

# Elektrodynamika

Część 4

Magnetostatyka

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

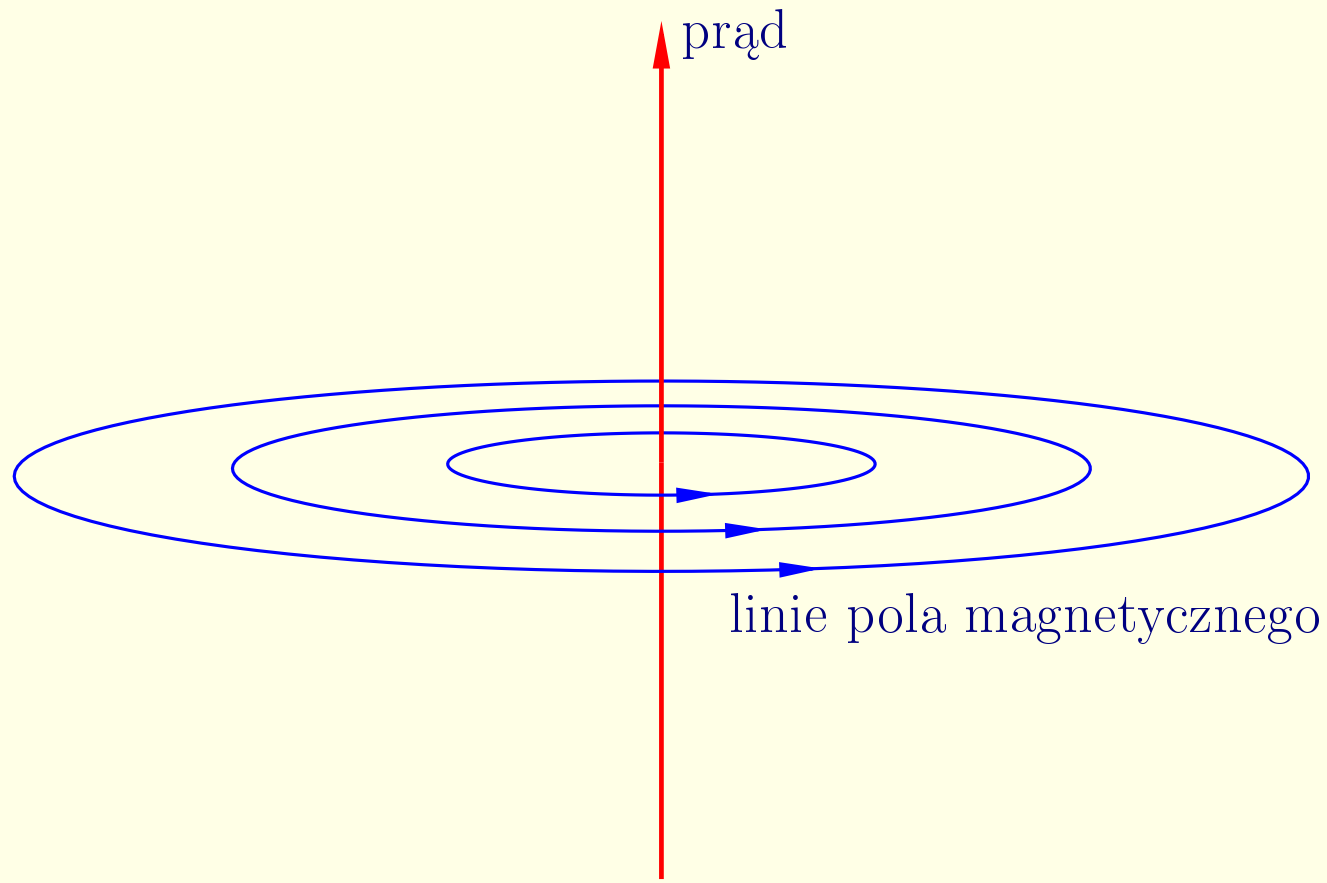
# Spis treści

<b>5</b>	<b>Magnetostatyka</b>	<b>3</b>
5.1	Siła Lorentza . . . . .	3
5.2	Prawo Biota-Savarta . . . . .	14
5.3	Dywergencja i rotacja $B$ . . . . .	23
5.4	Magnetyczny potencjał wektorowy . . . . .	34

