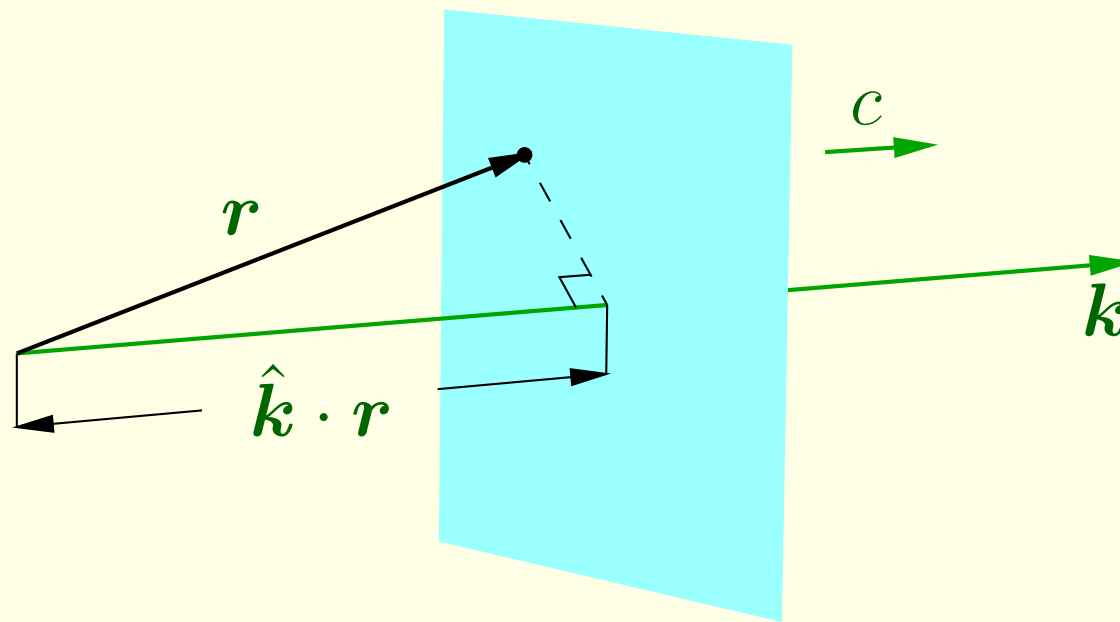
Jeśli  $\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$ , to  $\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{y}}$$

poła rzeczywiste

Kierunek pola elektrycznego określa polaryzację fali elektromagnetycznej.



dowolny kierunek propagacji

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k} = 0$$

fala poprzeczna

$\hat{\mathbf{n}}$  — wektor polaryzacji,  $\mathbf{k}$  — wektor falowy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})$$

## 9.2.3 Energia i pęd fal elektromagnetycznych

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

$$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2 \quad \text{dla płaskiej fali monochromatycznej}$$

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \quad \begin{array}{l} \text{wkład elektryczny i} \\ \text{magnetyczny są równe} \end{array}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad \text{gęstość strumienia energii}$$

$$\mathbf{S} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = cu \hat{\mathbf{z}} \quad \begin{array}{l} \text{dla płaskiej fali} \\ \text{monochromatycznej} \end{array}$$

$$\wp = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad \text{gęstość pędu}$$

$$\wp = \frac{1}{c} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{c} u \hat{\mathbf{z}} \quad \begin{array}{l} \text{dla płaskiej fali} \\ \text{monochromatycznej} \end{array}$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{średnie po okresie}$$

$$\langle \wp \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}$$

$$I \equiv \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad \text{natężenie fali}$$

## 9.3 Fale elektromagnetyczne w ośrodku materialnym

### 9.3.1 Rozchodzenie się fal w ośrodkach liniowych

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jeśli nie ma} \\ \text{ładunków i prądów} \\ \text{swobodnych} \end{array}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad \text{w ośrodku liniowym}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{w ośrodku liniowym} \\ \text{i jednorodnym} \end{array}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \Rightarrow \mu \epsilon$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad \text{współczynnik załamania}$$

$$\mu/\mu_0 \cong 1, \quad n \cong \sqrt{\epsilon_r} \quad \text{dla większości materiałów}$$

Poprzednie wyniki pozostają słuszne po zamianie

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon, \quad \mu_0 \rightarrow \mu, \quad c \rightarrow v$$

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad \text{gęstość energii}$$



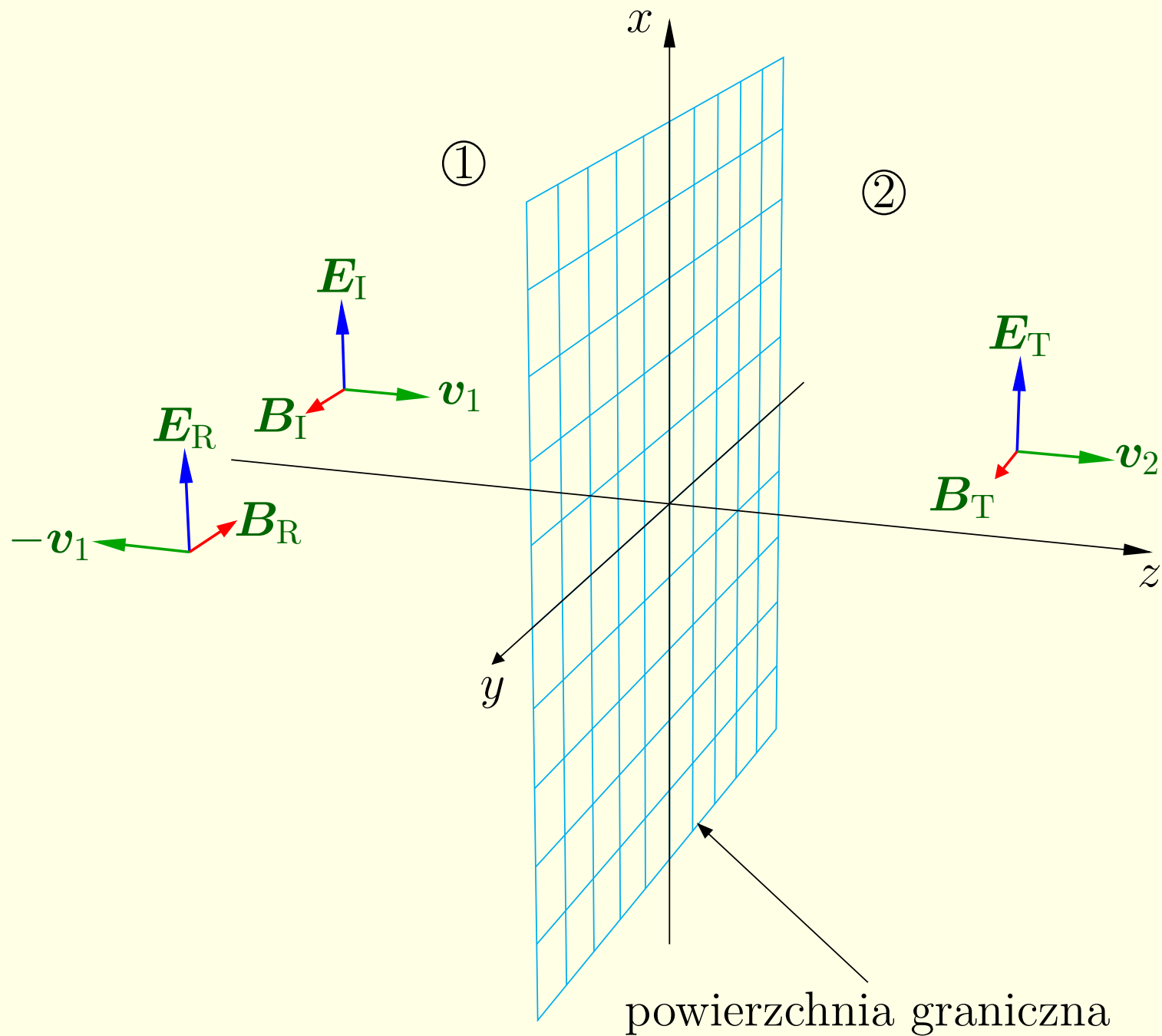
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad \text{wektor Poyntinga}$$

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad \text{natężenie fali}$$

Co się dzieje, gdy fala przechodzi z jednego ośrodka do drugiego?

