

Elektrodynamika

Część 6

Elektrodynamika

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

7	Elektrodynamika	3
7.1	Siła elektromotoryczna	3
7.2	Indukcja elektromagnetyczna	8
7.3	Równania Maxwella	23

7 Elektrodynamika

7.1 Siła elektromotoryczna

7.1.1 Prawo Ohma

f — siła działająca na jednostkowy ładunek

$J = \sigma f$, σ — przewodność elektryczna właściwa substancji

$\rho = 1/\sigma$ — opór elektryczny właściwy substancji

7 Elektrodynamika

7.1 Siła elektromotoryczna

7.1.1 Prawo Ohma

\mathbf{f} — siła działająca na jednostkowy ładunek

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}$, σ — przewodność elektryczna właściwa substancji

$\rho = 1/\sigma$ — opór elektryczny właściwy substancji

$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ siła elektromagnetyczna

7 Elektrodynamika

7.1 Siła elektromotoryczna

7.1.1 Prawo Ohma

\mathbf{f} — siła działająca na jednostkowy ładunek

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}$, σ — przewodność elektryczna właściwa substancji

$\rho = 1/\sigma$ — opór elektryczny właściwy substancji

$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ siła elektromagnetyczna

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \quad \text{prawo Ohma}$$

7 Elektrodynamika

7.1 Siła elektromotoryczna

7.1.1 Prawo Ohma

\mathbf{f} — siła działająca na jednostkowy ładunek

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}$, σ — przewodność elektryczna właściwa substancji

$\rho = 1/\sigma$ — opór elektryczny właściwy substancji

$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ siła elektromagnetyczna

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ prawo Ohma

Wewnątrz przewodnika $\mathbf{E} = 0$; jest to prawdą dla ładunków stacjonarnych ($\mathbf{J} \rightarrow 0$); $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = 0$ dla $\sigma \rightarrow \infty$.

$$V = IR$$

inna postać prawa Ohma

$V = IR$ inna postać prawa Ohma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

dla prądu stałego i jednorodnego σ ;
gęstość ładunku jest równa zero

$V = IR$ inna postać prawa Ohma

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ dla prądu stałego i jednorodnego σ ;
gęstość ładunku jest równa zero

$P = VI = I^2R$ prawo Joule'a; P — moc wydzielana

7.1.2 Siła elektromotoryczna

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\dot{z}r} + \mathbf{E} \quad \text{dwie siły podtrzymujące prąd}$$

7.1.2 Siła elektromotoryczna

$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\dot{z}r} + \mathbf{E}$ dwie siły podtrzymujące prąd

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_{\dot{z}r} \cdot d\mathbf{l}$$

siła elektromotoryczna

7.1.2 Siła elektromotoryczna

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\dot{z}r} + \mathbf{E} \quad \text{dwie siły podtrzymujące prąd}$$

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_{\dot{z}r} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{siła elektromotoryczna}$$

$$\mathbf{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{f}_{\dot{z}r} \quad \text{dla idealnego źródła } (\sigma \rightarrow \infty)$$

7.1.2 Siła elektromotoryczna

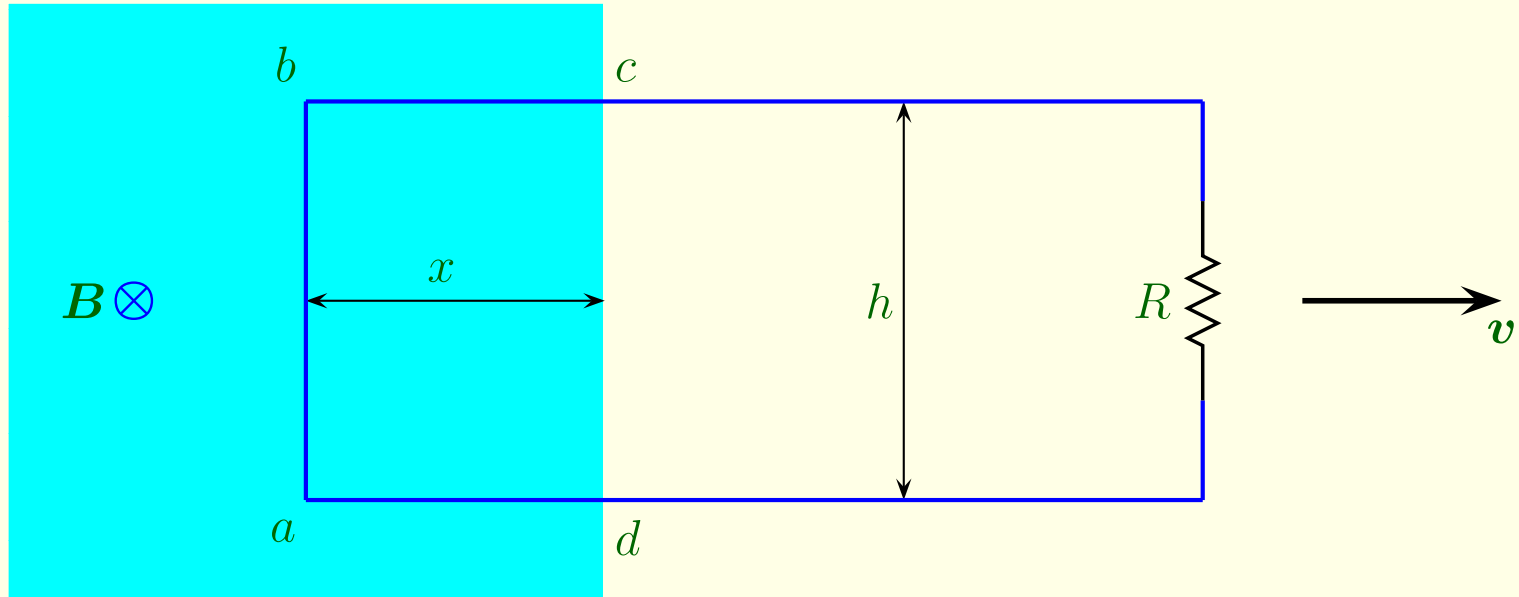
$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\dot{z}r} + \mathbf{E}$ dwie siły podtrzymujące prąd

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_{\dot{z}r} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{siła elektromotoryczna}$$

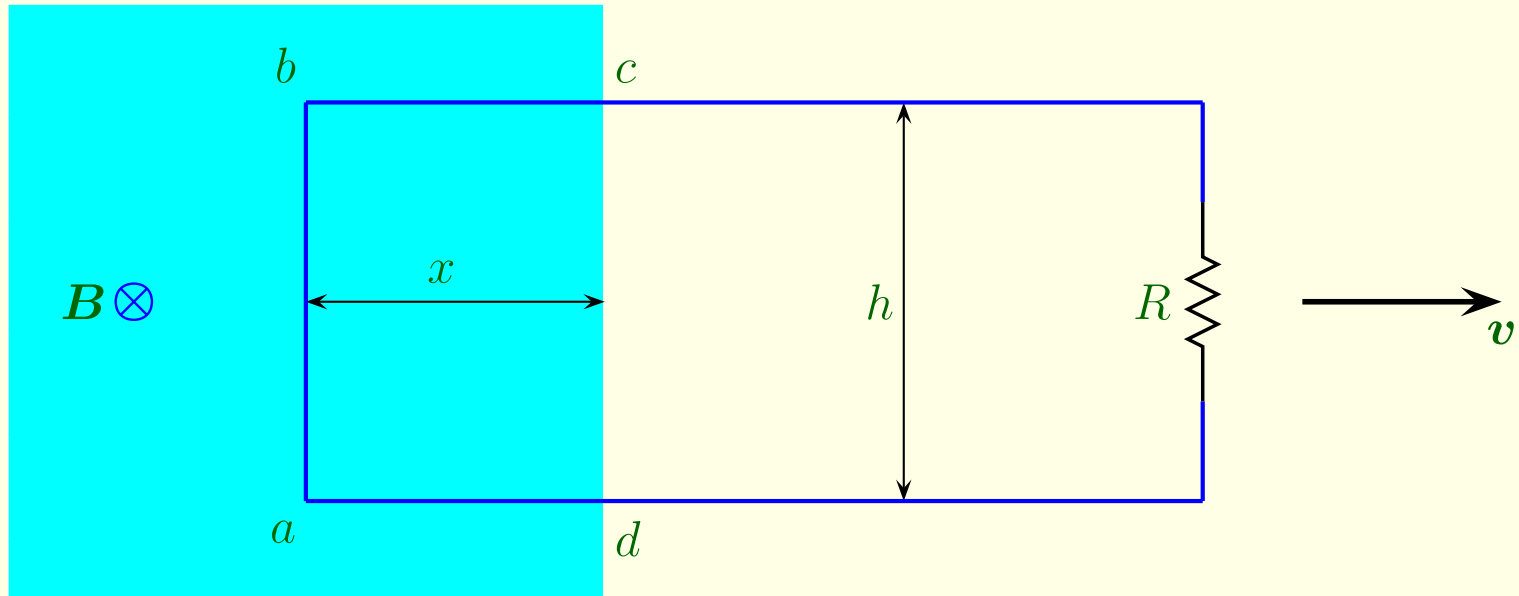
$\mathbf{f} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{f}_{\dot{z}r}$ dla idealnego źródła ($\sigma \rightarrow \infty$)

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}_{\dot{z}r} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad \begin{array}{l} \text{różnica potencjałów} \\ \text{pomiędzy biegunami baterii} \end{array}$$

7.1.3 SEM przewodnika poruszającego się w polu magnetycznym

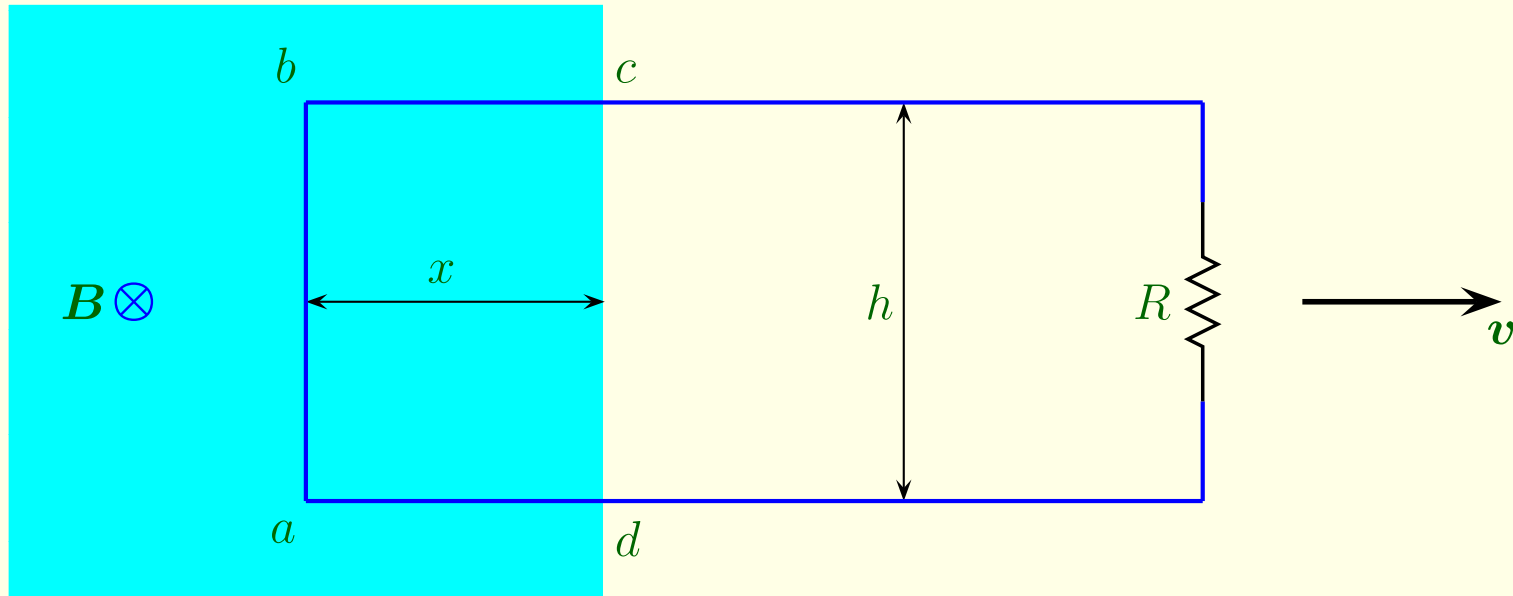


7.1.3 SEM przewodnika poruszającego się w polu magnetycznym



$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{magn}} \cdot d\mathbf{l} = vBh$$