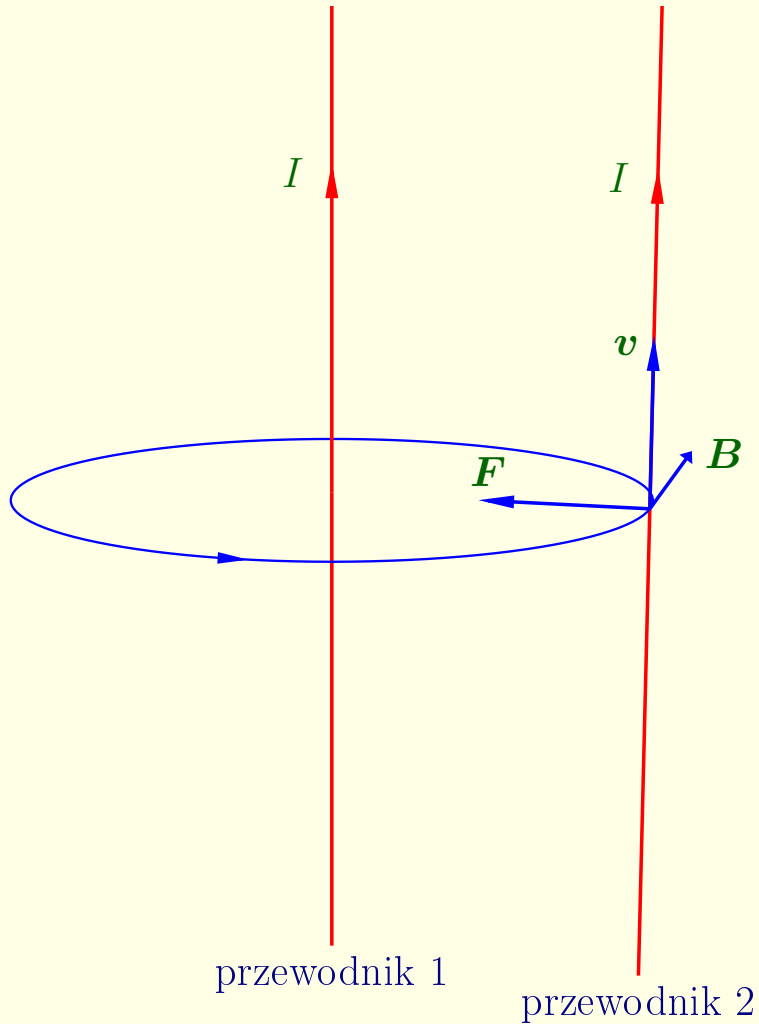
# 5 Magnetostatyka

## 5.1 Siła Lorentza

### 5.1.1 Pole magnetyczne



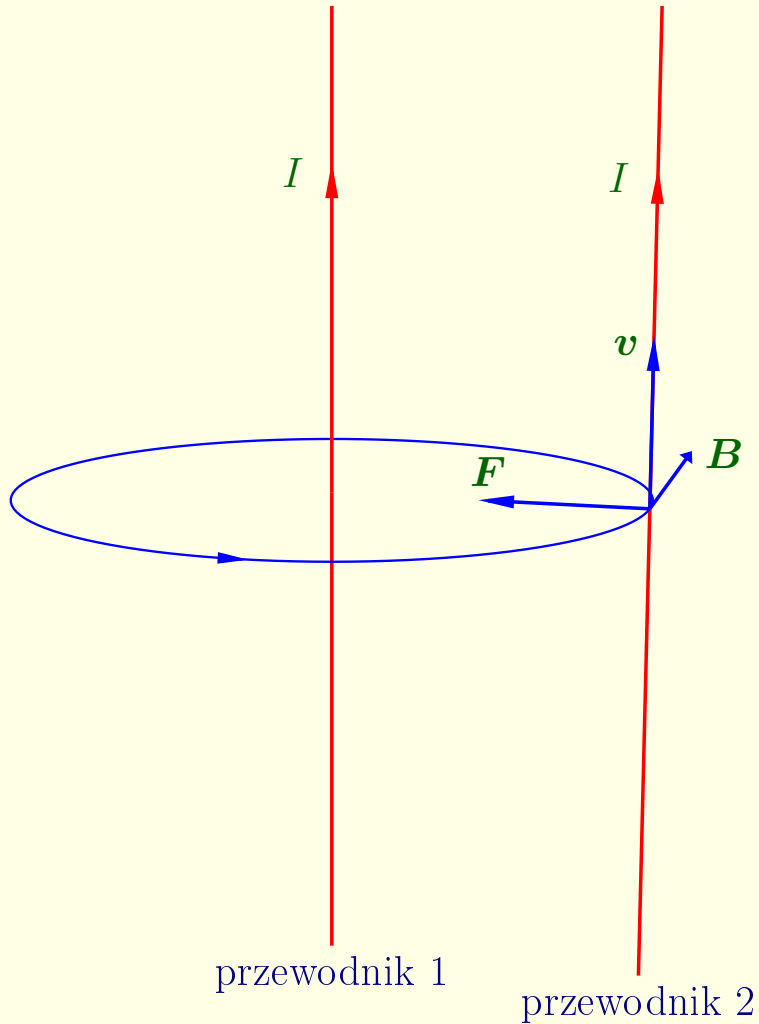
## 5.1.2 Siły magnetyczne



$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

siła Lorentza

## 5.1.2 Siły magnetyczne



$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