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, & \text{(iii)} \quad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel, \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp = B_2^\perp, & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel, \end{array} \right\} \text{warunki brzegowe}$$

## 9.3.2 Odbicie i przejście przy padaniu prostopadłym



$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{E}}_{\text{I}}(z, t) &= \tilde{E}_{0\text{I}} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\
 \tilde{\mathbf{B}}_{\text{I}}(z, t) &= \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0\text{I}} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}
 \end{aligned} \right\} \text{fala padająca}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{E}}_{\text{R}}(z, t) &= \tilde{E}_{0\text{R}} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\
 \tilde{\mathbf{B}}_{\text{R}}(z, t) &= -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0\text{R}} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}
 \end{aligned} \right\} \text{fala odbita}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{E}}_{\text{T}}(z, t) &= \tilde{E}_{0\text{T}} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\
 \tilde{\mathbf{B}}_{\text{T}}(z, t) &= \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0\text{T}} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}
 \end{aligned} \right\} \text{fala przechodząca}$$

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T} \quad \text{z (iii)}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_I} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_R} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0_T} \right) \quad \text{z (iv)}$$

$$\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \beta \tilde{E}_{0_T}, \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$\tilde{E}_{0_R} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left( \frac{2}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}$$

$$\tilde{E}_{0_R} = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{E}_{0_I} \quad \text{dla } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$E_{0_R} = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right| E_{0_I}, \quad E_{0_T} = \left| \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right| E_{0_I} \quad \begin{array}{l} \text{amplitudy} \\ \text{rzeczywiste} \end{array}$$

$$E_{0R} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \left| \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right| E_{0I} \quad \begin{array}{l} \text{amplitudy} \\ \text{rzeczywiste} \end{array}$$

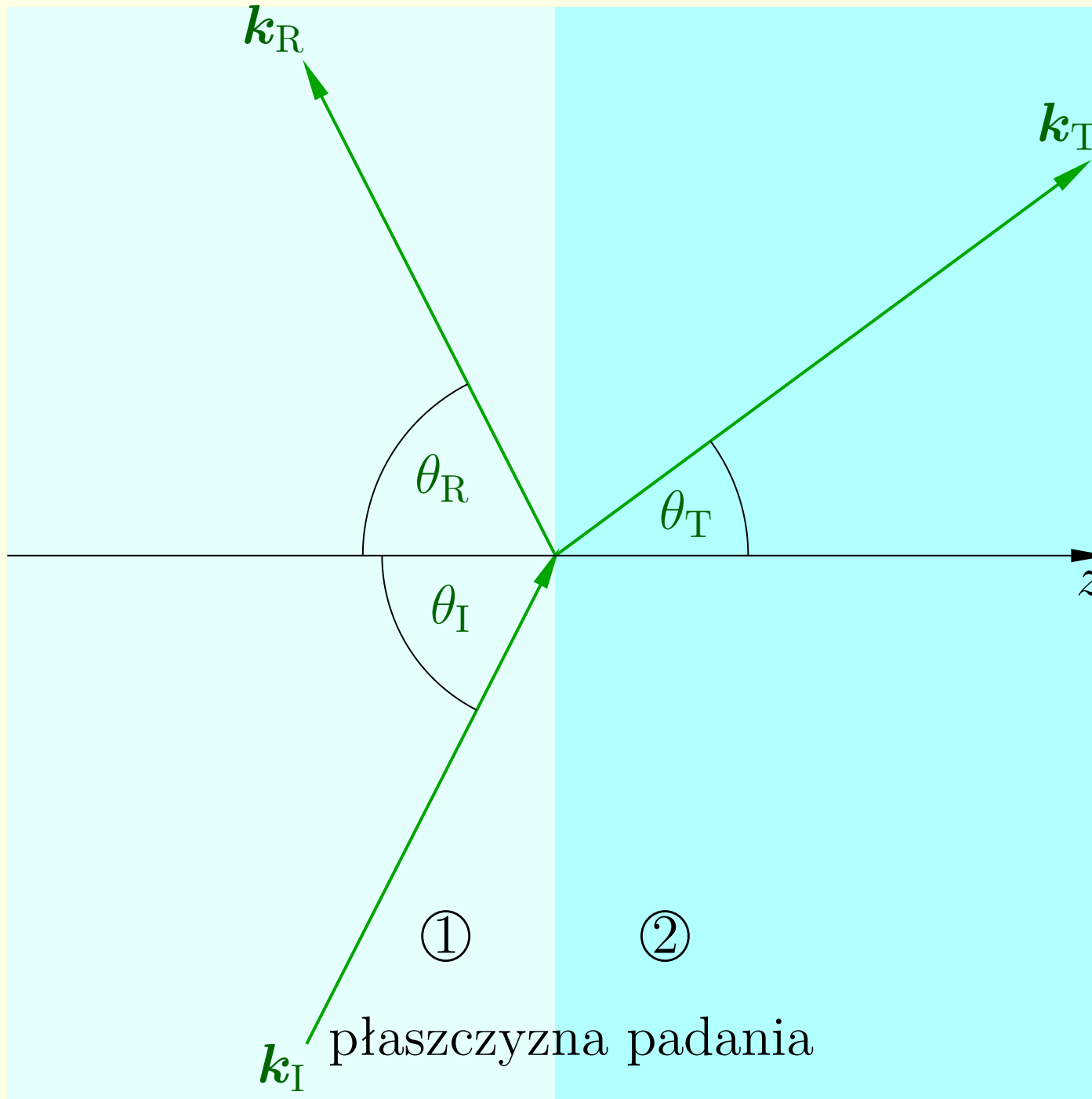
$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad \text{natężenie fali}$$

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{współczynnik odbicia}$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad \text{współczynnik przejścia}$$

$$R + T = 1 \quad \text{zasada zachowania energii}$$

### 9.3.3 Odbicie i przejście przy padaniu ukośnym



$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{I}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0\text{I}} e^{i(\mathbf{k}_{\text{I}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{I}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v_1} [\hat{\mathbf{k}}_{\text{I}} \times \tilde{\mathbf{E}}_{\text{I}}(\mathbf{r}, t)] \end{aligned} \right\} \text{fala padająca}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{R}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0\text{R}} e^{i(\mathbf{k}_{\text{R}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{R}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v_1} [\hat{\mathbf{k}}_{\text{R}} \times \tilde{\mathbf{E}}_{\text{R}}(\mathbf{r}, t)] \end{aligned} \right\} \text{fala odbita}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{T}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0\text{T}} e^{i(\mathbf{k}_{\text{T}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{T}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v_2} [\hat{\mathbf{k}}_{\text{T}} \times \tilde{\mathbf{E}}_{\text{T}}(\mathbf{r}, t)] \end{aligned} \right\} \text{fala przechodząca}$$

$$k_{\text{I}} v_1 = k_{\text{R}} v_1 = k_{\text{T}} v_2 = \omega \quad \Rightarrow \quad k_{\text{I}} = k_{\text{R}} = \frac{v_2}{v_1} k_{\text{T}} = \frac{n_1}{n_2} k_{\text{T}}$$

$$(\dots)e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\dots)e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\dots)e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{dla } z = 0$$