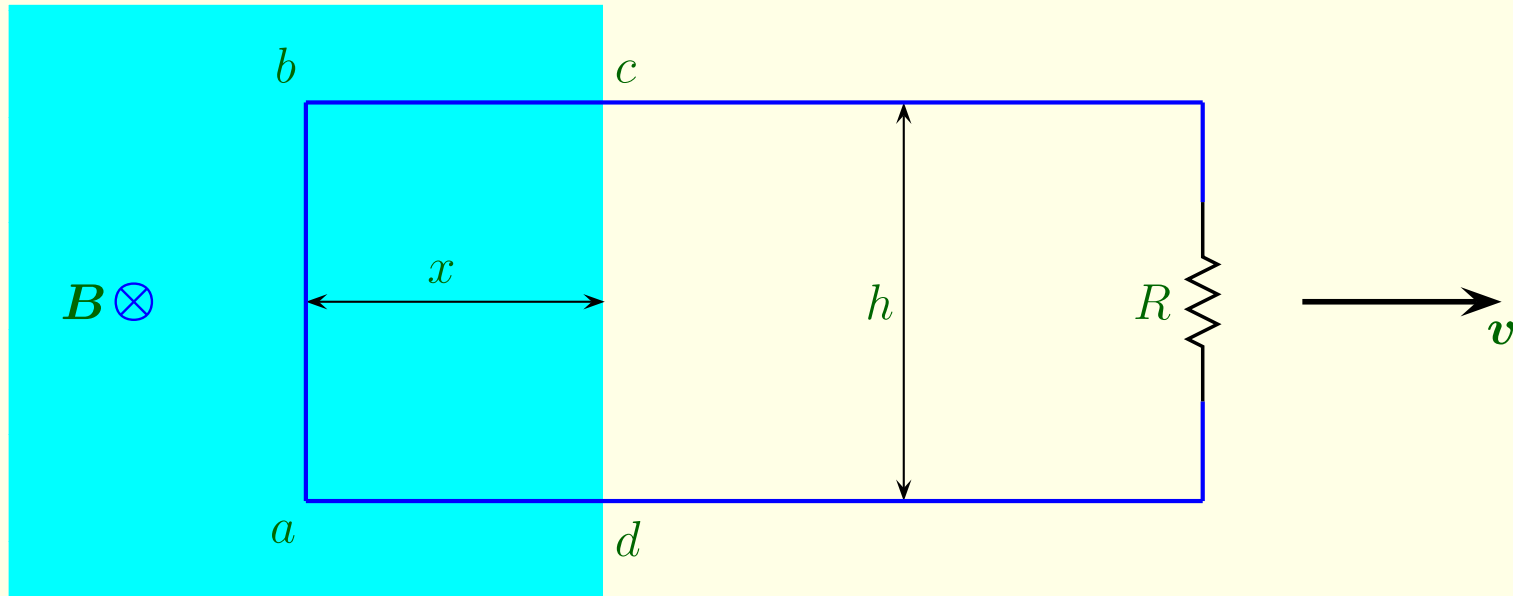
7.1.3 SEM przewodnika poruszającego się w polu magnetycznym



$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{magn}} \cdot d\mathbf{l} = vBh$$

$$\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{strumień magnetyczny}$$

7.1.3 SEM przewodnika poruszającego się w polu magnetycznym



$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{magn}} \cdot d\mathbf{l} = vBh$$

$$\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{strumień magnetyczny}$$

$$\Phi = Bhx$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv$$

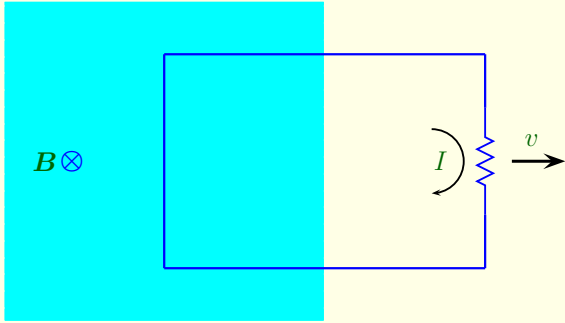
$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

reguła strumienia

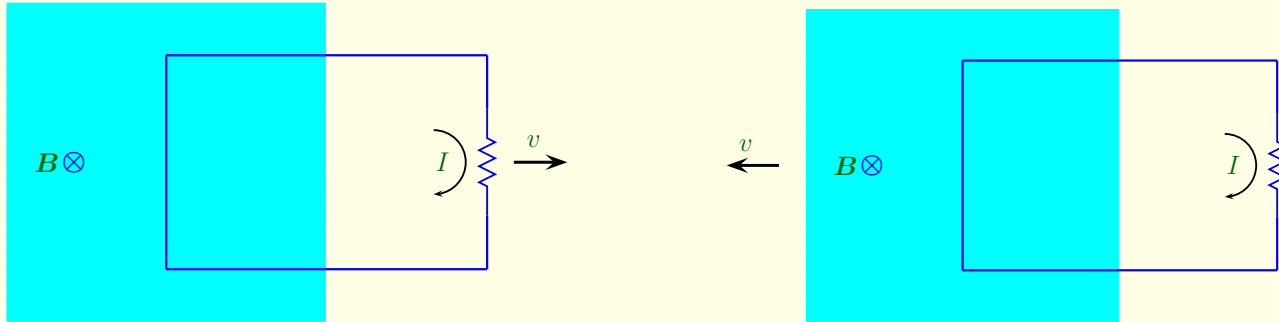
7.2 Indukcja elektromagnetyczna

7.2.1 Prawa Faradaya



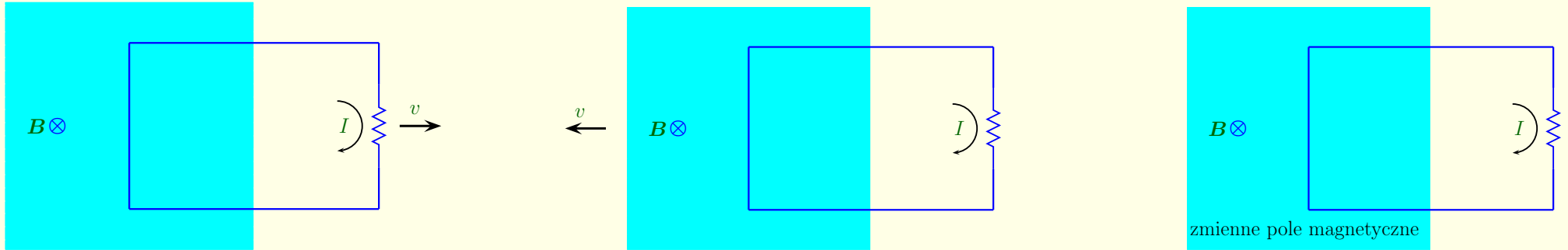
7.2 Indukcja elektromagnetyczna

7.2.1 Prawa Faradaya



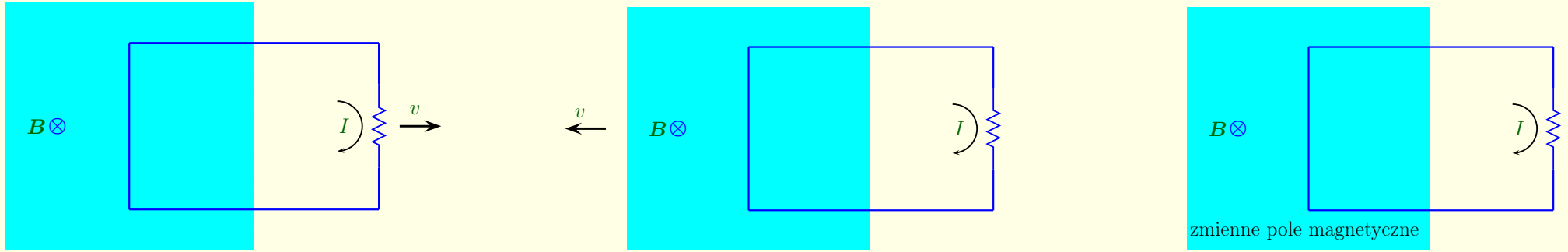
7.2 Indukcja elektromagnetyczna

7.2.1 Prawa Faradaya



7.2 Indukcja elektromagnetyczna

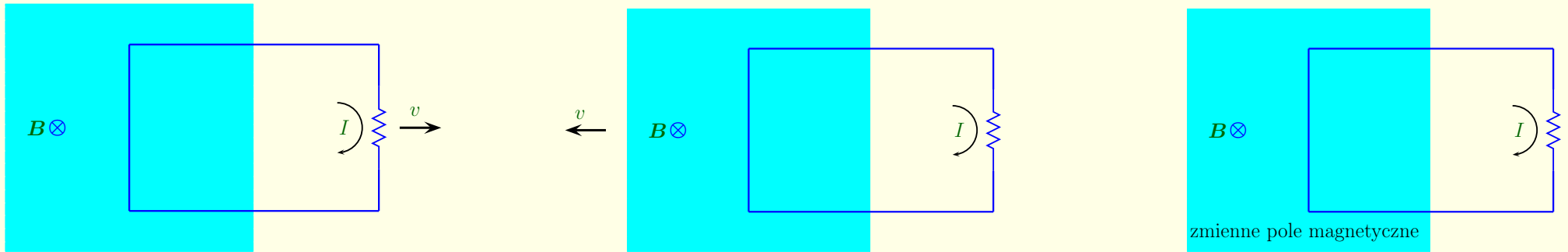
7.2.1 Prawa Faradaya



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

7.2 Indukcja elektromagnetyczna

7.2.1 Prawa Faradaya

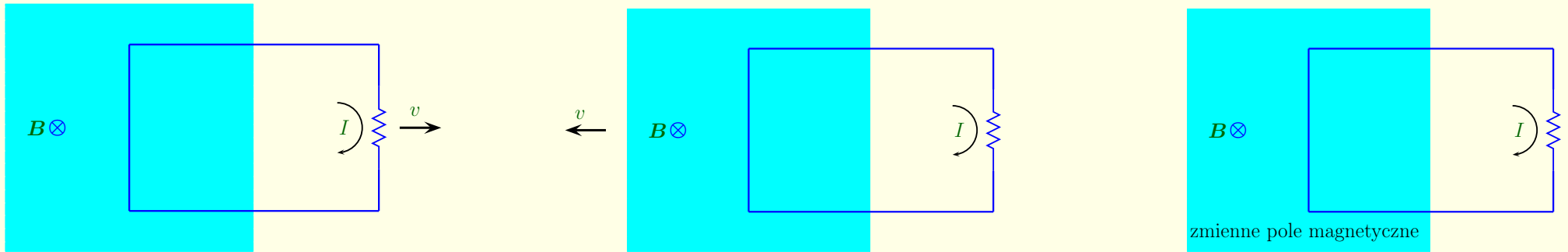


$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Zmiana pola magnetycznego indukuje pole elektryczne!

7.2 Indukcja elektromagnetyczna

7.2.1 Prawa Faradaya



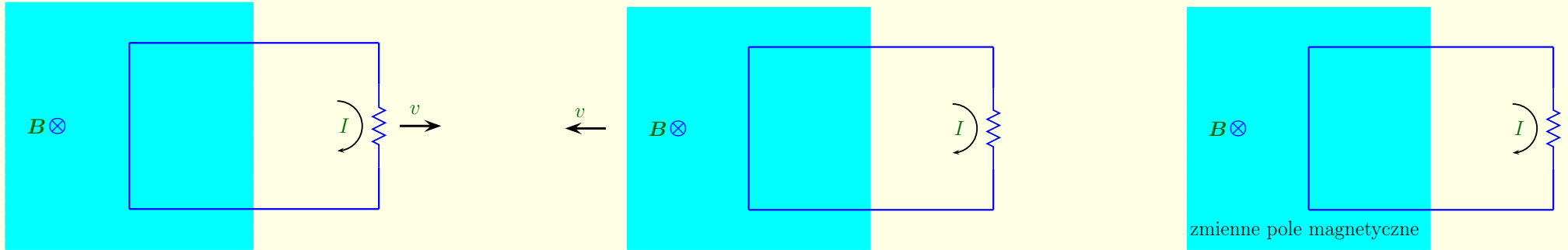
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Zmiana pola magnetycznego indukuje pole elektryczne!

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

7.2 Indukcja elektromagnetyczna

7.2.1 Prawa Faradaya



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Zmiana pola magnetycznego indukuje pole elektryczne!

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

prawo Faradaya

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

prawo Faradaya

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

uniwersalna reguła strumienia

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

prawo Faradaya

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

uniwersalna reguła strumienia

Reguła Lenza: Natura nie znosi zmiany strumienia

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

prawo Faradaya

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

uniwersalna reguła strumienia

Reguła Lenza: **Natura nie znosi zmiany strumienia**

Indukowany prąd będzie płynął w takim kierunku, że dodatkowy strumień powstały w wyniku jego przepływu sprzeciwia się zmianie pierwotnego strumienia.