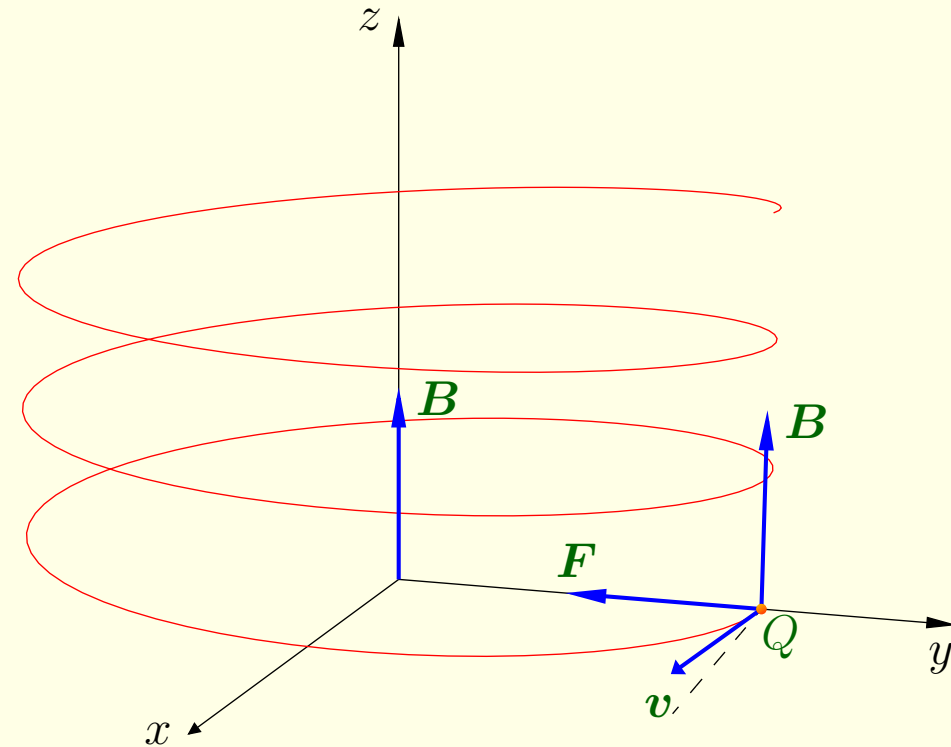
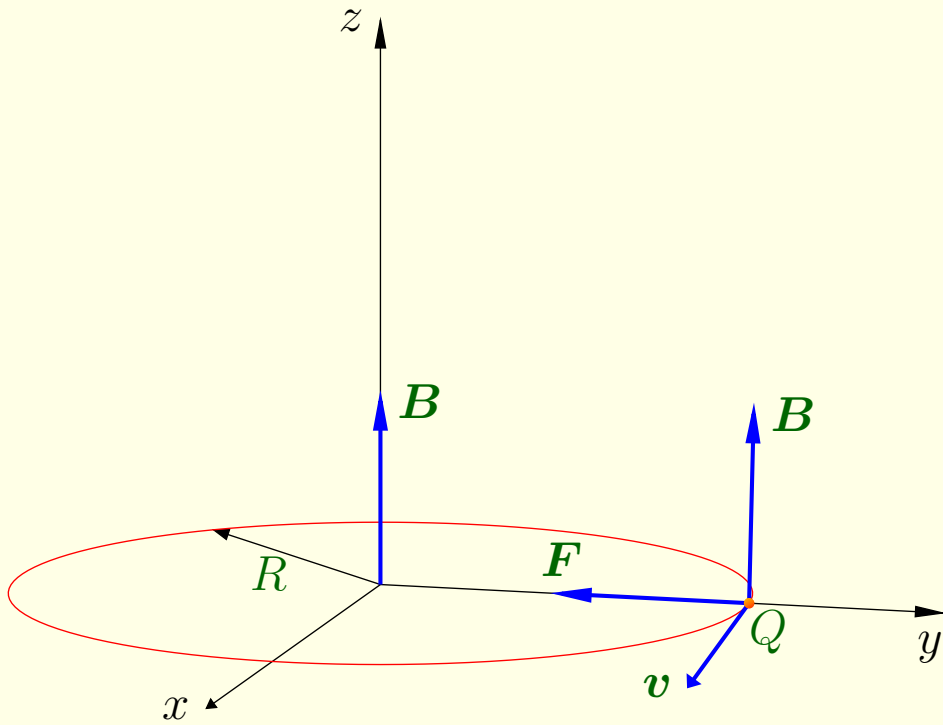
siła Lorentza

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})],$$

siła w obecności obydwu pól

Przykład:

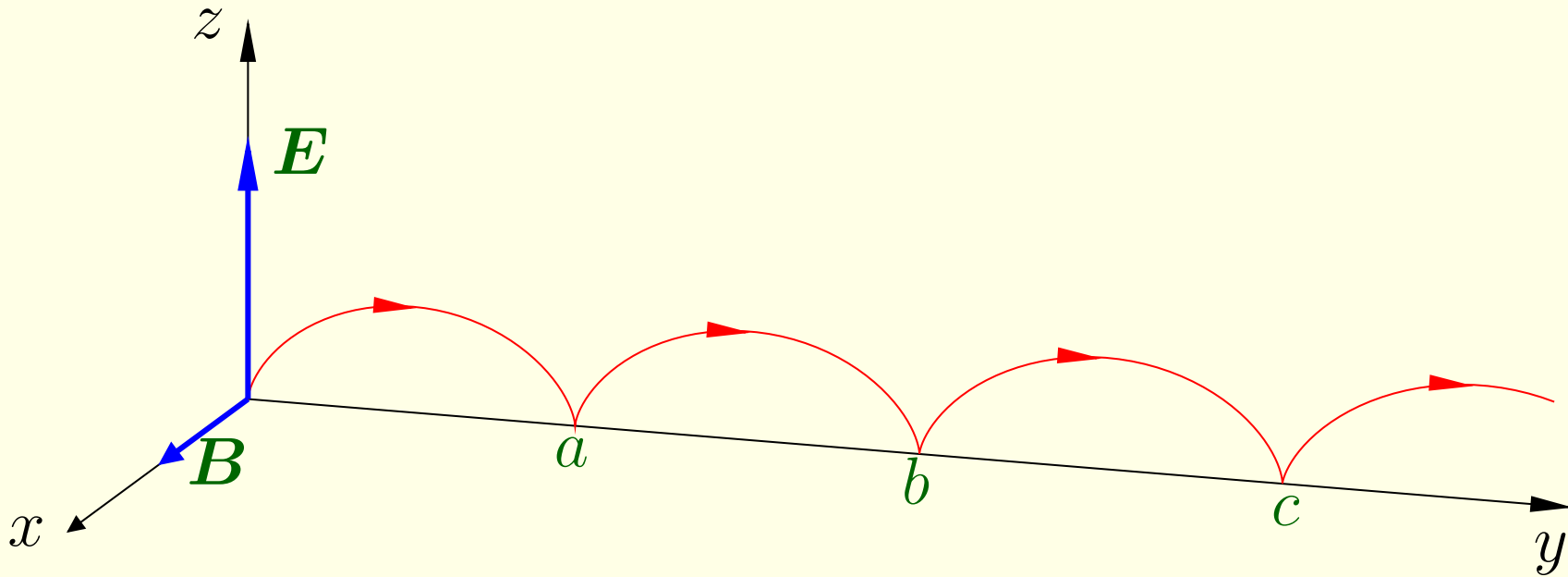
**Ruch cyklotronowy.** W stałym polu magnetycznym  $B$  ładunek  $Q$  porusza się po okręgu o promieniu  $R$  lub po spirali