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \quad \text{dla } z = 0$$

$$x(k_I)_x + y(k_R)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y$$

$$(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y \quad \text{dla } x = 0$$

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x \quad \text{dla } y = 0$$

Wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej leżą w tej samej płaszczyźnie — **płaszczyźnie padania** — wyznaczonej przez wektor falowy fali padającej i normalną do powierzchni



$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$$

$\theta_I$  — kąt padania,  $\theta_R$  — kąt odbicia,  $\theta_T$  — kąt załamania

Kąt padania jest równy kątowi odbicia

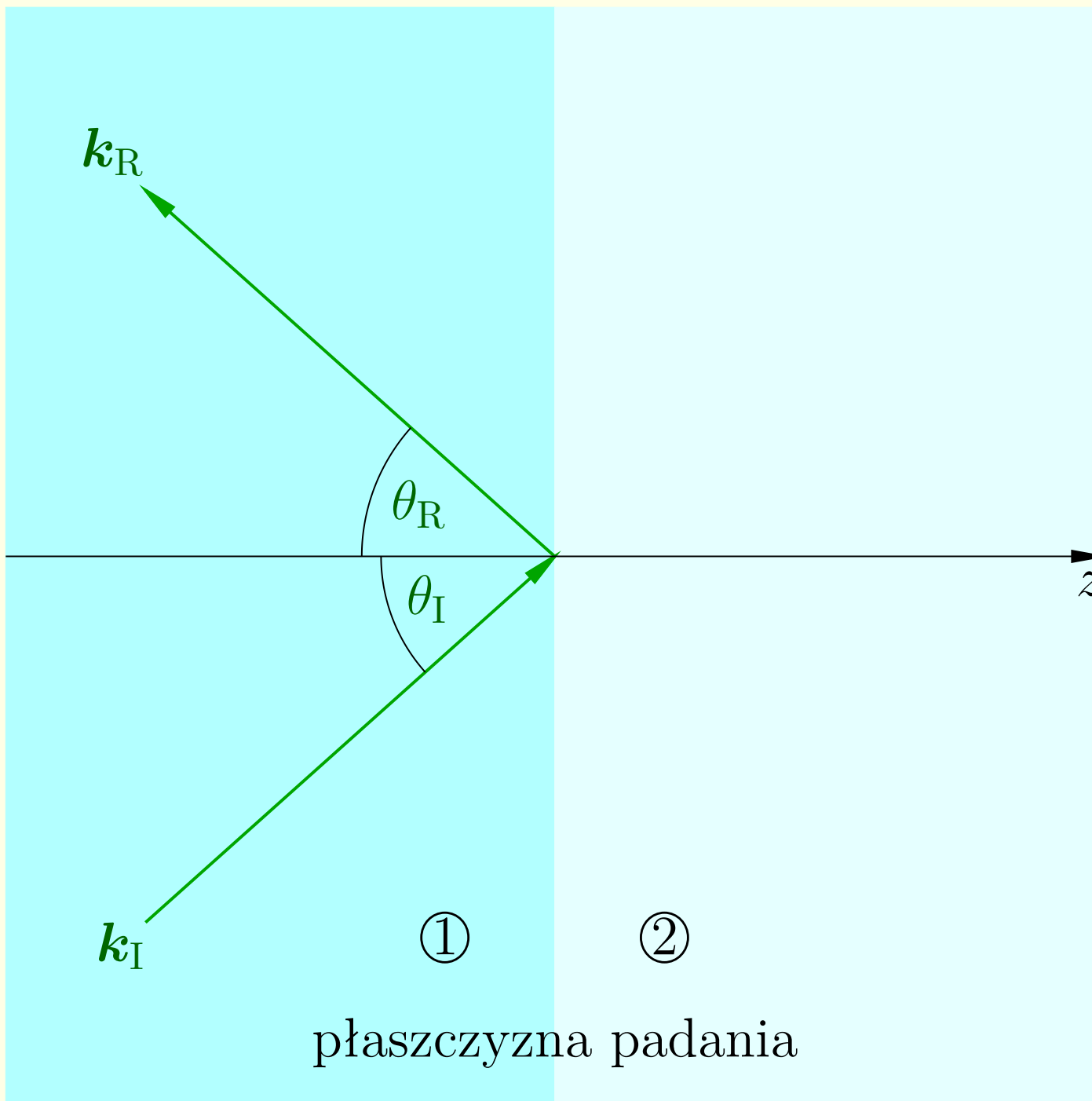
$$\theta_I = \theta_R$$

Prawo załamania, prawo Snella

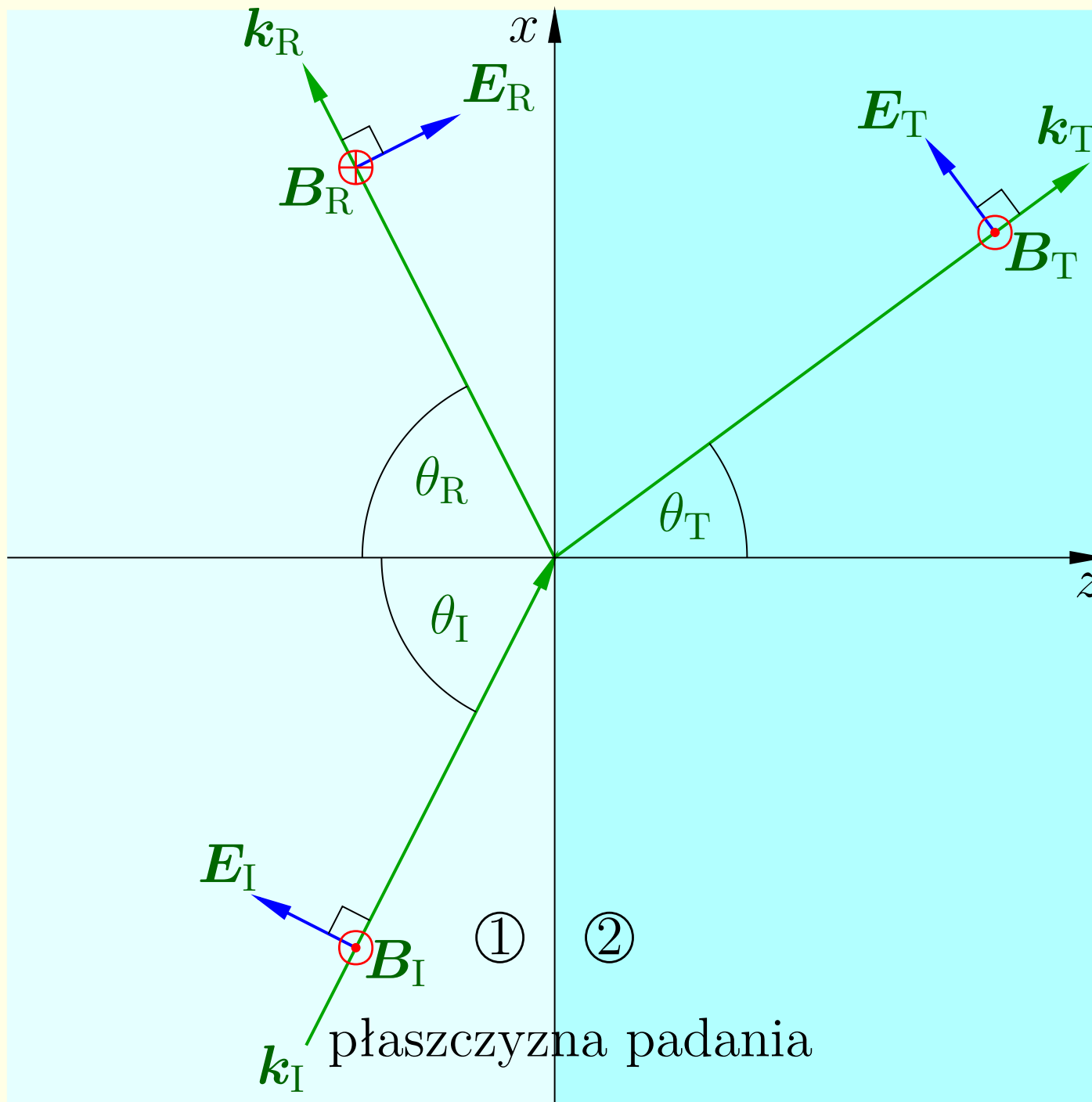
$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_1 < n_2, \quad \theta_T < \theta_I; \quad n_1 > n_2, \quad \theta_T > \theta_I$$