7.2.2 Indukowane pole elektryczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

7.2.2 Indukowane pole elektryczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

7.2.2 Indukowane pole elektryczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{dla pola czysto „faradayowskiego” } (\rho = 0)$$

7.2.2 Indukowane pole elektryczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{dla pola czysto „faradayowskiego” } (\rho = 0)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{zawsze}$$

7.2.2 Indukowane pole elektryczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{dla pola czysto „faradayowskiego” } (\rho = 0)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{zawsze}$$

Pole elektryczne indukowane przez zmiany pola magnetycznego określone jest wielkością $\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ dokładnie w taki sam sposób, jak indukcja pola magnetostatycznego przez $\mu_0 \mathbf{J}$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c$$

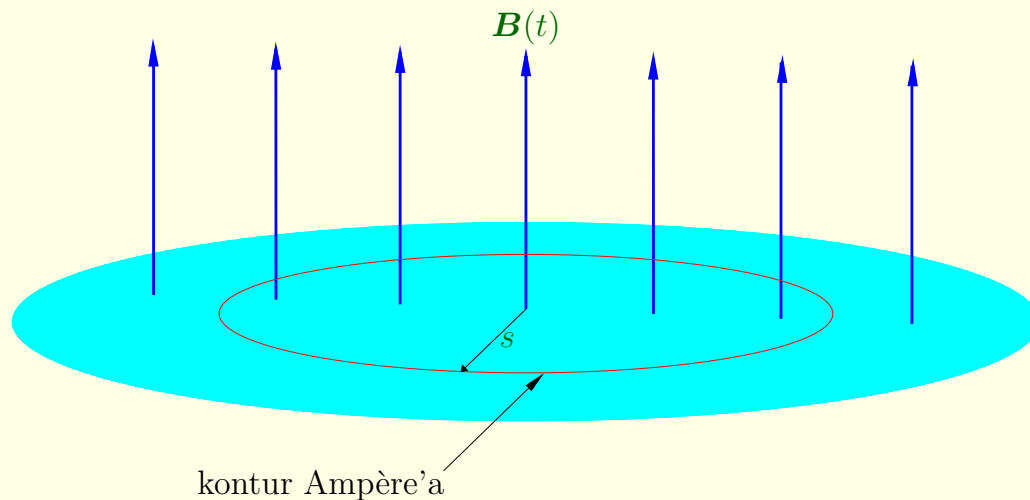
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Przykład:

Jednorodne pole magnetyczne o indukcji $\mathbf{B}(t)$ skierowane pionowo do góry wypełnia kołowy obszar zaznaczony kolorem na rysunku. Jakie pole elektryczne się indukuje, jeśli indukcja magnetyczna \mathbf{B} zmienia się w czasie?



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi s)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi s) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi s) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[\pi s^2 B(t)]$$

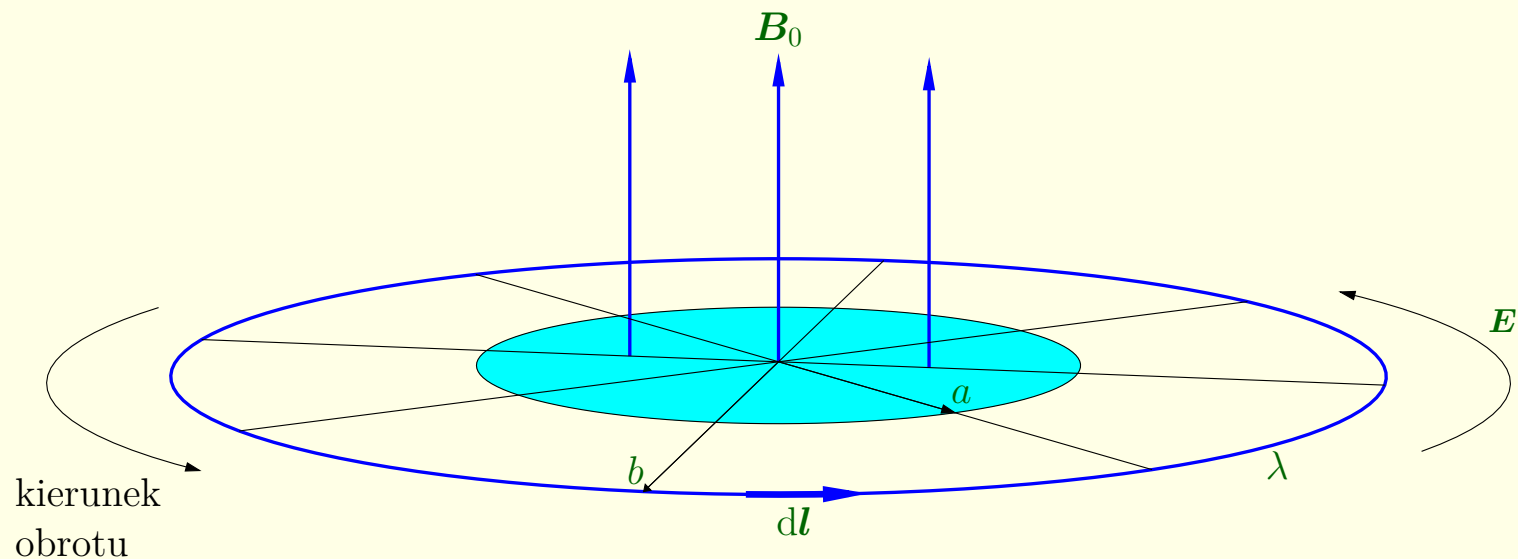
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi s) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[\pi s^2 B(t)] = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi s) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[\pi s^2 B(t)] = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{s}{2} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

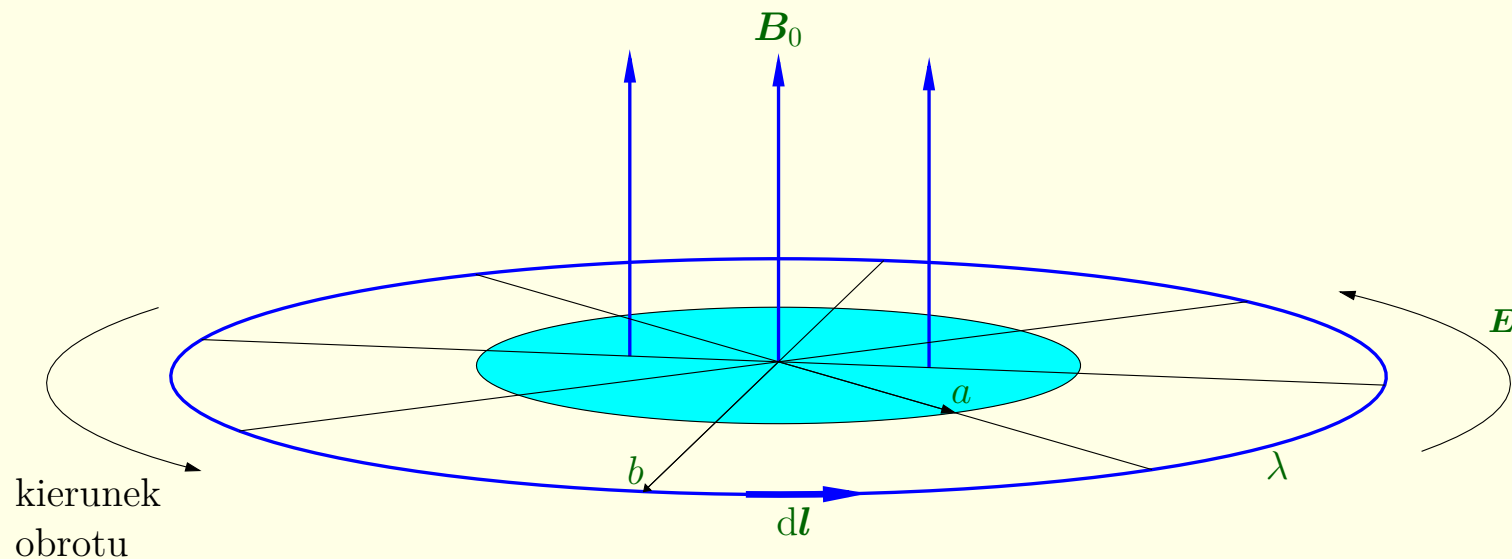
Przykład:

Ładunek o gęstości liniowej λ przyklejony jest do obwodu koła o promieniu b położonego w płaszczyźnie poziomej, które może swobodnie się obracać (szprychy koła wykonane są z izolatora). W obszarze środkowym, ograniczonym promieniem a , indukcja pola magnetycznego B_0 jest skierowana pionowo ku górze. Nagle pole magnetyczne zostaje wyłączone. Co będzie się działo z kołem?



Przykład:

Ładunek o gęstości liniowej λ przyklejony jest do obwodu koła o promieniu b położonego w płaszczyźnie poziomej, które może swobodnie się obracać (szprychy koła wykonane są z izolatora). W obszarze środkowym, ograniczonym promieniem a , indukcja pola magnetycznego B_0 jest skierowana pionowo ku górze. Nagle pole magnetyczne zostaje wyłączone. Co będzie się działo z kołem?



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow b\lambda E dl \quad \text{moment siły działający na } d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow b\lambda E dl \quad \text{moment siły działający na } d\mathbf{l}$$

$$N = b\lambda \oint E dl = -b\lambda\pi a^2 \frac{dB}{dt} \quad \text{całkowity moment siły}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow b\lambda E dl \quad \text{moment siły działający na } d\mathbf{l}$$

$$N = b\lambda \oint E dl = -b\lambda\pi a^2 \frac{dB}{dt} \quad \text{całkowity moment siły}$$

$$\int N dt = -\lambda\pi a^2 b \int_{B_0}^0 dB = \lambda\pi a^2 b B_0 \quad \begin{array}{l} \text{moment pędu jaki} \\ \text{zyskuje koło} \end{array}$$

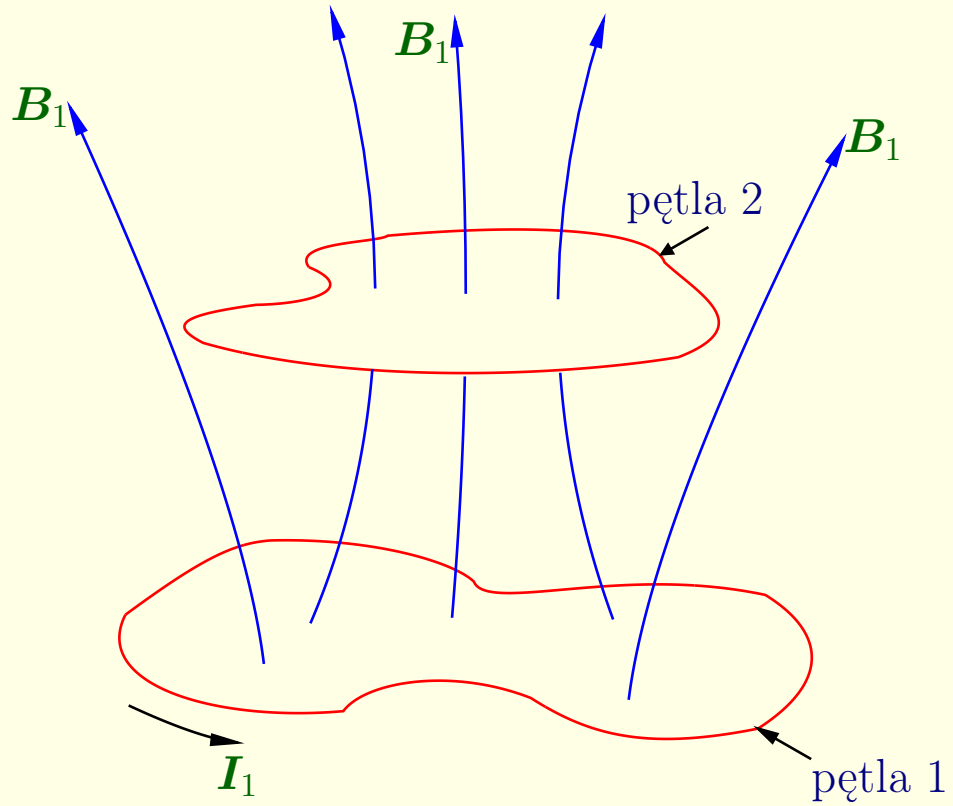
$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow b\lambda E dl$ moment siły działający na $d\mathbf{l}$