$$QvB = m\frac{v^2}{R}, \quad p = QBR \quad \text{wzór cyklotronowy}$$

Przykład:

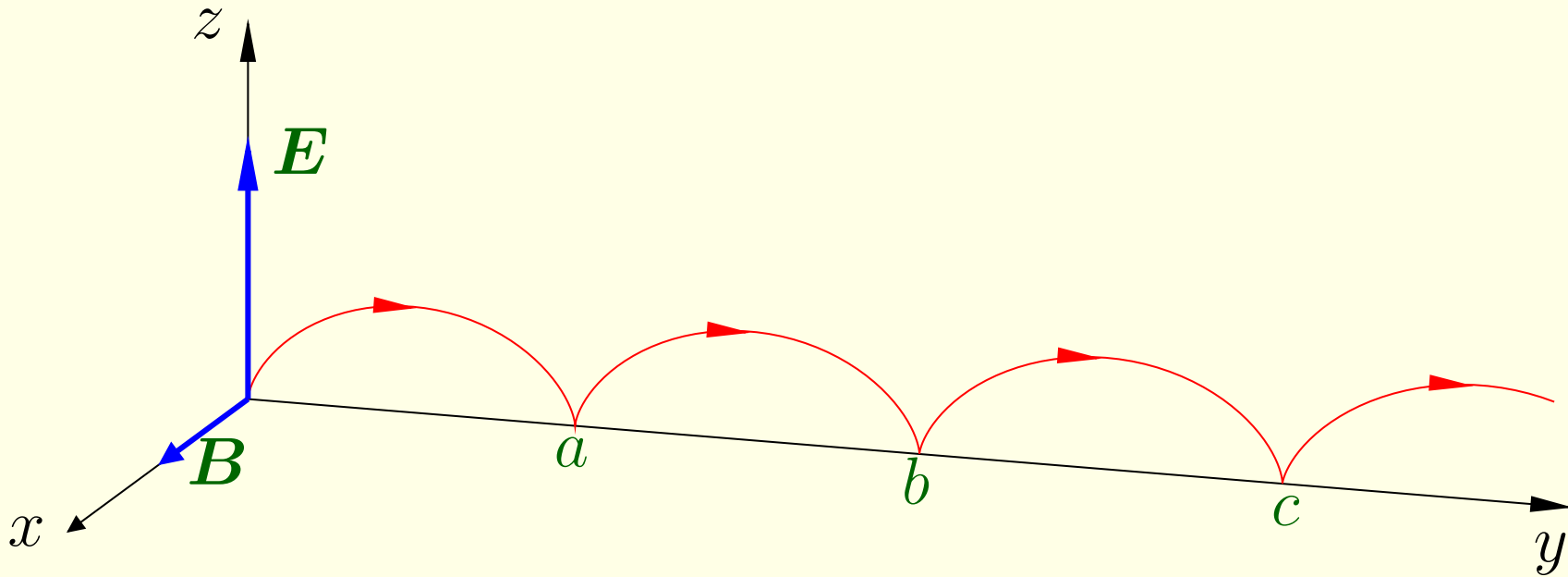
Ruch po cykloidzie. Obok stałego pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  działa prostopadłe do  $\mathbf{B}$  pole elektryczne  $\mathbf{E}$ .



$(0, y(t), z(t))$  wektor położenia

Przykład:

Ruch po cykloidzie. Obok stałego pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  działa prostopadłe do  $\mathbf{B}$  pole elektryczne  $\mathbf{E}$ .



$(0, y(t), z(t))$  wektor położenia

$\mathbf{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$  wektor prędkości



$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{\mathbf{y}} - B\dot{y}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(E\hat{\mathbf{z}} + B\dot{z}\hat{\mathbf{y}} - B\dot{y}\hat{\mathbf{z}}) = m\mathbf{a} = m(\ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}})$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{\mathbf{y}} - B\dot{y}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(E\hat{\mathbf{z}} + B\dot{z}\hat{\mathbf{y}} - B\dot{y}\hat{\mathbf{z}}) = m\mathbf{a} = m(\ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}})$$