$n_1 > n_2$ , dla  $\theta_I > \theta_{\text{gr}} \equiv \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  całkowite wewnętrzne odbicie



całkowite wewnętrzne odbicie ( $n_1 > n_2$ )



fala spolaryzowana w płaszczyźnie padania

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \epsilon_1(\tilde{\mathbf{E}}_{0\text{I}} + \tilde{\mathbf{E}}_{0\text{R}})_z = \epsilon_2(\tilde{\mathbf{E}}_{0\text{T}})_z \\
 \text{(ii)} \quad & (\tilde{\mathbf{B}}_{0\text{I}} + \tilde{\mathbf{B}}_{0\text{R}})_z = (\tilde{\mathbf{B}}_{0\text{T}})_z \\
 \text{(iii)} \quad & (\tilde{\mathbf{E}}_{0\text{I}} + \tilde{\mathbf{E}}_{0\text{R}})_{x,y} = (\tilde{\mathbf{E}}_{0\text{T}})_{x,y} \\
 \text{(iv)} \quad & \frac{1}{\mu_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{0\text{I}} + \tilde{\mathbf{B}}_{0\text{R}})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2}(\tilde{\mathbf{B}}_{0\text{T}})_{x,y}
 \end{aligned} \right\} \text{na granicy ośrodków}$$

**Dla polaryzacji równoległej do płaszczyzny padania:**

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0\text{I}} \sin \theta_{\text{I}} + \tilde{E}_{0\text{R}} \sin \theta_{\text{R}}) = \epsilon_2(-\tilde{E}_{0\text{T}} \sin \theta_{\text{T}}) \quad \text{z (i)}$$

$$(\tilde{E}_{0\text{I}} \cos \theta_{\text{I}} + \tilde{E}_{0\text{R}} \cos \theta_{\text{R}}) = \tilde{E}_{0\text{T}} \cos \theta_{\text{T}} \quad \text{z (iii)}$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}(\tilde{E}_{0\text{I}} - \tilde{E}_{0\text{R}}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0\text{T}} \quad \text{z (iv)}$$

$$\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \beta \tilde{E}_{0_T} \quad \text{z praw odbicia i załamania}$$

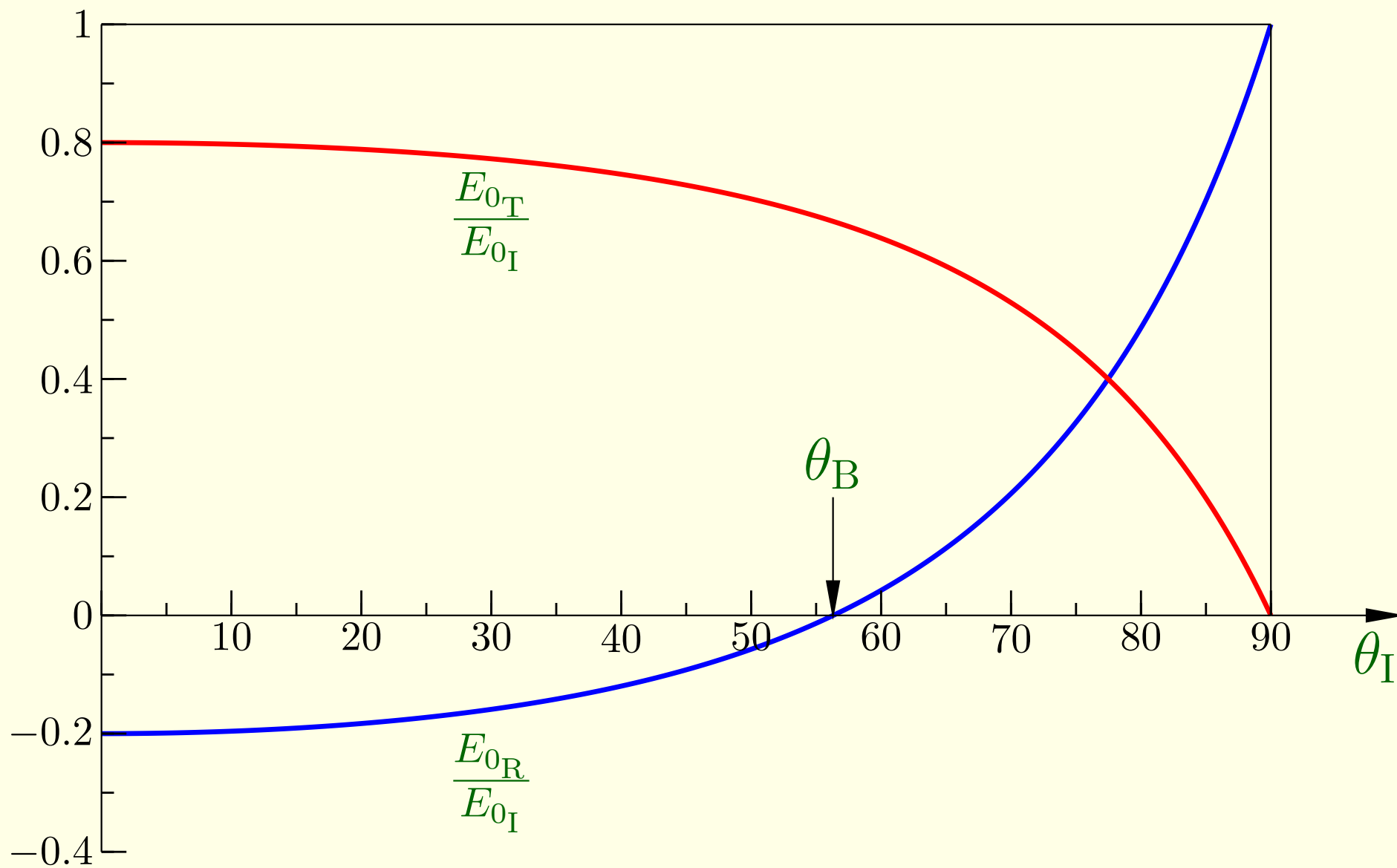
$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \alpha \tilde{E}_{0_T}$$

$$\alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$$

$$\tilde{E}_{0_R} = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}$$

równania Fresnela



$$\frac{n_2}{n_1} = 1.5$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I}$$