$N = b\lambda \oint E dl = -b\lambda\pi a^2 \frac{dB}{dt}$ całkowity moment siły

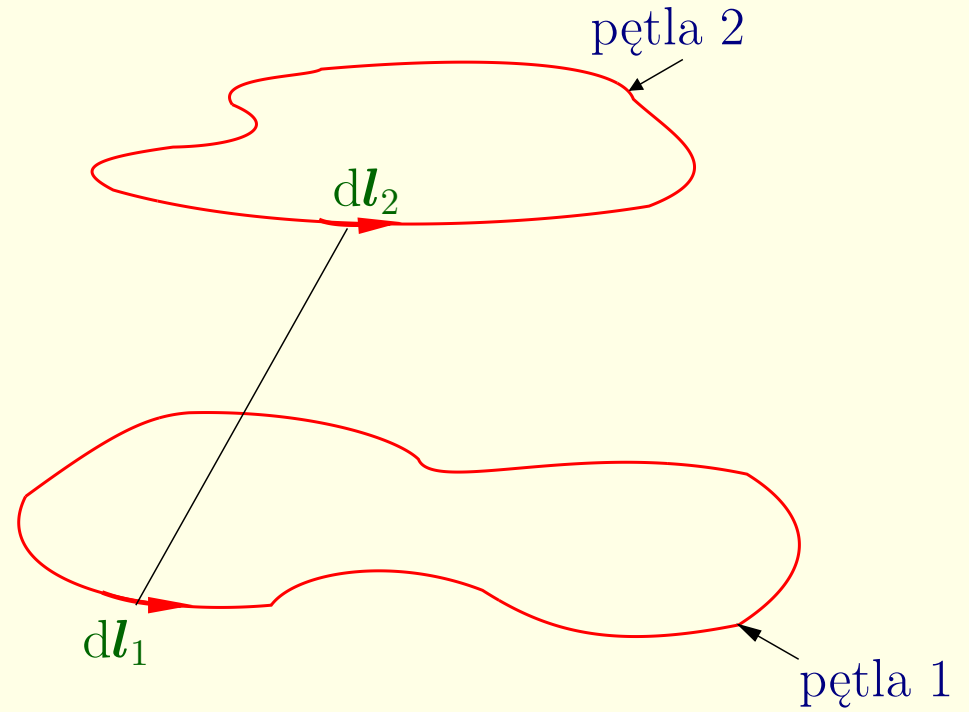
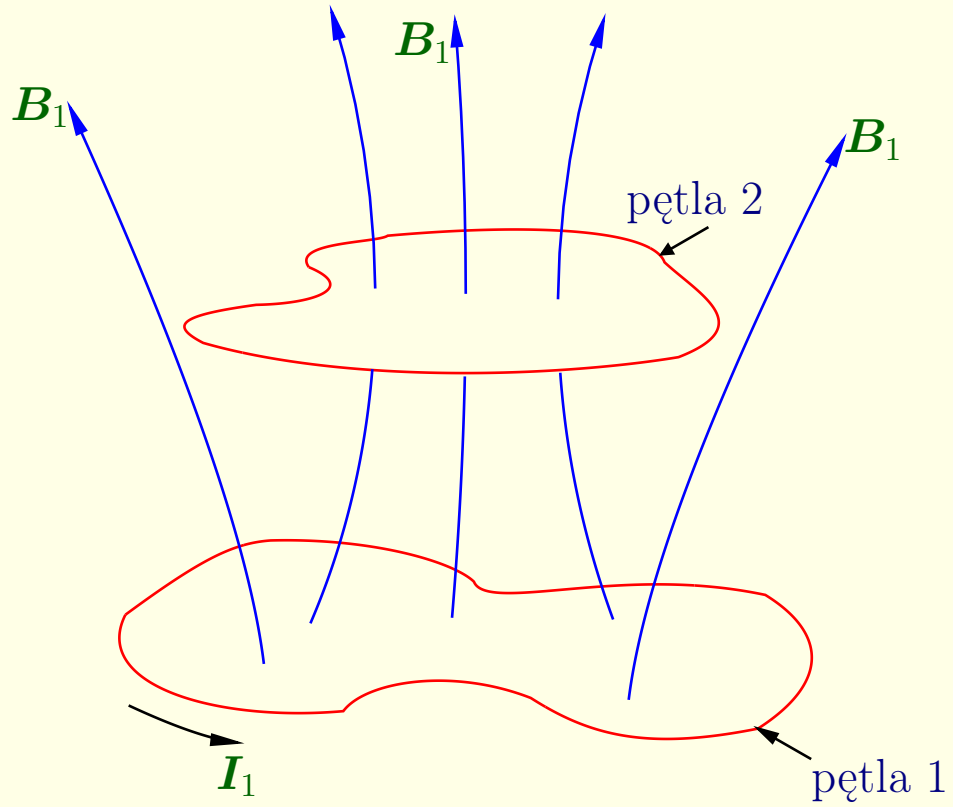
$\int N dt = -\lambda\pi a^2 b \int_{B_0}^0 dB = \lambda\pi a^2 b B_0$ moment pędu jaki zyskuje koło

To pole elektryczne powoduje obrót koła.
Siły magnetyczne nie wykonują pracy.

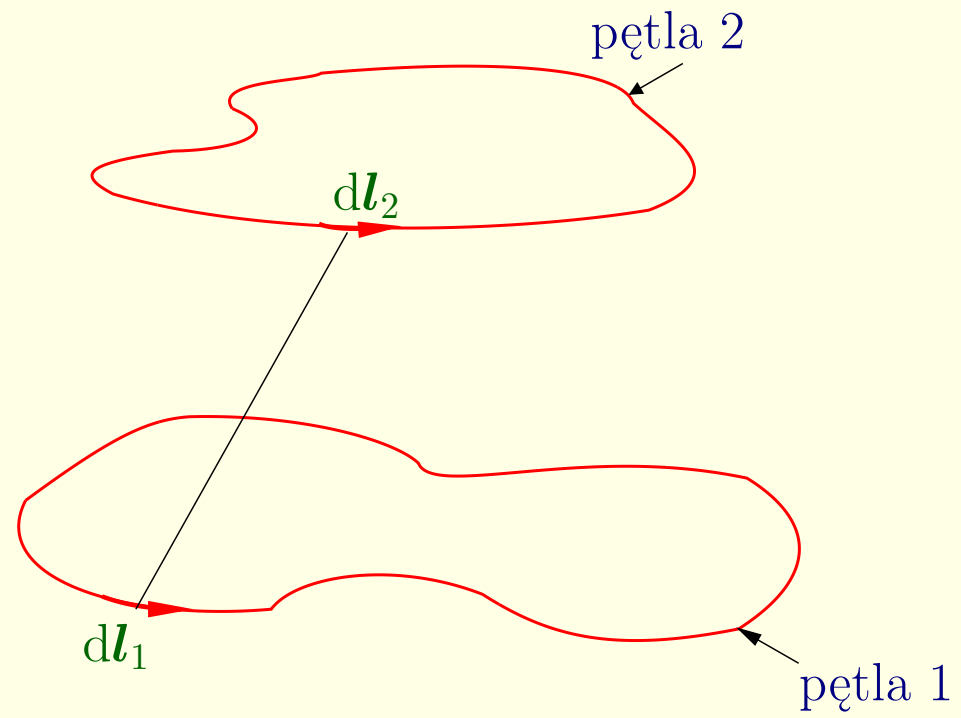
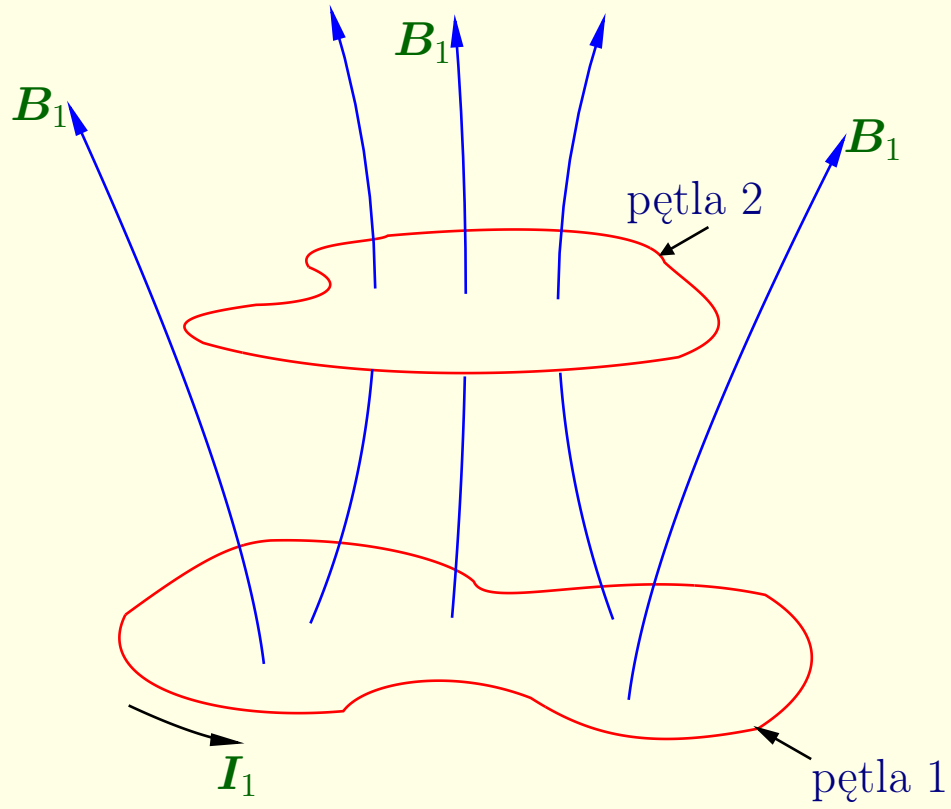
7.2.3 Indukcyjność



7.2.3 Indukcyjność



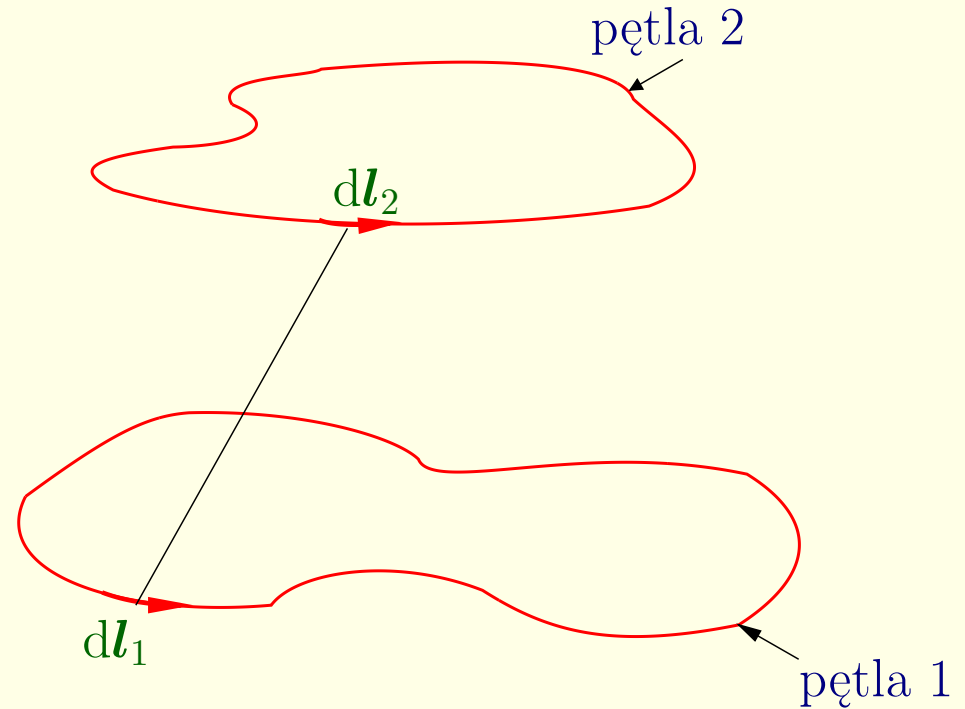
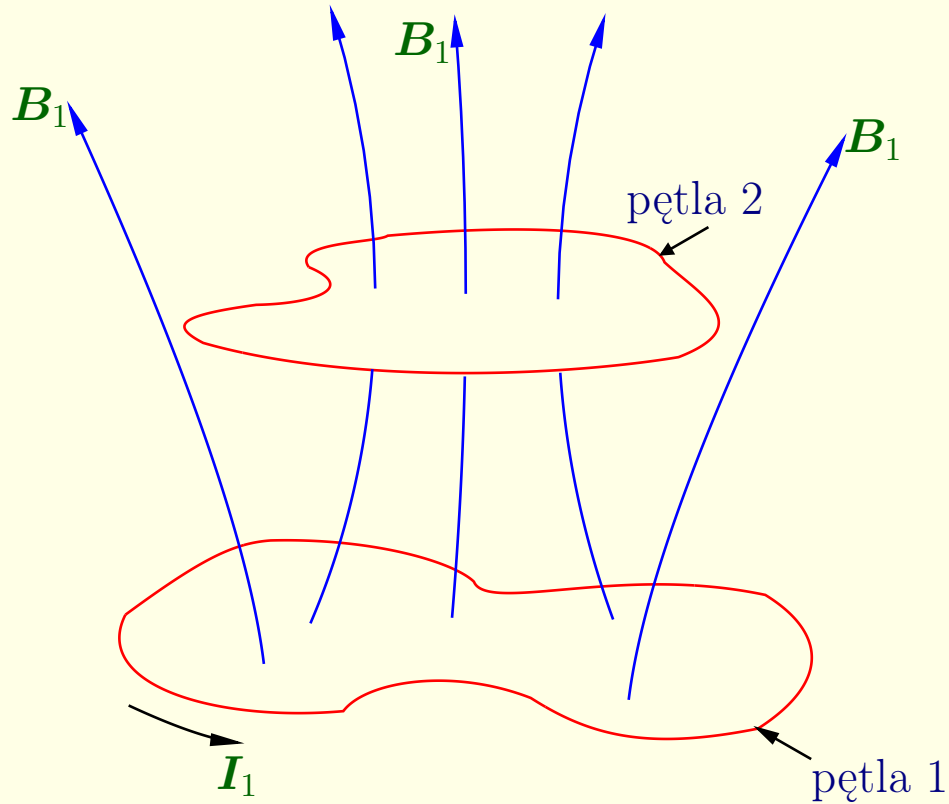
7.2.3 Indukcyjność



$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

indukcja \mathbf{B}_1 wytwarzana przez pętlę 1

7.2.3 Indukcyjność



$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad \text{indukcja } \mathbf{B}_1 \text{ wytwarzana przez pętlę 1}$$

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 \quad \text{strumień przez pętlę 2}$$

$\Phi_2 = M_{21}I_1$, M_{21} — współczynnik indukcyjności wzajemnej

$\Phi_2 = M_{21}I_1$, M_{21} — współczynnik indukcyjności wzajemnej

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

$\Phi_2 = M_{21}I_1$, M_{21} — współczynnik indukcyjności wzajemnej

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}}$$

$\Phi_2 = M_{21}I_1$, M_{21} — współczynnik indukcyjności wzajemnej

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

$\Phi_2 = M_{21}I_1$, M_{21} — współczynnik indukcyjności wzajemnej

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\mathcal{R}} \quad \text{wzór Neumanna}$$

$\Phi_2 = M_{21}I_1$, M_{21} — współczynnik indukcyjności wzajemnej

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\mathcal{R}} \quad \text{wzór Neumanna}$$

$M_{21} = M_{12} = M$ jest wielkością czysto geometryczną

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

zmieniamy natężenie prądu w pętli 1

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{zmieniamy natężenie prądu w pętli 1}$$

Zmiana natężenia prądu w pętli 1 indukuje SEM w pętli 2, pomimo tego, że pomiędzy pętlami nie ma połączenia elektrycznego!