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, \quad QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(E\hat{z} + B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}) = m\mathbf{a} = m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, \quad QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

$$\omega \equiv \frac{QB}{m} \quad \text{częstość cyklotronowa}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(E\hat{z} + B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}) = m\mathbf{a} = m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, \quad QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

$$\omega \equiv \frac{QB}{m} \quad \text{częstość cyklotronowa}$$

$$\ddot{y} = \omega\dot{z}, \quad \ddot{z} = \omega \left( \frac{E}{B} - \dot{y} \right), \quad \text{równania ruchu}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad \text{warunki początkowe}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad \text{warunki początkowe}$$

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t), \quad \text{rozwiązania}$$



$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad \text{warunki początkowe}$$

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t), \quad \text{rozwiązania}$$

$$R = \frac{E}{\omega B}, \quad \text{definiujemy}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad \text{warunki początkowe}$$

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t), \quad \text{rozwiązania}$$

$$R = \frac{E}{\omega B}, \quad \text{definiujemy}$$

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2, \quad \text{równanie okręgu o promieniu } R, \text{ którego}$$

środek  $(0, R\omega t, R)$  porusza się wzdłuż  $y$   
ze stałą prędkością (patrz: animacja)

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4 \end{aligned} \right\} \text{rozwiązania}$$

$$\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad \text{warunki początkowe}$$

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t), \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t), \quad \text{rozwiązania}$$

$$R = \frac{E}{\omega B}, \quad \text{definiujemy}$$

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2, \quad \text{równanie okręgu o promieniu } R, \text{ którego}$$

środek  $(0, R\omega t, R)$  porusza się wzdłuż  $y$   
ze stałą prędkością (patrz: animacja)

$$v = \omega R = \frac{E}{B}$$


---

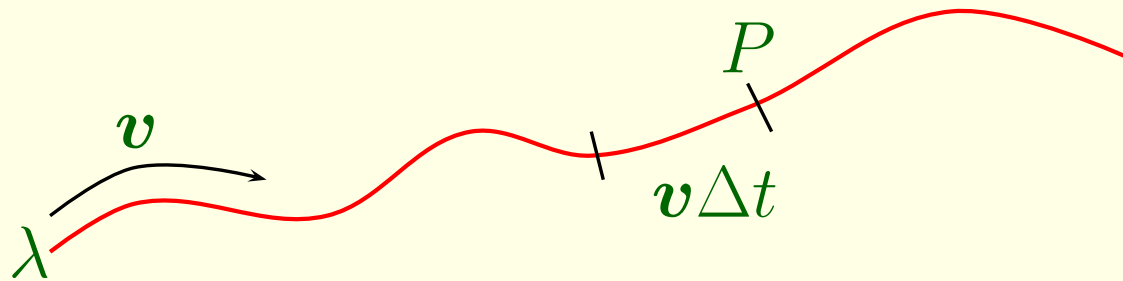
Siły magnetyczne nie wykonują pracy.

$$dW_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

Siły magnetyczne nie wykonują pracy.

$$dW_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

### 5.1.3 Prądy



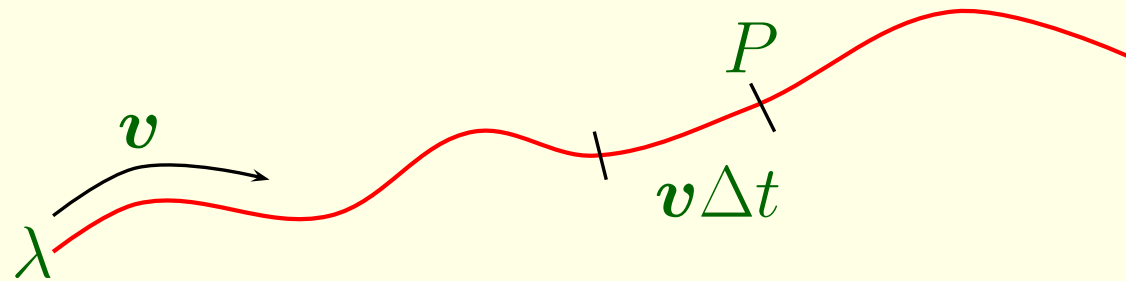
Ładunek liniowy o gęstości  $\lambda$  poruszający się z prędkością  $v$  daje prąd

$$I = \lambda v$$

Siły magnetyczne nie wykonują pracy.

$$dW_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

### 5.1.3 Prądy



Ładunek liniowy o gęstości  $\lambda$  poruszający się z prędkością  $v$  daje prąd

$$I = \lambda v$$

$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}$  wektor natężenia prądu — nietypowa definicja

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int I(\mathbf{dl} \times \mathbf{B})$$