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \quad \text{kąt Brewstera}$$

$$\mu_1 \cong \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \beta \cong n_2/n_1, \quad \sin^2 \theta_B \cong \beta^2 / (1 + \beta^2) \quad \text{typowo}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_B \cong \frac{n_2}{n_1}}$$

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I \quad \text{natężenie fali padającej}$$

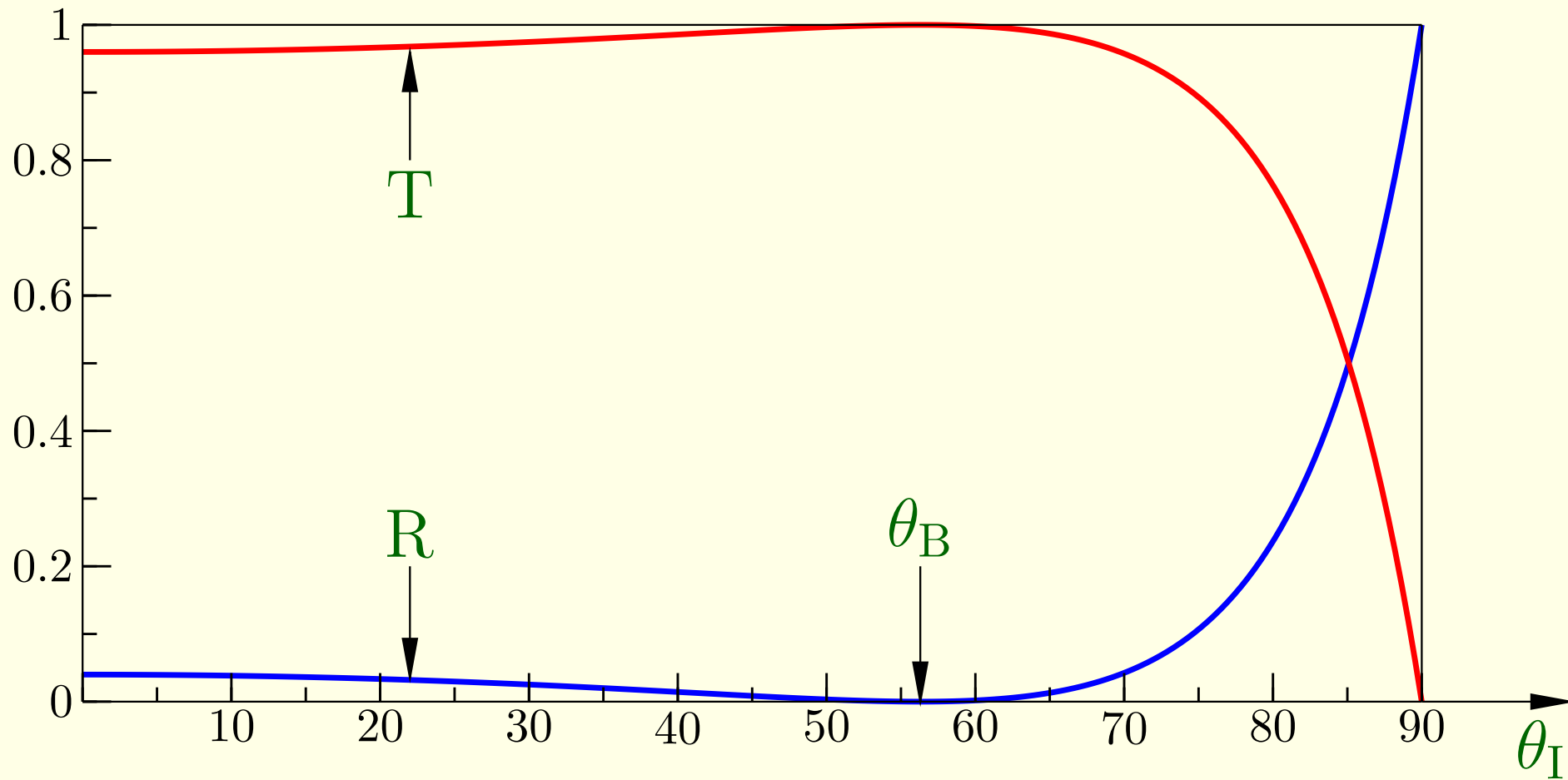
$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R \quad \text{natężenie fali odbitej}$$

$$I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T \quad \text{natężenie fali przechodzącej}$$

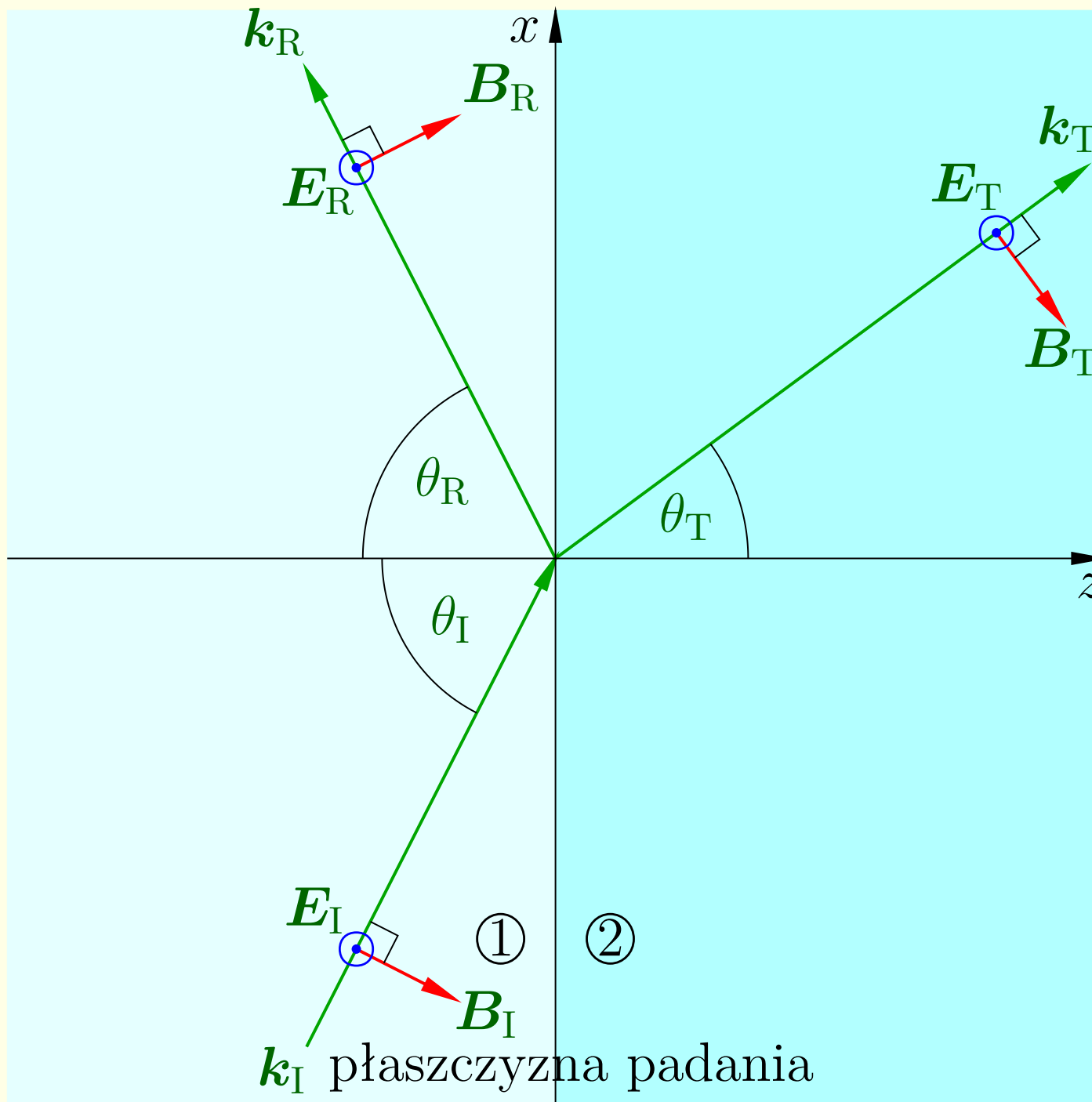
$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad \text{współczynnik odbicia}$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 \quad \begin{array}{l} \text{współczynnik} \\ \text{przejścia} \end{array}$$