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{zmieniamy natężenie prądu w pętli 1}$$

Zmiana natężenia prądu w pętli 1 indukuje SEM w pętli 2, pomimo tego, że pomiędzy pętlami nie ma połączenia elektrycznego!

Zmiana natężenia prądu indukuje SEM także w tej samej pętli, w której zmienia się natężenie prądu.

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{zmieniamy natężenie prądu w pętli 1}$$

Zmiana natężenia prądu w pętli 1 indukuje SEM w pętli 2, pomimo tego, że pomiędzy pętlami nie ma połączenia elektrycznego!

Zmiana natężenia prądu indukuje SEM także w tej samej pętli, w której zmienia się natężenie prądu.

$$\Phi = LI$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{zmieniamy natężenie prądu w pętli 1}$$

Zmiana natężenia prądu w pętli 1 indukuje SEM w pętli 2, pomimo tego, że pomiędzy pętlami nie ma połączenia elektrycznego!

Zmiana natężenia prądu indukuje SEM także w tej samej pętli, w której zmienia się natężenie prądu.

$$\Phi = LI$$

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}, \quad L \text{ — indukcyjność własna obwodu}$$

7.2.4 Energia pola magnetycznego

Praca wykonana nad jednostkowym ładunkiem przeciwprzeciwstawnej SEM podczas jednego obiegu obwodu jest równa $-\mathcal{E}$

7.2.4 Energia pola magnetycznego

Praca wykonana nad jednostkowym ładunkiem przeciwprzeciwstawnej SEM podczas jednego obiegu obwodu jest równa $-\mathcal{E}$

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{całkowita praca wykonana w} \\ \text{jednostce czasu} \end{array}$$

7.2.4 Energia pola magnetycznego

Praca wykonana nad jednostkowym ładunkiem przeciwprzeciwstawnej SEM podczas jednego obiegu obwodu jest równa $-\mathcal{E}$

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \quad \text{całkowita praca wykonana w jednostce czasu}$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

7.2.4 Energia pola magnetycznego

Praca wykonana nad jednostkowym ładunkiem przeciwprzeciwstawnej SEM podczas jednego obiegu obwodu jest równa $-\mathcal{E}$

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{całkowita praca wykonana w} \\ \text{jednostce czasu} \end{array}$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

7.2.4 Energia pola magnetycznego

Praca wykonana nad jednostkowym ładunkiem przeciwprzeciwstawnej SEM podczas jednego obiegu obwodu jest równa $-\mathcal{E}$

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \quad \text{całkowita praca wykonana w jednostce czasu}$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$LI = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau$$

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right]$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right]$$
$$= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{\mathcal{V}} B^2 d\tau - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right]$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right]$$
$$= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{\mathcal{V}} B^2 d\tau - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right]$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} B^2 d\tau$$

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right] \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{\mathcal{V}} B^2 d\tau - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right]
 \end{aligned}$$

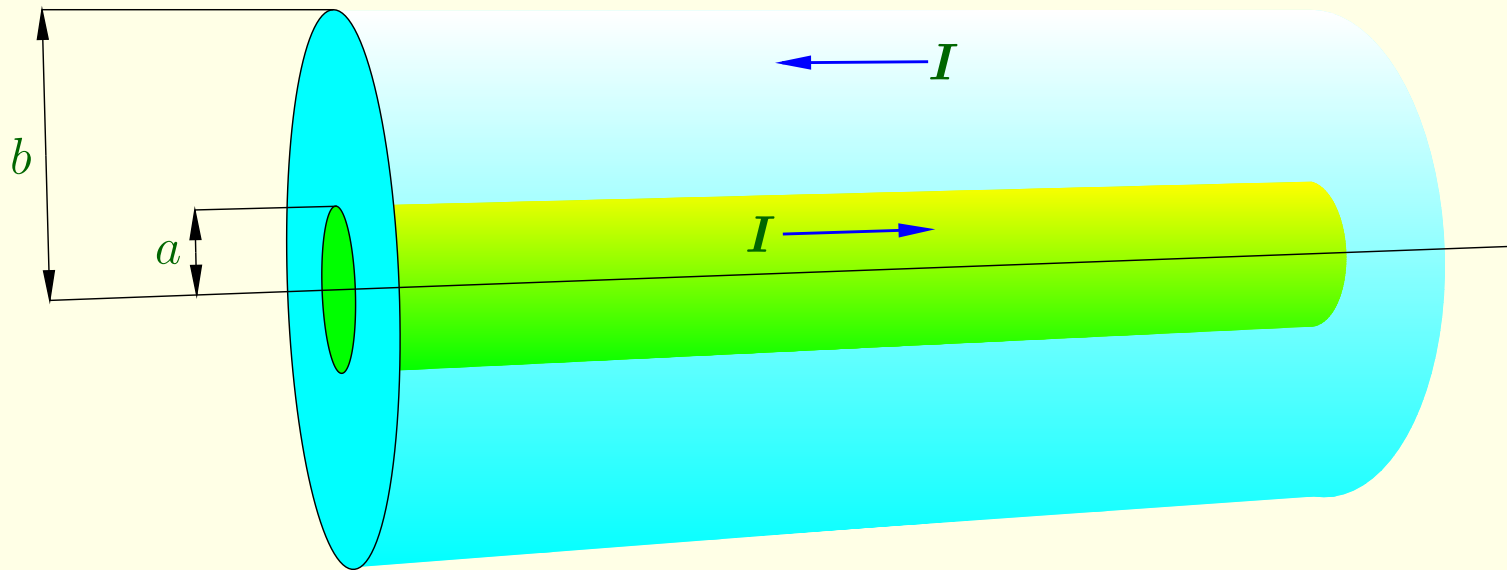
$ W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} B^2 d\tau $
--

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

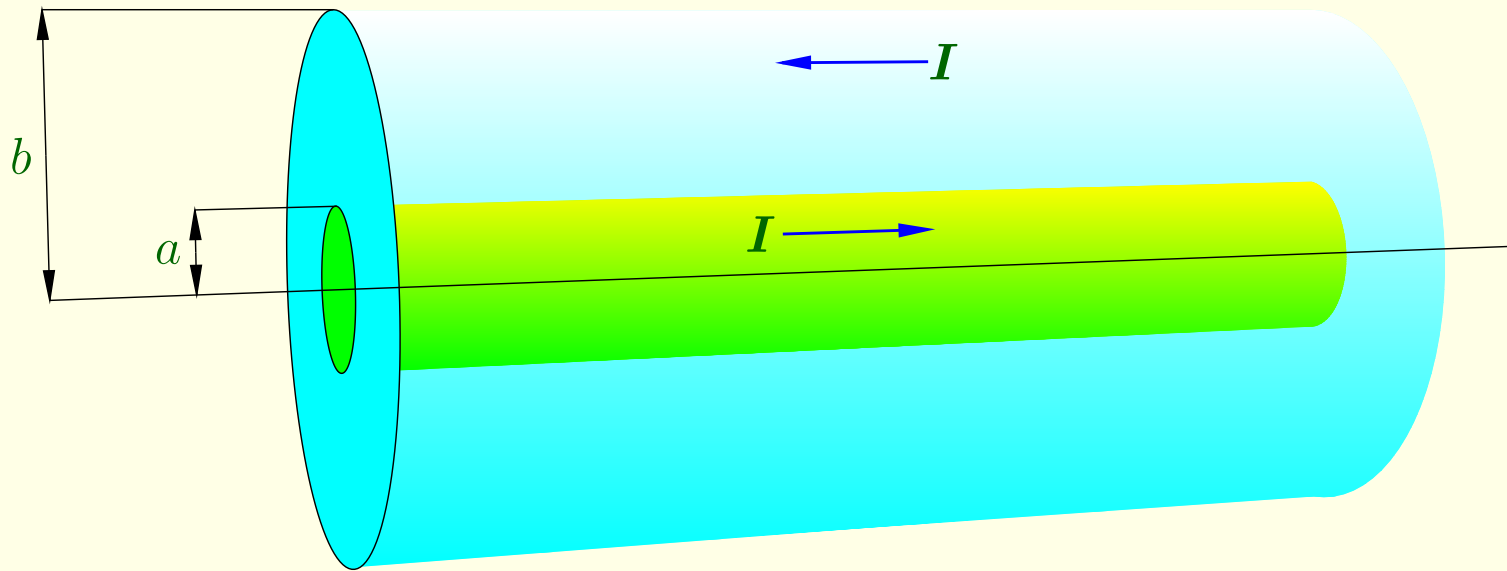
Przykład:

Przez długi kabel koncentryczny płynie prąd o natężeniu I (prąd płynie w prawo po powierzchni wewnętrznego walca o promieniu a i wraca po powierzchni zewnętrznego walca o promieniu b). Znaleźć energię pola magnetycznego zmagazynowaną na odcinku kabla o długości l .



Przykład:

Przez długi kabel koncentryczny płynie prąd o natężeniu I (prąd płynie w prawo po powierzchni wewnętrznego walca o promieniu a i wraca po powierzchni zewnętrznego walca o promieniu b). Znaleźć energię pola magnetycznego zmagazynowaną na odcinku kabla o długości l .



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad \text{w obszarze pomiędzy walcami}$$

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

gęstość energii

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \quad \text{gęstość energii}$$

$$\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \right) 2\pi l s ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{ds}{s} \right) \quad \begin{array}{l} \text{energia w powłoce o promieniu} \\ s \text{ i grubości } ds \end{array}$$

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \quad \text{gęstość energii}$$

$$\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \right) 2\pi l s ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{ds}{s} \right) \quad \begin{array}{l} \text{energia w powłoce o promieniu} \\ s \text{ i grubości } ds \end{array}$$

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \quad \text{gęstość energii}$$

$$\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \right) 2\pi l s ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{ds}{s} \right) \quad \begin{array}{l} \text{energia w powłoce o promieniu} \\ s \text{ i grubości } ds \end{array}$$

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

7.3 Równania Maxwella

7.3.1 Elektrodynamika przed Maxwellem

(i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (prawo Gaussa)

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)

(iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ (prawo Ampère'a)

7.3 Równania Maxwella

7.3.1 Elektrodynamika przed Maxwellem

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{prawo Gaussa})$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{bez nazwy})$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{prawo Faradaya})$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{prawo Ampère'a})$$

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}_{=0} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} \quad \text{OK}$$