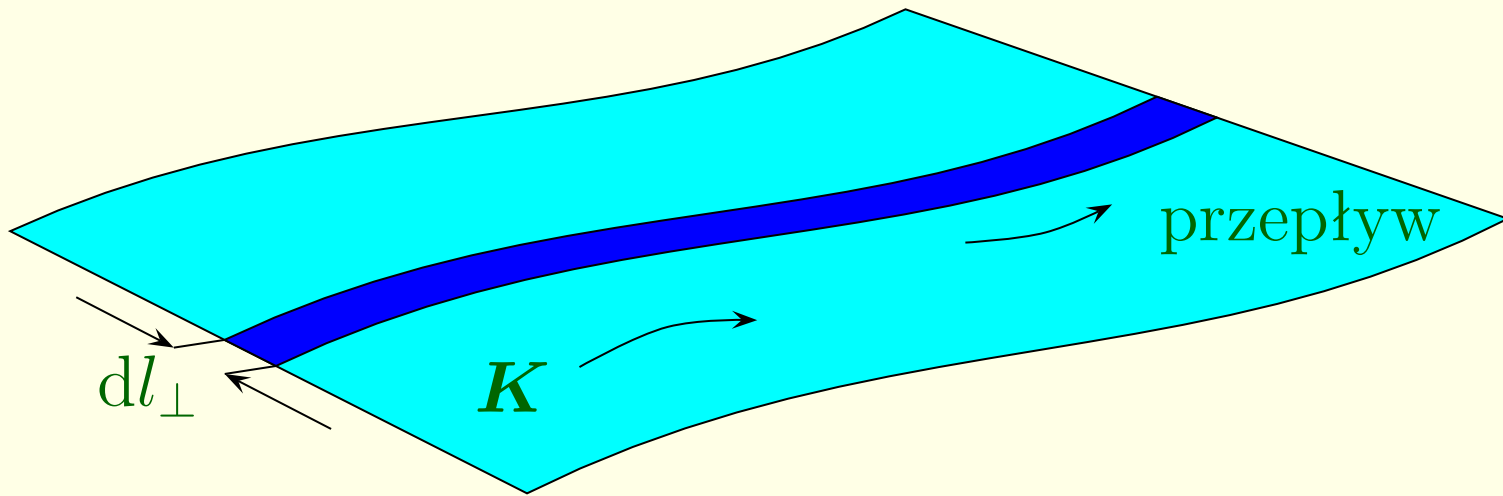
siła magnetyczna



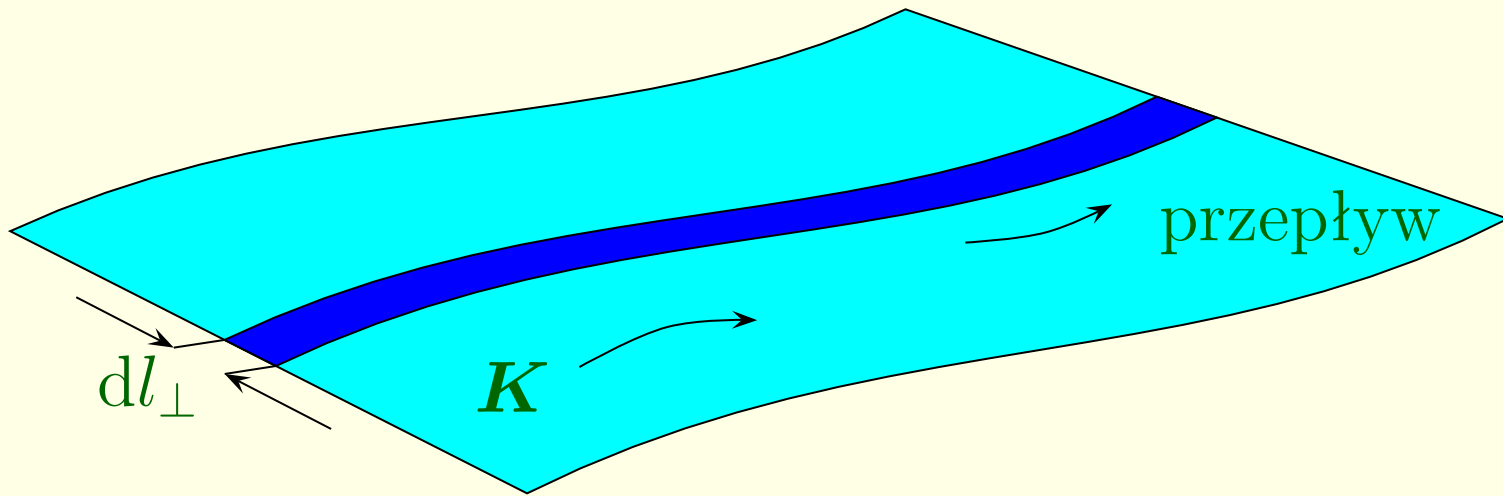
$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int I(\mathbf{dl} \times \mathbf{B})} \quad \text{siła magnetyczna}$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = I \int (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) \quad \text{jeśli } I \text{ jest stałe}$$