$$\frac{n_2}{n_1} = 1.5$$



fala spolaryzowana prostopadle do płaszczyzny padania

## Dla polaryzacji prostopadłej do płaszczyzny padania:

$$(i) \quad \epsilon_1(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_z = \epsilon_2(\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_z$$

$$(ii) \quad (\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_z = (\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_z$$

$$(iii) \quad (\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_{x,y} = (\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_{x,y}$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2}(\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_{x,y}$$

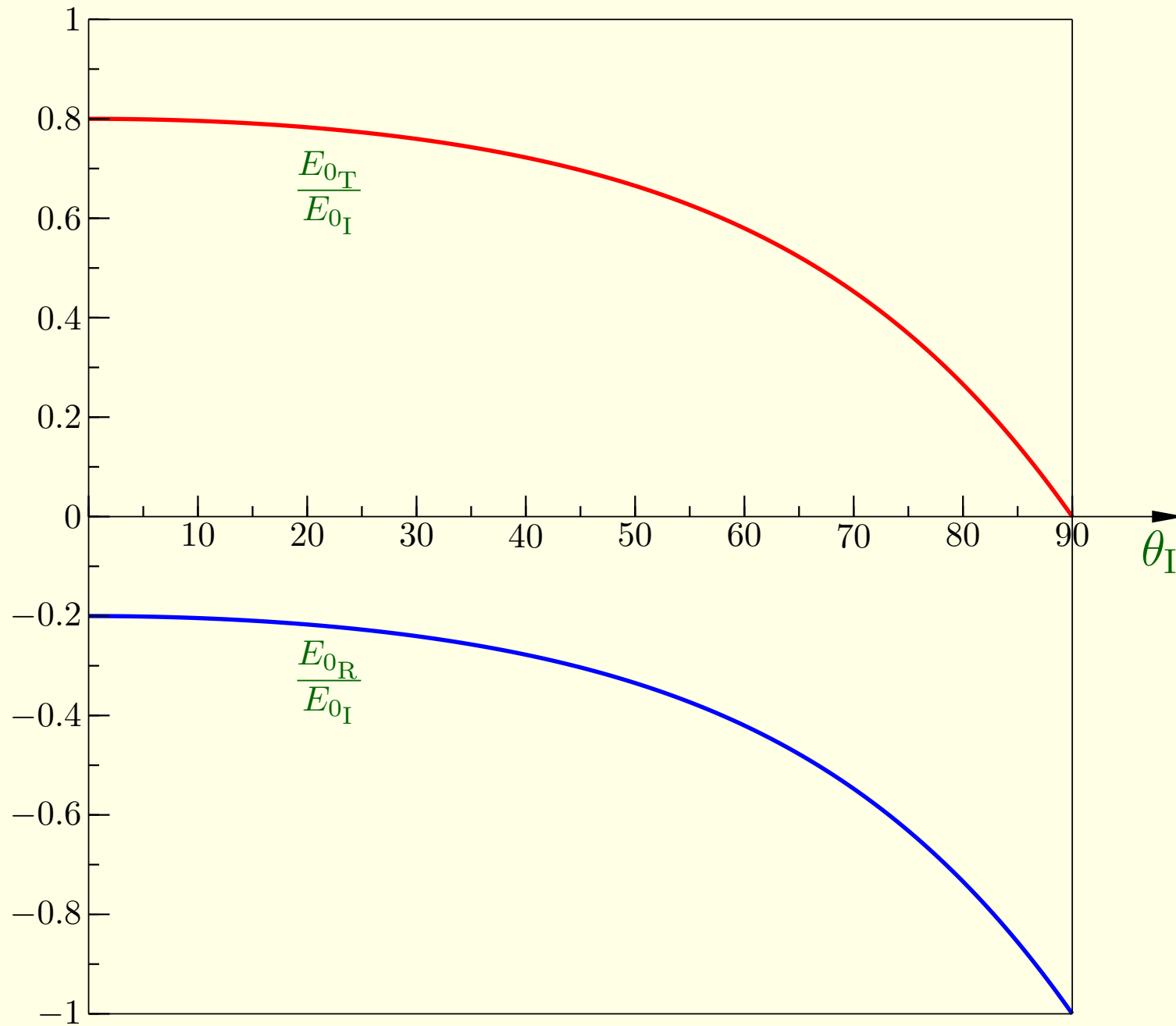
na granicy ośrodków

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T} \quad \text{z (iii)}$$

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \alpha\beta\tilde{E}_{0T} \quad \text{z (iv)}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{1 + \alpha\beta} \right) \tilde{E}_{0I}$$

