

Elektrodynamika

Część 7

Zasady zachowania

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

8	Zasady zachowania	3
8.1	Ładunek i energia	3
8.2	Pęd	8

8 Zasady zachowania

8.1 Ładunek i energia

8.1.1 Równanie ciągłości

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad \text{ładunek w obszarze } \mathcal{V}$$

8 Zasady zachowania

8.1 Ładunek i energia

8.1.1 Równanie ciągłości

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad \text{ładunek w obszarze } \mathcal{V}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{zasada zachowania ładunku}$$

8 Zasady zachowania

8.1 Ładunek i energia

8.1.1 Równanie ciągłości

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad \text{ładunek w obszarze } \mathcal{V}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{zasada zachowania ładunku}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} d\tau$$

8 Zasady zachowania

8.1 Ładunek i energia

8.1.1 Równanie ciągłości

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad \text{ładunek w obszarze } \mathcal{V}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{zasada zachowania ładunku}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} d\tau$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}}$$

równanie ciągłości

8.1.2 Twierdzenie Poyntinga

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

8.1.2 Twierdzenie Poyntinga

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

8.1.2 Twierdzenie Poyntinga

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

całkowita energia zmagazynowana
w polu elektromagnetycznym

8.1.2 Twierdzenie Poyntinga

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

całkowita energia zmagazynowana
w polu elektromagnetycznym

Ogólniejsze wyprowadzenie:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

8.1.2 Twierdzenie Poyntinga

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

całkowita energia zmagazynowana
w polu elektromagnetycznym

Ogólniejsze wyprowadzenie:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

$$q = \rho d\tau, \quad \rho\mathbf{v} = \mathbf{J}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{ z prawa Ampère'a-Maxwella}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{z prawa Ampère'a-Maxwella}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{z prawa Ampère'a-Maxwella}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{z prawa Ampère'a-Maxwella}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{z prawa Ampère'a-Maxwella}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2), \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

Twierdzenie Poyntinga: praca wykonana nad ładunkami przez siły elektromagnetyczne jest równa ubytkowi energii zmagazynowanej w polach, pomniejszonemu o energię, która wypłynęła przez powierzchnię ograniczającą obszar

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

Twierdzenie Poyntinga: praca wykonana nad ładunkami przez siły elektromagnetyczne jest równa ubytkowi energii zmagazynowanej w polach, pomniejszonemu o energię, która wypłynęła przez powierzchnię ograniczającą obszar

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

wektor Poyntinga

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_{\text{mech}} d\tau$$

praca wykonana nad ładunkami
zwiększa ich energię mechaniczną

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V u_{\text{mech}} d\tau$$

praca wykonana nad ładunkami
zwiększa ich energię mechaniczną

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

gęstość energii pola

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V u_{\text{mech}} d\tau$$

praca wykonana nad ładunkami
zwiększa ich energię mechaniczną

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

gęstość energii pola

$$\frac{d}{dt} \int_V (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) d\tau = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\tau$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V u_{\text{mech}} d\tau$$

praca wykonana nad ładunkami
zwiększa ich energię mechaniczną

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

gęstość energii pola

$$\frac{d}{dt} \int_V (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) d\tau = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \mathbf{S}$$

8.2 Pęd

8.2.2 Tensor napięć Maxwella

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau$$

8.2 Pęd

8.2.2 Tensor napięć Maxwella

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \text{gęstość siły}$$

8.2 Pęd

8.2.2 Tensor napięć Maxwella

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \text{gęstość siły}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$$

8.2 Pęd

8.2.2 Tensor napięć Maxwella

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \text{gęstość siły}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) + \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad \text{tożsamość}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]$$

$$- \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \\ & - \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = & \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ & + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad \text{pochodne iloczynów} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{prawo Faradaya}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \\ & - \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = & \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ & + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad \text{pochodne iloczynów} \end{aligned}$$

$$\nabla(E^2) = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla (B^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla (B^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla (B^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

tensor napięć
Maxwella

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla (B^2) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

tensor napięć
Maxwella

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

delta Kroneckera

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0(E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0}(B_x B_y) \quad \text{itd.}$$

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0(E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0}(B_x B_y) \quad \text{itd.}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad \text{iloczyn wektora } \mathbf{a} \text{ z tensorem } \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0(E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0}(B_x B_y) \quad \text{itd.}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad \text{iloczyn wektora } \mathbf{a} \text{ z tensorem } \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j &= \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E})E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B})B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2 \right] \end{aligned}$$

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0}(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0(E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0}(B_x B_y) \quad \text{itd.}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij} \quad \text{iloczyn wektora } \mathbf{a} \text{ z tensorem } \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j &= \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E})E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B})B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2 \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}}$$

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau$$

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau$$

8.2.3 Zasada zachowania pędu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau$$

8.2.3 Zasada zachowania pędu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau + \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau$$

8.2.3 Zasada zachowania pędu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau + \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

$$\mathbf{p}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbf{S} d\tau \quad \text{pęd pola elektromagnetycznego}$$

$$\mathcal{P}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

gęstość pędu pola

$$\wp_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

gęstość pędu pola

$$\frac{\partial}{\partial t} (\wp_{\text{mech}} + \wp_{\text{em}}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

$$\wp_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

gęstość pędu pola

$$\frac{\partial}{\partial t} (\wp_{\text{mech}} + \wp_{\text{em}}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ — gęstość strumienia pędu

8.2.4 Moment pędu

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \text{gęstość energii}$$

8.2.4 Moment pędu

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \text{gęstość energii}$$

$$\mathcal{P}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad \text{gęstość pędu}$$

8.2.4 Moment pędu

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \text{gęstość energii}$$

$$\mathfrak{p}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad \text{gęstość pędu}$$

$$\mathbf{l}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times \mathfrak{p}_{\text{em}} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \quad \text{gęstość momentu pędu}$$

8.2.4 Moment pędu

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad \text{gęstość energii}$$

$$\boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{S} = \epsilon_0 (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \quad \text{gęstość pędu}$$

$$\boldsymbol{\ell}_{\text{em}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = \epsilon_0 [\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})] \quad \text{gęstość momentu pędu}$$

Nawet statyczne pola mogą mieć pęd i moment pędu!