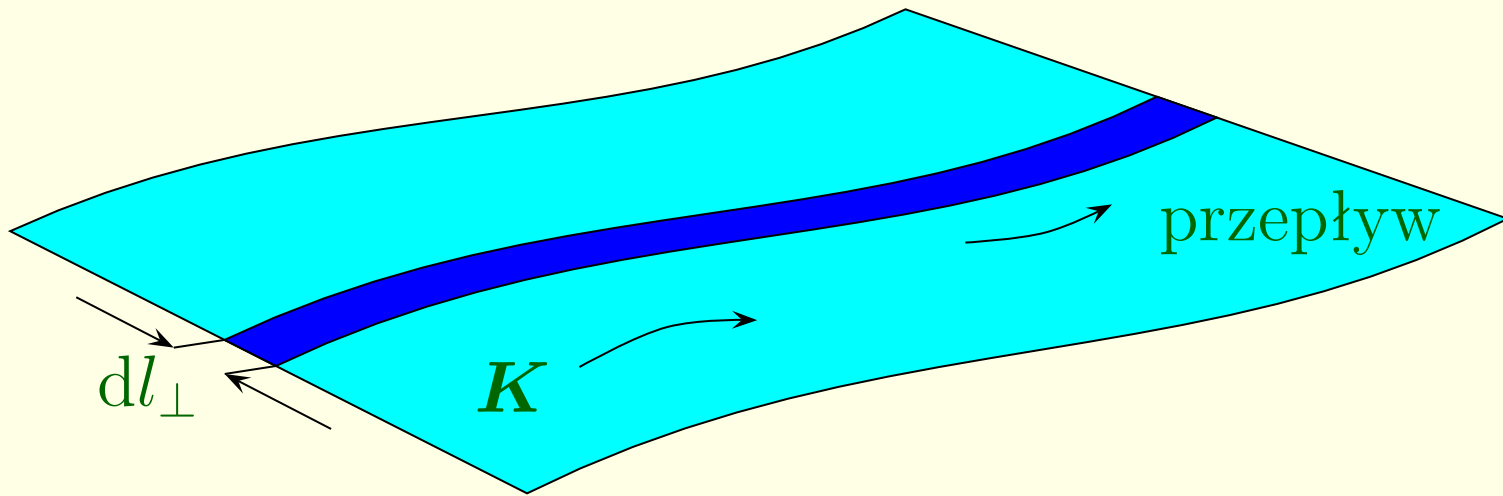


$$K \equiv \frac{dI}{dl_{\perp}} \quad \text{powierzchniowa gęstość prądu}$$



$$\mathbf{K} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}} \quad \text{powierzchniowa gęstość prądu}$$

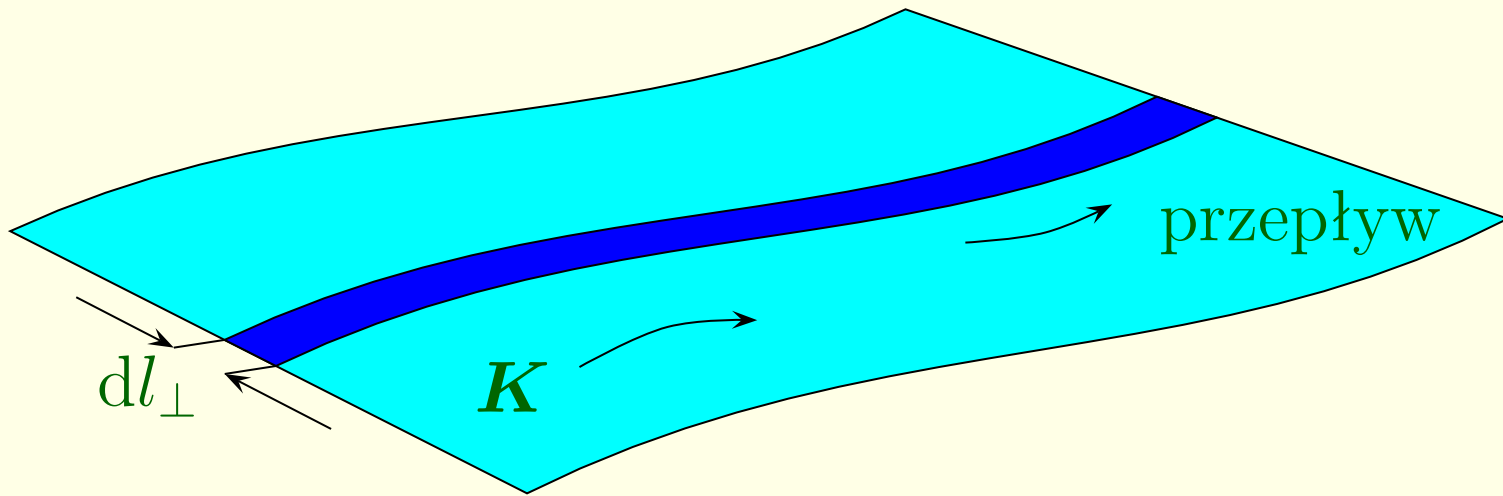
$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$



$$\mathbf{K} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}} \quad \text{powierzchniowa gęstość prądu}$$

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma \, da = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) \, da$$

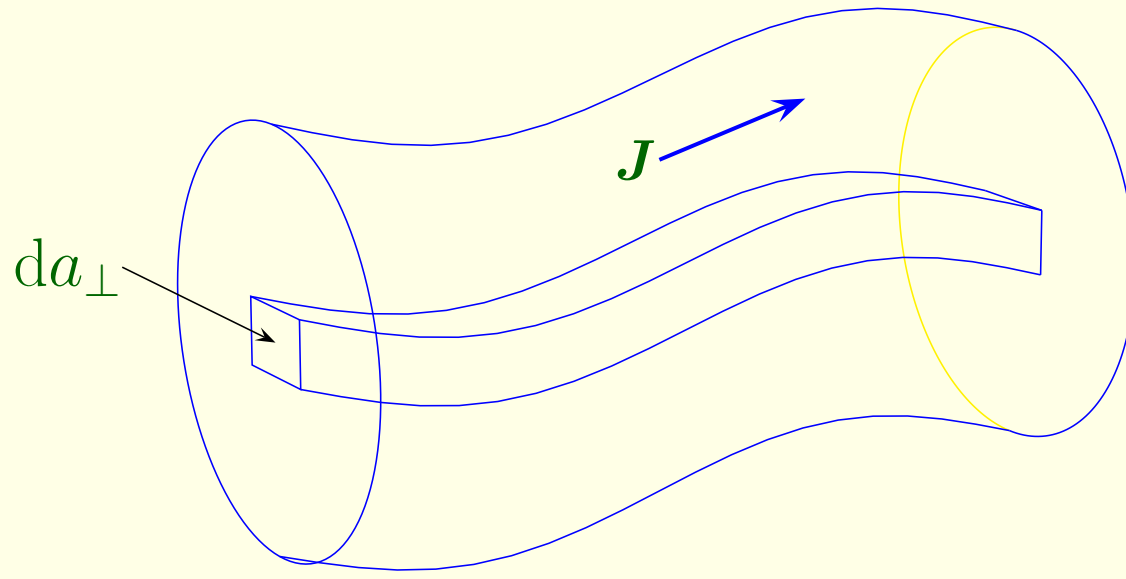


$$\mathbf{K} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}} \quad \text{powierzchniowa gęstość prądu}$$