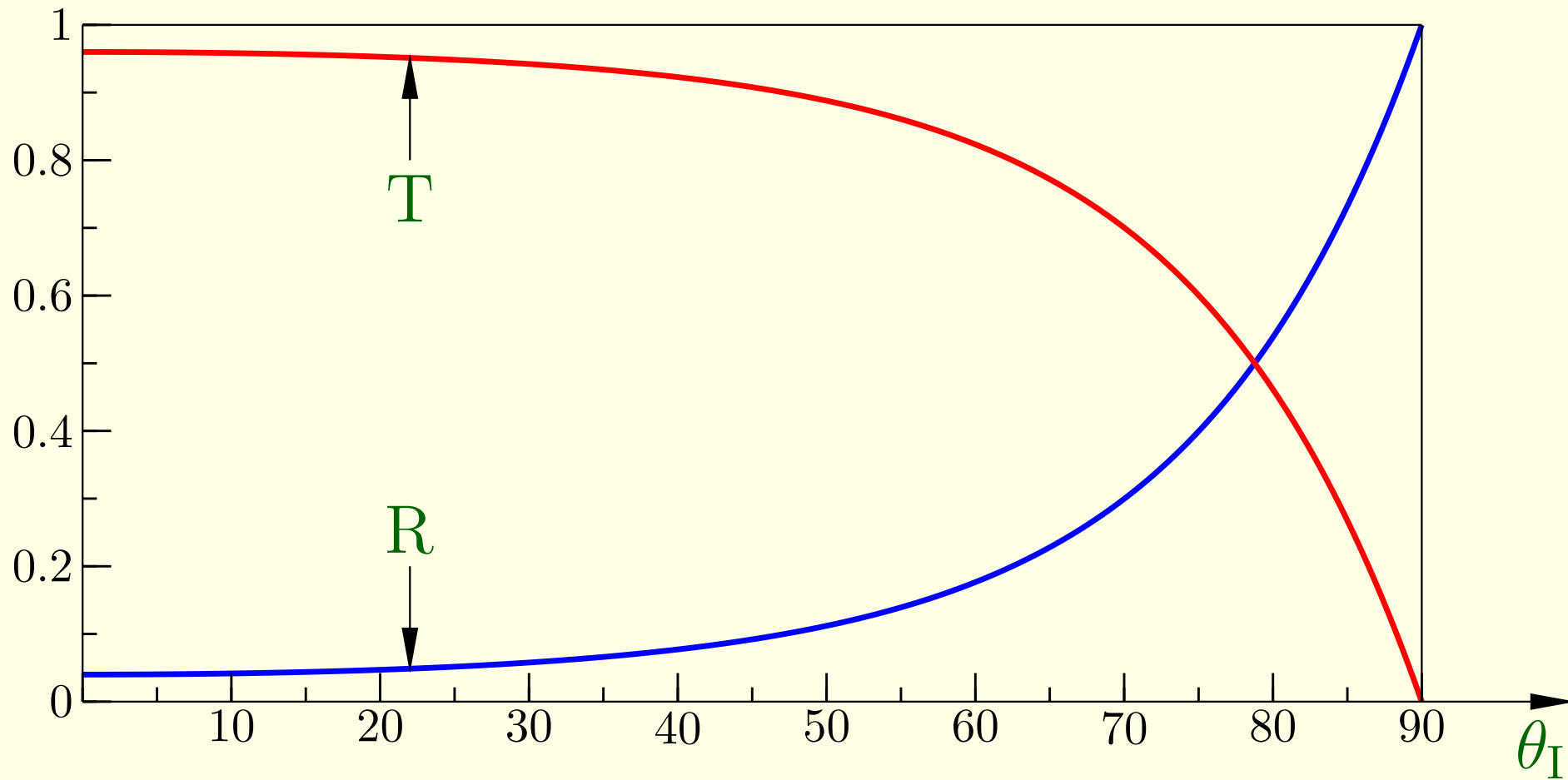
równania Fresnela



$$\frac{n_2}{n_1} = 1.5$$

$$R \equiv \left( \frac{\tilde{E}_{0R}}{\tilde{E}_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2 \quad \text{współczynnik odbicia}$$

$$T \equiv \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \alpha \left( \frac{\tilde{E}_{0T}}{\tilde{E}_{0I}} \right)^2 = \alpha\beta \left( \frac{2}{1 + \alpha\beta} \right)^2 \quad \text{współczynnik przejścia}$$



$$\frac{n_2}{n_1} = 1.5$$

## 9.4 Absorpcja i dyspersja

### 9.4.1 Fale elektromagnetyczne w przewodnikach

$$\mathbf{J}_{\text{sw}} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{prawo Ohma}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{sw}}, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{równania} \\ \text{Maxwella} \end{array}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{sw}} = -\frac{\partial \rho_{\text{sw}}}{\partial t} \quad \text{równanie ciągłości}$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{sw}}}{\partial t} = -\sigma (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{\text{sw}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{sw}}(t) = e^{-(\sigma/\epsilon)t} \rho_{\text{sw}}(0)$$

Ładunek swobodny szybko rozptywa się na brzegi

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\sigma \mathbf{E},
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{równania} \\ \text{Maxwella} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \Delta \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
 \Delta \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
 \end{array} \right\} \text{zmodyfikowane równania falowe}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \\
 \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}
 \end{array} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \quad \text{zespolona liczba falowa}$$

$$\boxed{\tilde{k} = k + i\kappa}$$



$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

$$\kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(z, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$d \equiv \frac{1}{\kappa} \quad \text{głębokość wnikania}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

z równań Maxwella

$$\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

pola są prostopadłe

$$\tilde{k} = K e^{i\phi}$$

$$K \equiv |\tilde{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \sqrt{\epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}}$$

$$\phi \equiv \text{arctg} \left( \frac{\kappa}{k} \right)$$

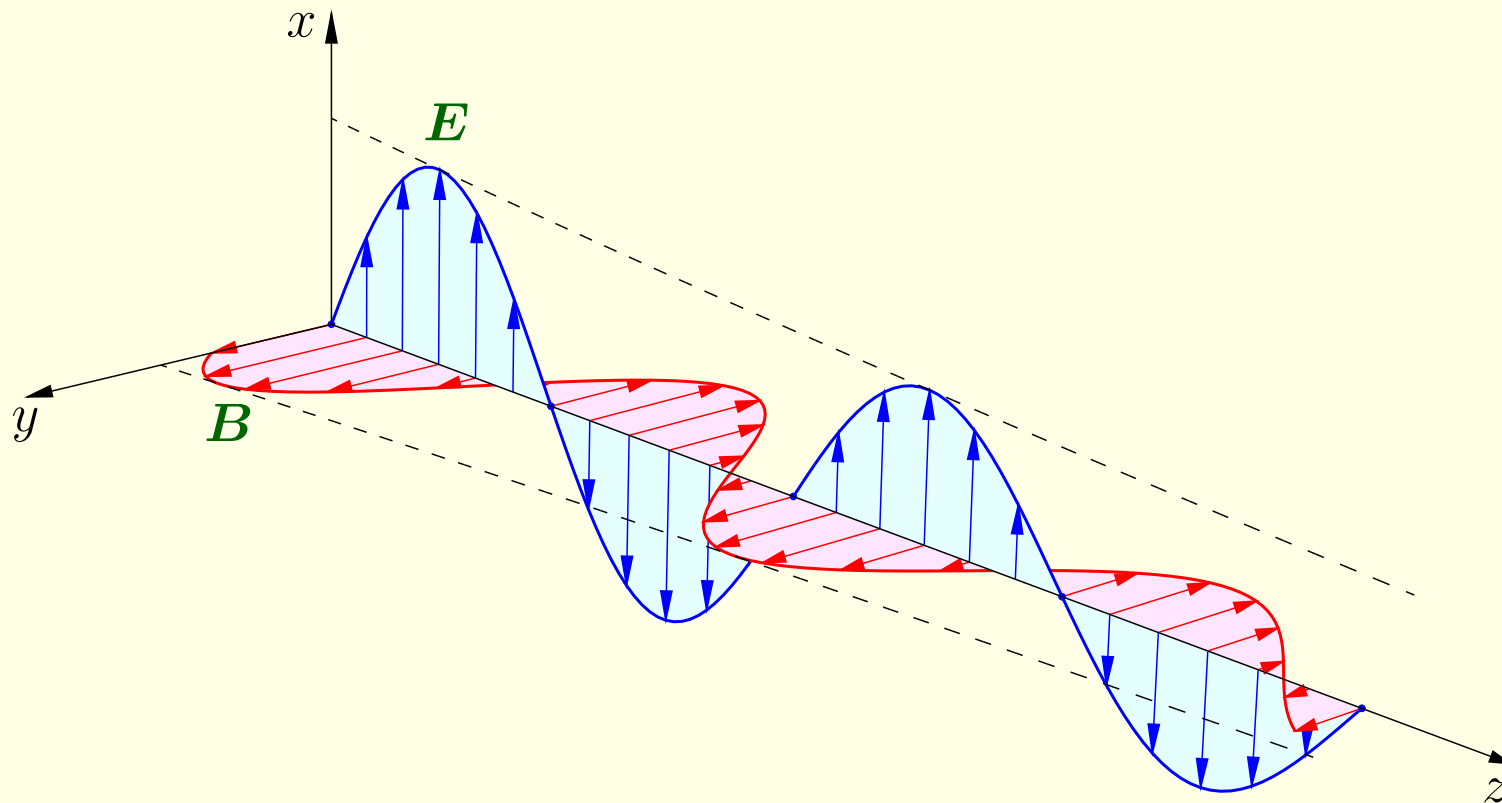
$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E} \quad \text{pola nie są w fazie}$$

$$\delta_B - \delta_E = \phi$$

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \quad \text{rzeczywiste amplitudy}$$