7.3 Równania Maxwella

7.3.1 Elektrodynamika przed Maxwellem

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{prawo Gaussa})$$

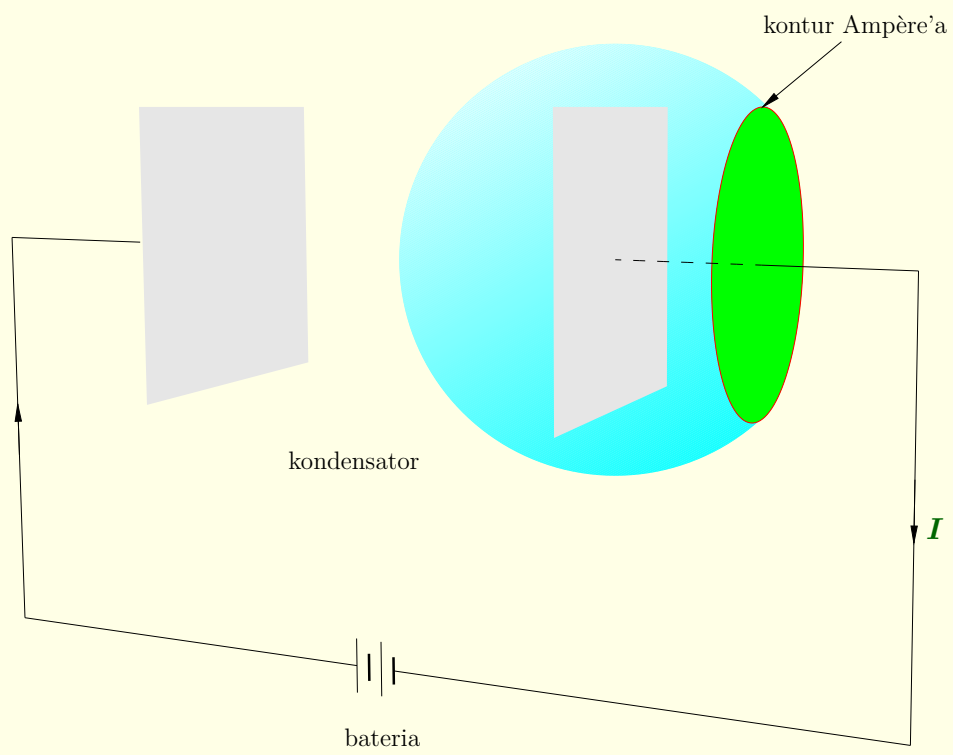
$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{bez nazwy})$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{prawo Faradaya})$$

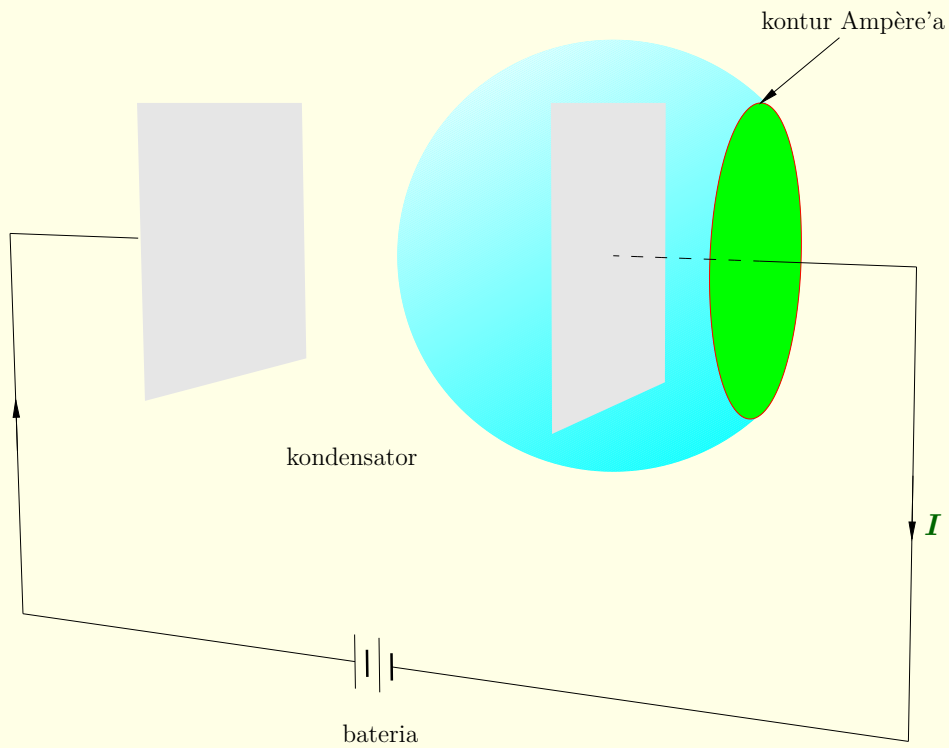
$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{prawo Ampère'a})$$

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}_{=0} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} \quad \text{OK}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{=0} = \mu_0 \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{J})}_{\neq 0} \quad \text{problem!}$$

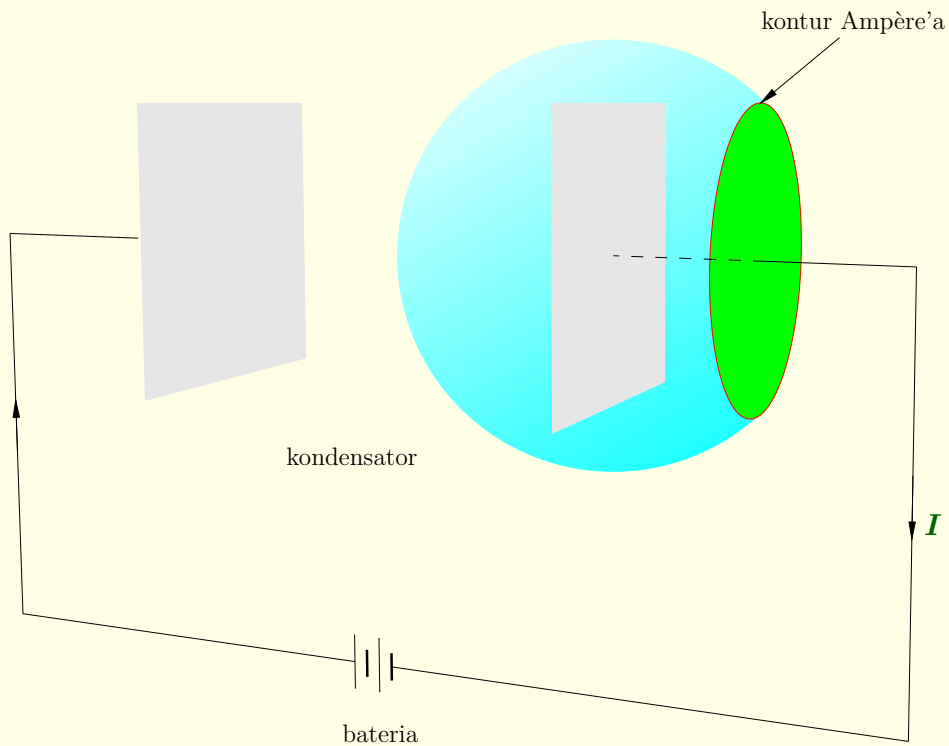


ładowanie kondensatora



ładowanie kondensatora

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c \left\{ \begin{array}{l} \text{dla zielonej powierzchni } I_c = I \\ \text{dla niebieskiej powierzchni } I_c = 0 \end{array} \right.$$



ładowanie kondensatora

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c \left\{ \begin{array}{l} \text{dla zielonej powierzchni } I_c = I \\ \text{dla niebieskiej powierzchni } I_c = 0 \end{array} \right.$$

Prawo Ampère'a załamuje się w przypadku gdy prądy nie są stałe.

7.3.2 Jak Maxwell poprawił prawo Ampère'a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

7.3.2 Jak Maxwell poprawił prawo Ampère'a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

7.3.2 Jak Maxwell poprawił prawo Ampère'a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Zmiana pola elektrycznego indukuje pole magnetyczne.

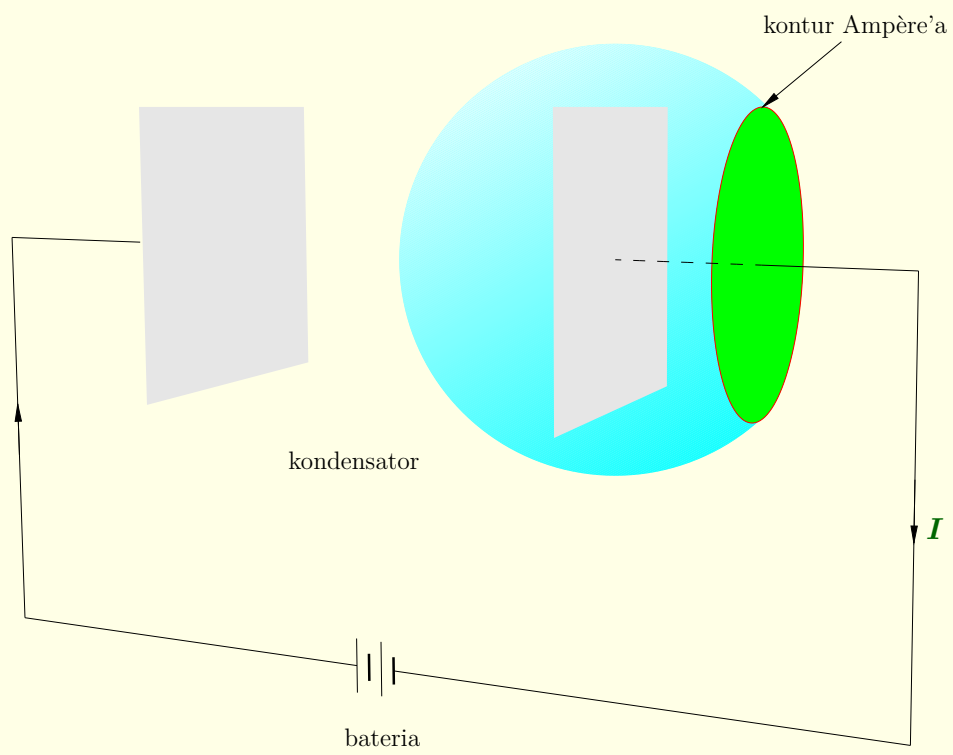
7.3.2 Jak Maxwell poprawił prawo Ampère'a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

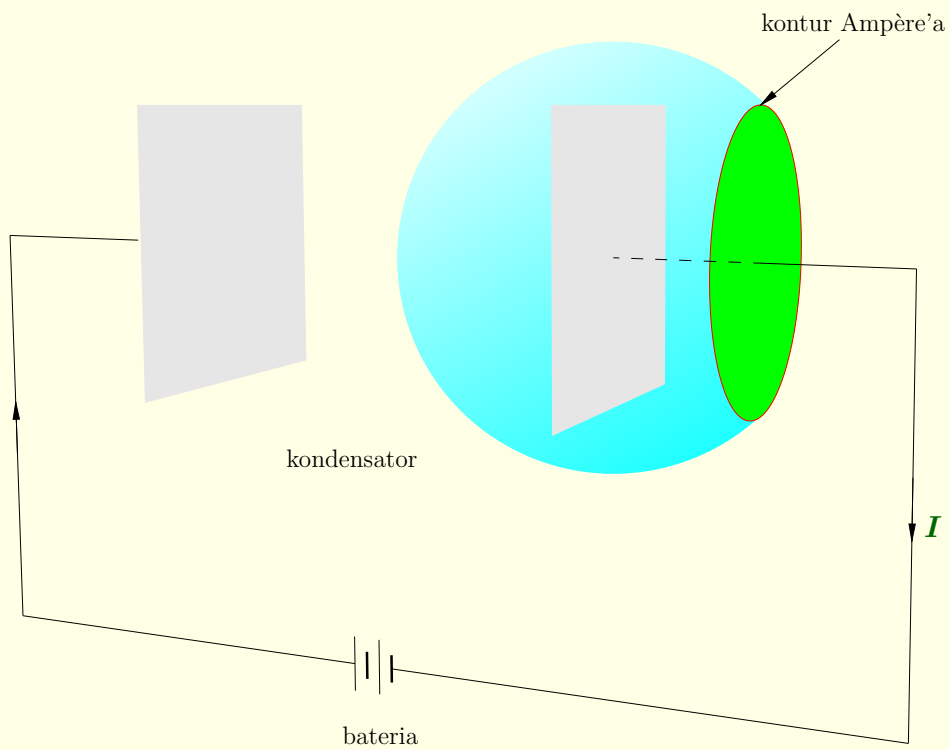
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Zmiana pola elektrycznego indukuje pole magnetyczne.

$$\mathbf{J}_p \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{gęstość prądu przesunięcia}$$



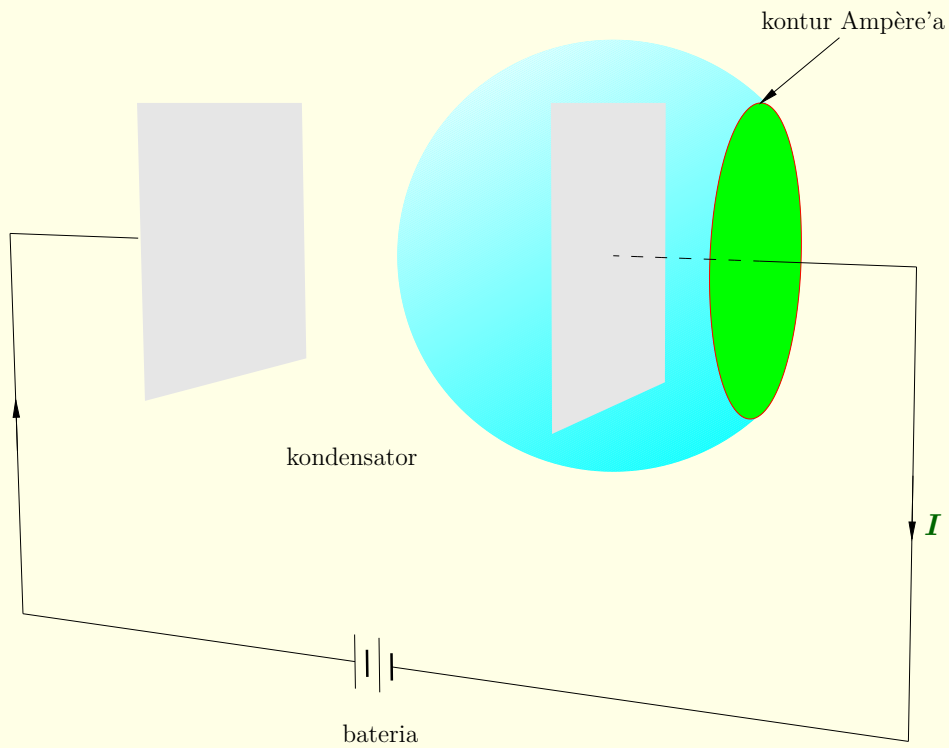
ładowanie kondensatora



ładowanie kondensatora

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

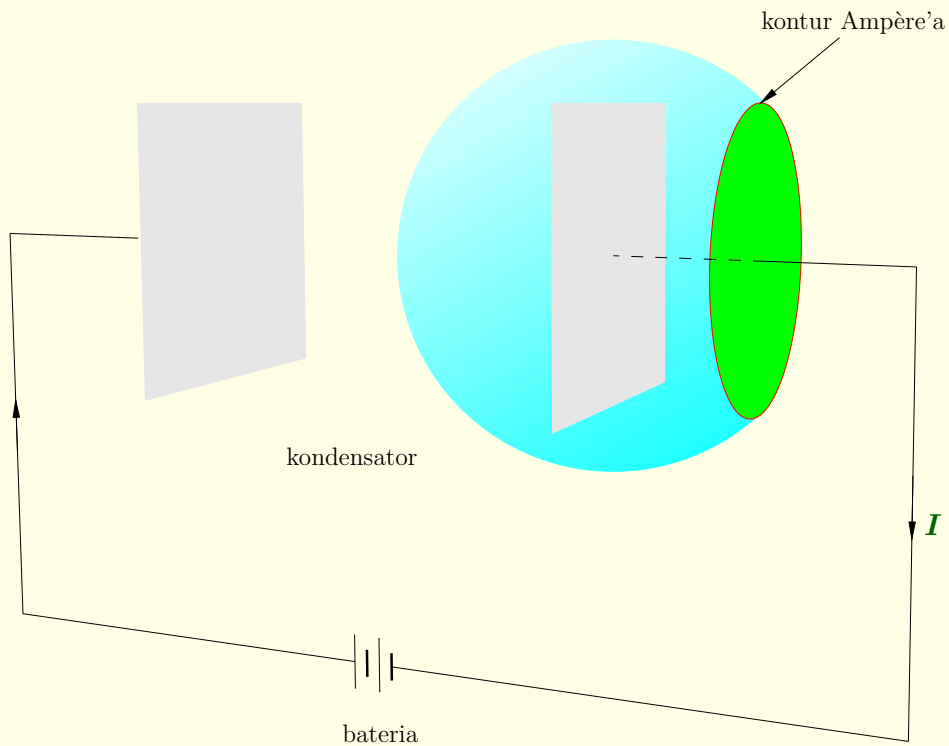
natężenie pola pomiędzy okładkami kondensatora



ładowanie kondensatora

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \quad \begin{array}{l} \text{natężenie pola pomiędzy okładkami} \\ \text{kondensatora} \end{array}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} I$$



ładowanie kondensatora

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \quad \begin{array}{l} \text{natężenie pola pomiędzy okładkami} \\ \text{kondensatora} \end{array}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} I$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I \quad \begin{array}{l} \text{dla obu} \\ \text{powierzchni} \end{array}$$

7.3.3 Równania Maxwella

(i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (prawo Gaussa)

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)

(iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

7.3.3 Równania Maxwella

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (prawo Gaussa)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{siła Lorentza}$$

7.3.3 Równania Maxwella

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (prawo Gaussa)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{siła Lorentza}$$

Równania Maxwella wraz z równaniem na siłę Lorentza oraz odpowiednimi warunkami brzegowymi opisują całą klasyczną elektrodynamikę.

Równania Maxwella

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (prawo Gaussa)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ (prawo Faradaya)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

Równania Maxwella

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ (prawo Gaussa)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ (prawo Faradaya)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

Bardziej logiczny zapis równań Maxwella: źródła pól ρ i \mathbf{J} znajdują się po prawej stronie, a wytwarzane pola po lewej stronie równań.

7.3.4 Równania Maxwella w materii

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{\u0142adunki zwi\u0105zane}$$

7.3.4 Równania Maxwella w materii

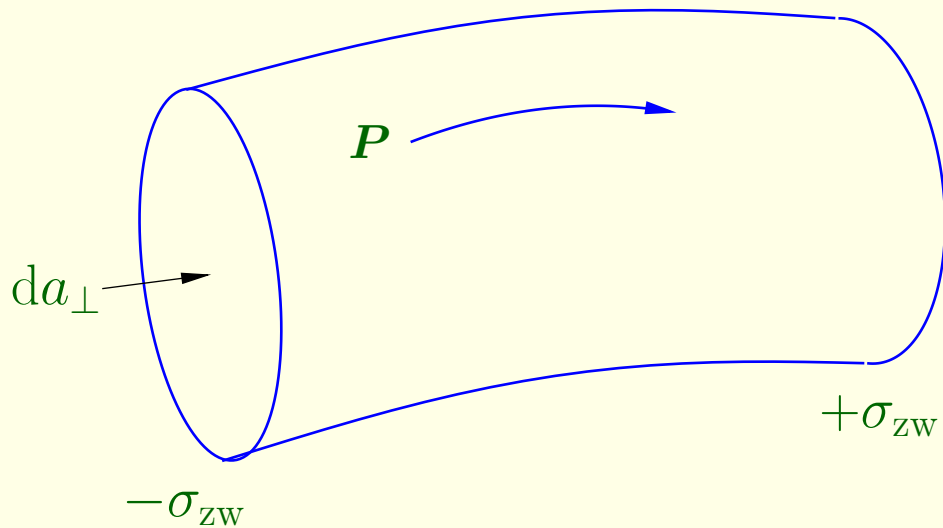
$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{\textit{ładunki związane}}$$

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{\textit{prądy związane}}$$

7.3.4 Równania Maxwella w materii

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{\textit{ładunki związane}}$$

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{\textit{prądy związane}}$$

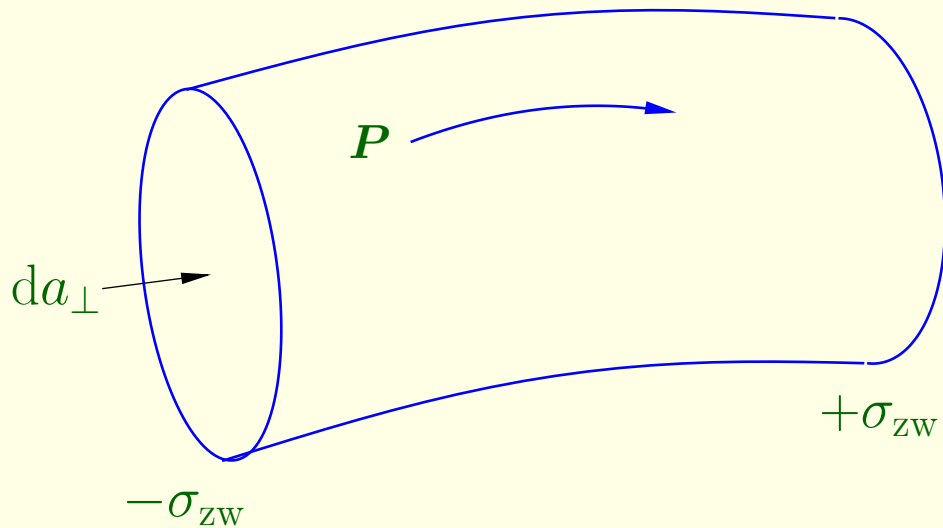


przypadek niestacjonarny:
zmiana polaryzacji elektrycznej

7.3.4 Równania Maxwella w materii

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{\textit{\textbf{ładunki związane}}}$$

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{\textit{\textbf{prądy związane}}}$$



przypadek niestacjonarny:
zmiana polaryzacji elektrycznej

$$dI = \frac{\partial \sigma_{zw}}{\partial t} da_{\perp} = \frac{\partial P}{\partial t} da_{\perp}$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

gęstość prądu polaryzacji

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{gęstość prądu polaryzacji}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_{zw}}{\partial t} \quad \text{równanie ciągłości}$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{gęstość prądu polaryzacji}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_{zw}}{\partial t} \quad \text{równanie ciągłości}$$

$$\rho = \rho_{sw} + \rho_{zw} = \rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{gęstość prądu polaryzacji}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_{zw}}{\partial t} \quad \text{równanie ciągłości}$$

$$\rho = \rho_{sw} + \rho_{zw} = \rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{gęstość prądu polaryzacji}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_{zw}}{\partial t} \quad \text{równanie ciągłości}$$

$$\rho = \rho_{sw} + \rho_{zw} = \rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{gęstość prądu polaryzacji}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_{zw}}{\partial t} \quad \text{równanie ciągłości}$$

$$\rho = \rho_{sw} + \rho_{zw} = \rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{sw}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{sw}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{sw}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

Równania Maxwella w materii

(i) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}}$ (prawo Gaussa)

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)

(iv) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

Równania Maxwella w materii

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}}$ (prawo Gaussa)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

Równania materiałowe (ośrodki liniowe)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

Równania Maxwella w materii

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}}$ (prawo Gaussa)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (bez nazwy)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (prawo Ampère'a z poprawką Maxwella)

Równania materiałowe (ośrodki liniowe)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

$$\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e), \quad \mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$$

$$\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e), \quad \mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{prąd przesunięcia}$$

7.3.5 Warunki brzegowe

Równania Maxwella w postaci całkowej

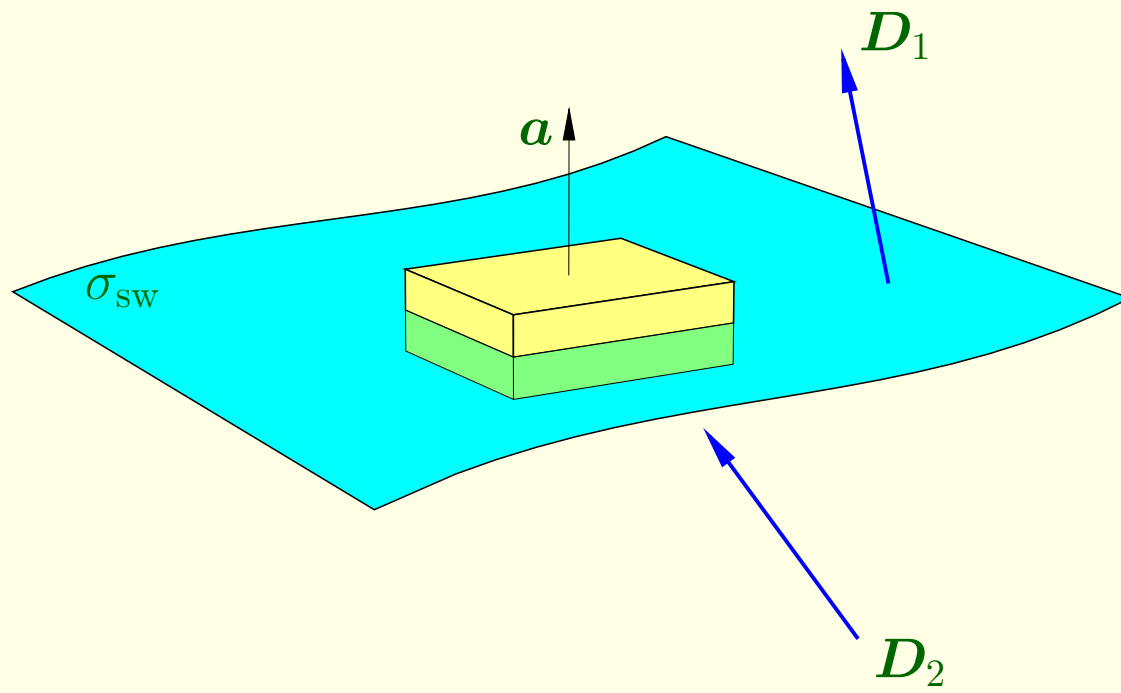
$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{sw}} \\ \text{(ii)} \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{po dowolnej zamkniętej} \\ \text{powierzchni } \mathcal{S} \end{array}$$