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{\mathbf{x}} \quad \text{rozwiązania}$$

$$\mathbf{B}(z, t) = B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{\mathbf{y}} \quad \text{rzeczywiste}$$



## 9.4.2 Odbicie na powierzchni przewodzącej

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_{\text{sw}}, \\ \text{(ii)} & B_1^\perp = B_2^\perp, \\ \text{(iii)} & \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel, \\ \text{(iv)} & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel = \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \hat{\mathbf{n}}, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{I}}(z, t) = \tilde{E}_{0\text{I}} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{I}}(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0\text{I}} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \end{array} \right\} \text{fala padająca}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{R}}(z, t) = \tilde{E}_{0\text{R}} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{R}}(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0\text{R}} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \end{array} \right\} \text{fala odbita}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{T}}(z, t) = \tilde{E}_{0\text{T}} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\text{T}}(z, t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_{0\text{T}} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \end{array} \right\} \text{fala przechodząca}$$

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T} \quad \text{z (iii)}$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega} \tilde{E}_{0T} = 0 \quad \text{z (iv) przy } \mathbf{K}_{\text{sw}} = 0$$

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \tilde{\beta} \tilde{E}_{0T}$$

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2$$

$$\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0I}$$

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0 \quad \text{dla doskonałego przewodnika } (\tilde{k}_2 = \infty)$$

### 9.4.3 Zależność przenikalności elektrycznej od częstości

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \text{prędkość fazowa}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{prędkość grupowa}$$

Elektron związany można potraktować jak tłumiony oscylator harmoniczny.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0 \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \quad \text{w zmiennych zespolonych}$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 \quad \text{amplituda drgań}$$

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \quad \text{moment dipolowy}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{Nq^2}{m} \left( \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{polaryzacja ośrodka}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{zespolona podatność elektryczna}$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e) \quad \text{zespolona przenikalność elektryczna}$$

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

zespolona względna  
przenikalność elektryczna

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\epsilon}\mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

równanie falowe dla danej częstości w  
ośrodku dyspersyjnym

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

rozwiązanie

$$\tilde{k} \equiv \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu_0} \omega = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}$$

zespolona liczba falowa

$$\tilde{k} = k + i\kappa$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$



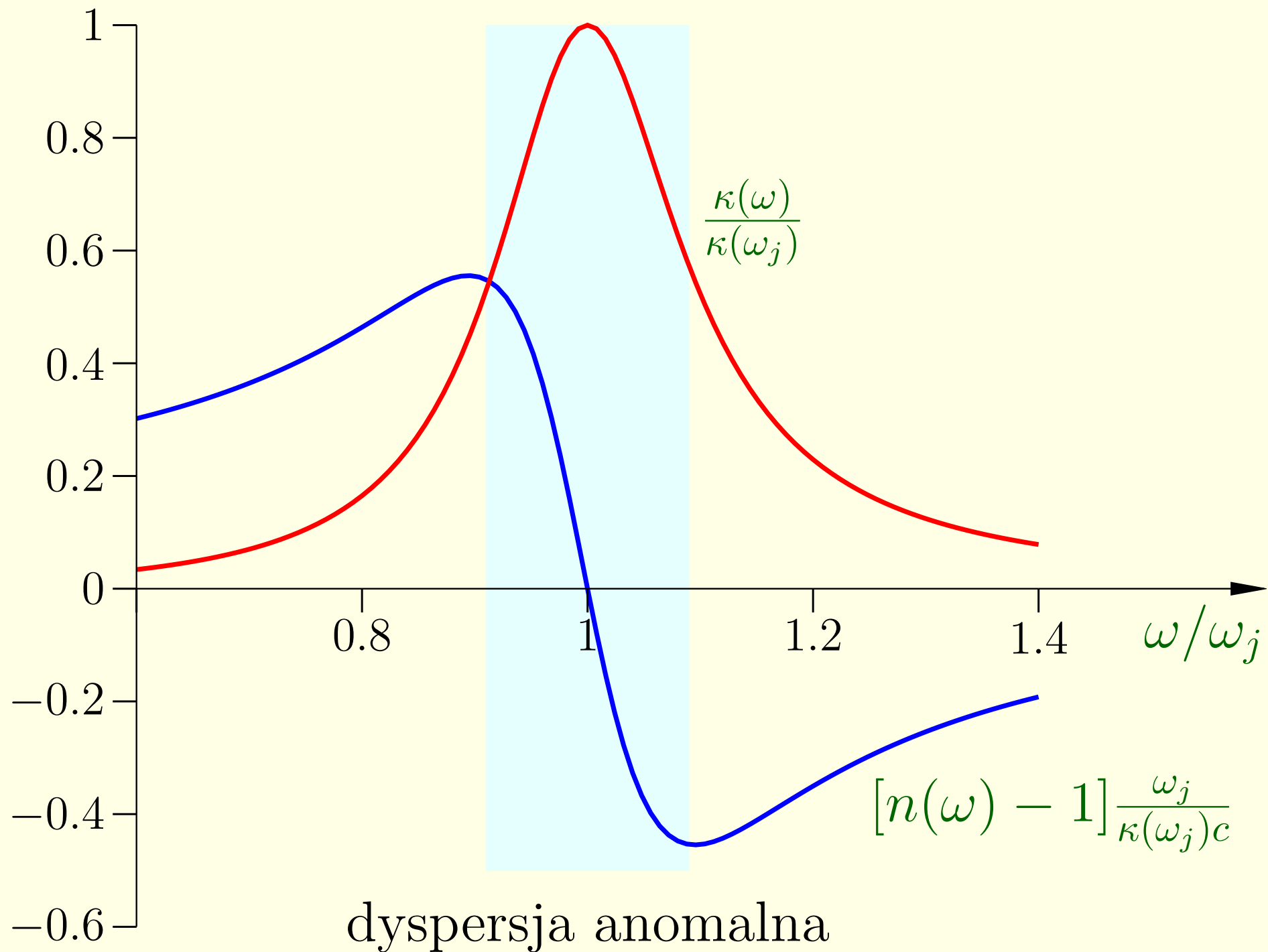
$\alpha = 2\kappa$  współczynnik absorpcji

$n = \frac{ck}{\omega}$  współczynnik załamania

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_r} \cong \frac{\omega}{c} \left[ 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right]$$

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2}$$

$$\alpha = 2\kappa \cong \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2}$$



$$\gamma_j/\omega_j = 0.2$$

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad \text{daleko od rezonansów}$$

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right) \quad \text{dla } \omega < \omega_j$$

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}\right) + \omega^2 \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4}\right)$$

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{wzór Cauchy'ego} \\ \text{dla gazów w obszarze optycznym} \end{array}$$