7.3.5 Warunki brzegowe

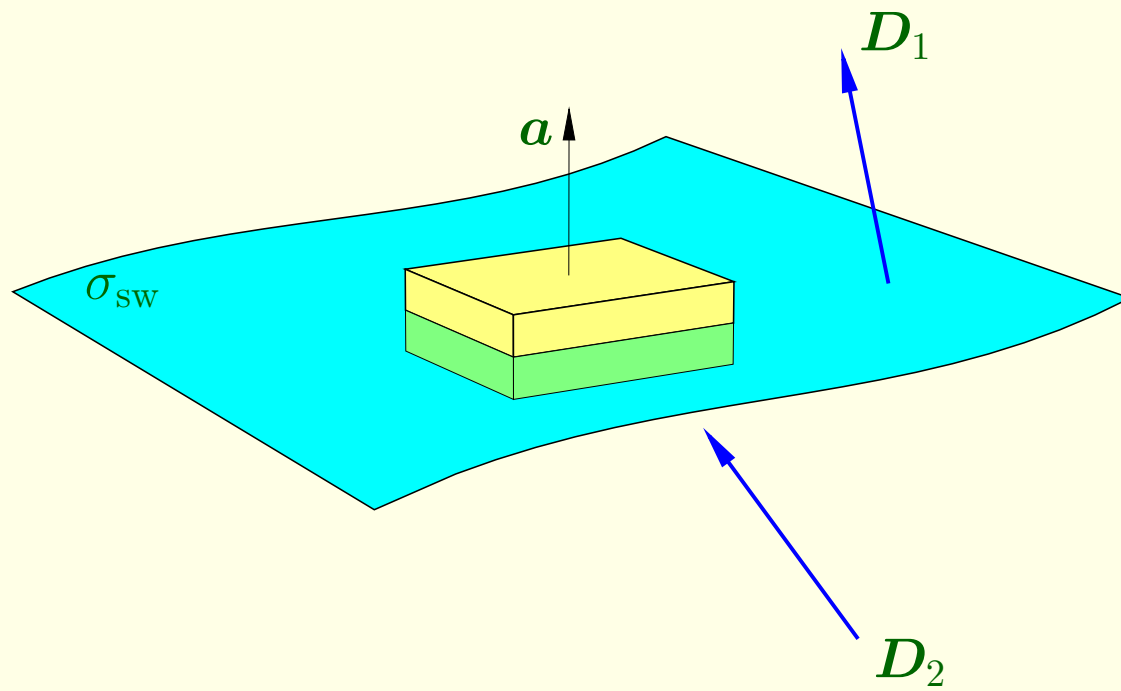
Równania Maxwella w postaci całkowej

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{sw}} \\ \text{(ii)} \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{po dowolnej zamkniętej} \\ \text{powierzchni } \mathcal{S} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(iii)} \quad \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \text{(iv)} \quad \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{swc}} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{po dowolnej powierzchni} \\ \mathcal{S}, \text{ której brzegiem jest} \\ \text{zamknięta krzywa } \mathcal{P} \end{array}$$

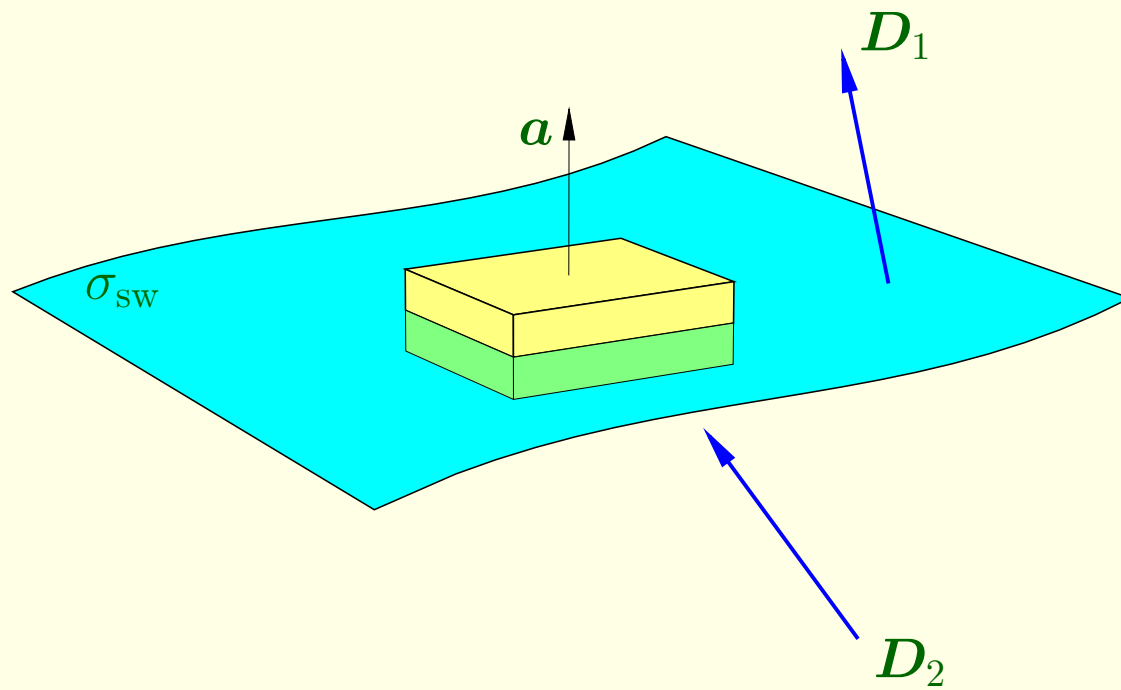


$$D_1 \cdot a - D_2 \cdot a = \sigma_{sw} a$$



$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{a} = \sigma_{sw} a$$

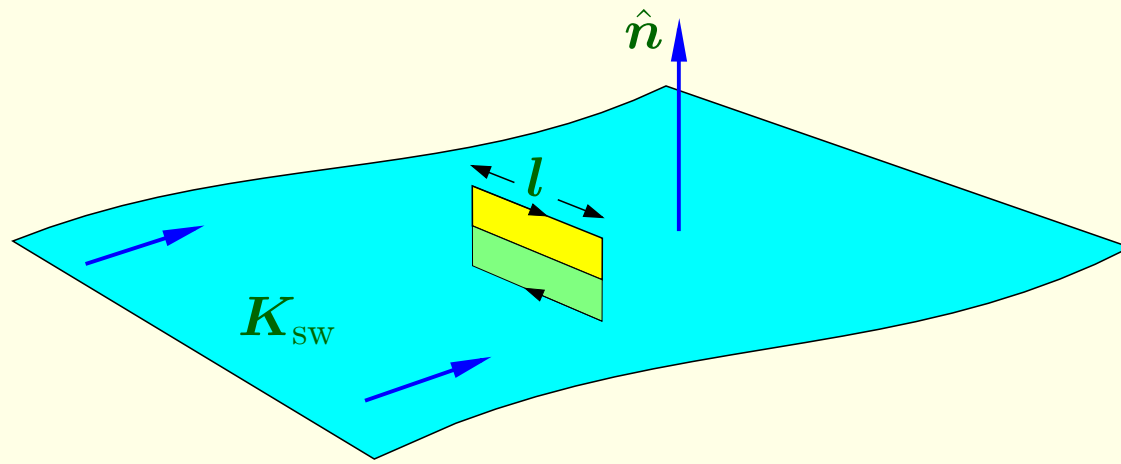
$$\boxed{D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{sw}}$$



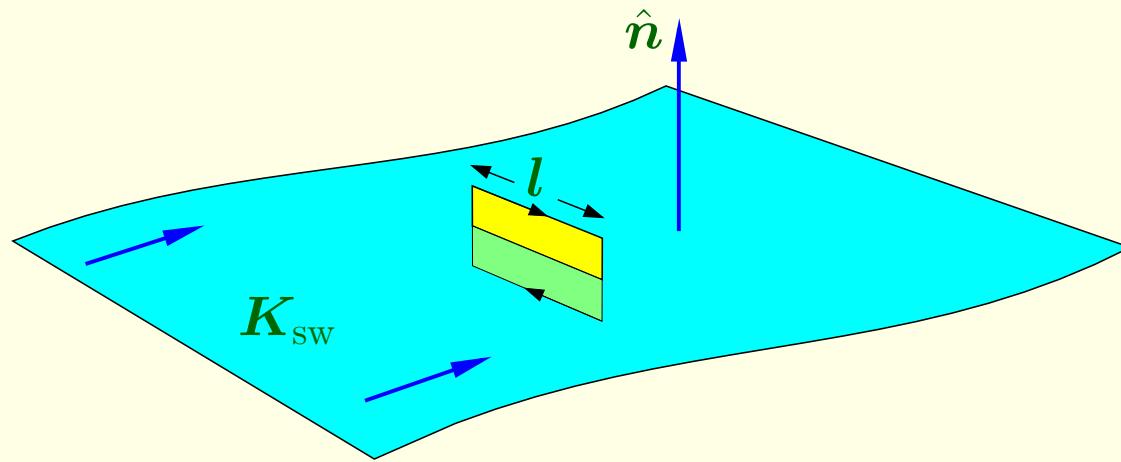
$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{a} = \sigma_{sw} a$$

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{sw}$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

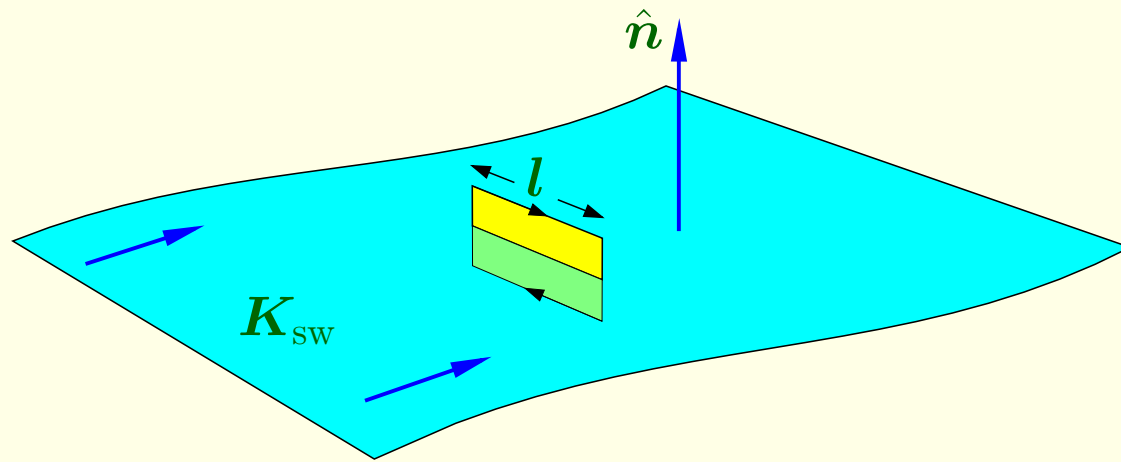


$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$



$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

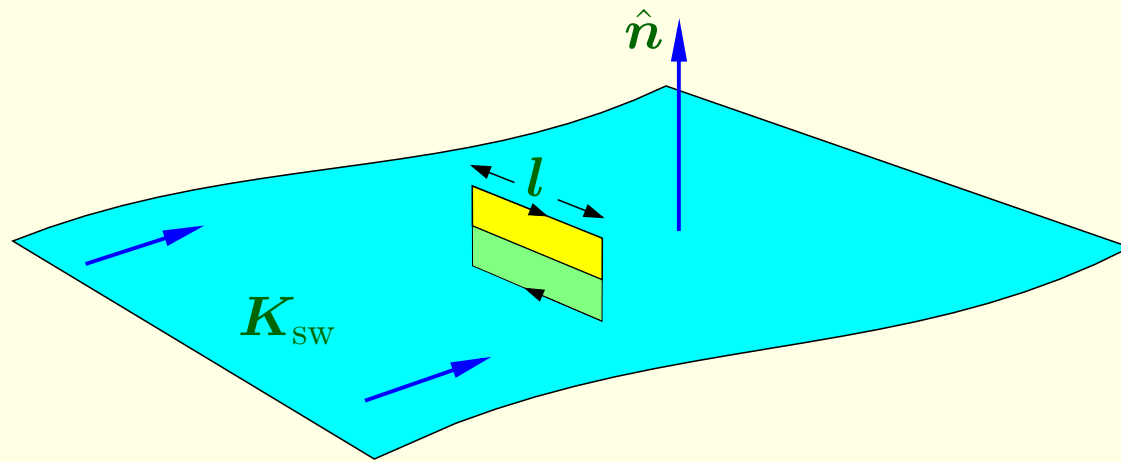
$$\boxed{\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0}$$



$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0}$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{swc}$$



$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{\text{sw}c}$$

$$I_{\text{sw}c} = \mathbf{K}_{\text{SW}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{l}) = (\mathbf{K}_{\text{SW}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{l}$$

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

Ośrodki liniowe

- (i) $\epsilon_1 \mathbf{E}_1^{\perp} - \epsilon_2 \mathbf{E}_2^{\perp} = \sigma_{\text{sw}}$
- (ii) $\mathbf{B}_1^{\perp} - \mathbf{B}_2^{\perp} = 0$
- (iii) $\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0$
- (iv) $\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \hat{\mathbf{n}}$