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$$

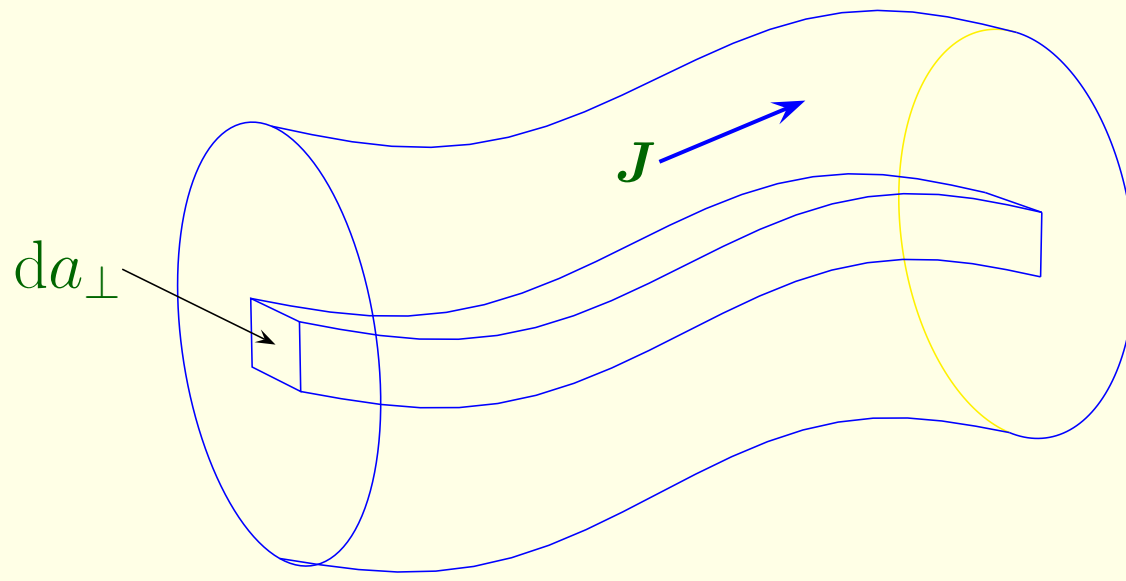
$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma da = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da$$

**Sprzeciw:** indukcja magnetyczna  $\mathbf{B}$  jest nieciągła na powierzchniach, po których płyną prądy powierzchniowe! Musimy posługiwać się **uśrednioną** indukcją.



$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}}$$

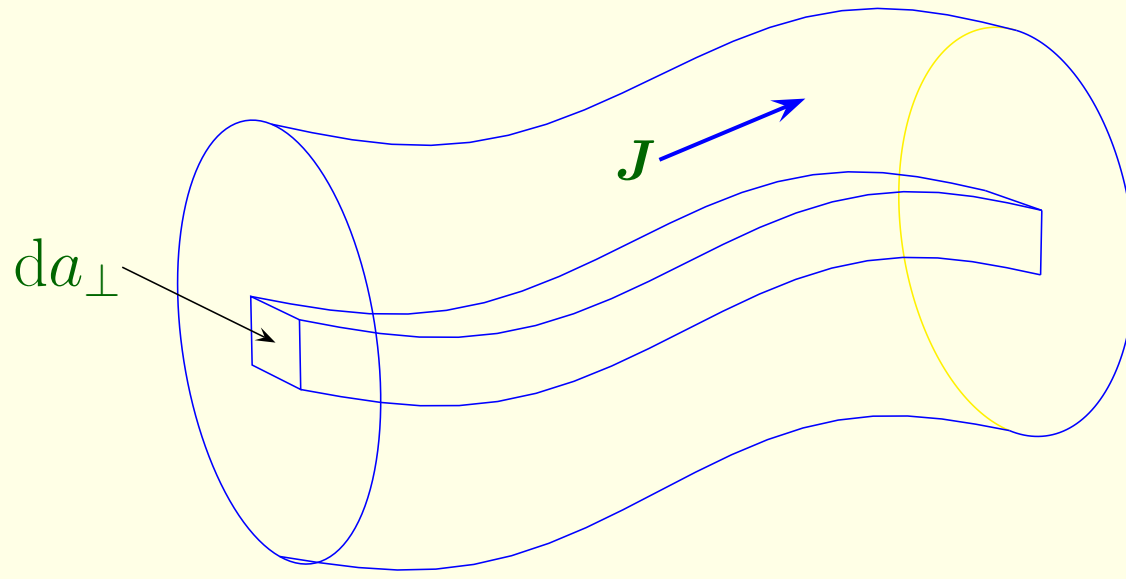
objętościowa gęstość prądu



$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}}$$

objętościowa gęstość prądu

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$



$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} \quad \text{objętościowa gęstość prądu}$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau$$



$$I = \int_{\mathcal{S}} J da_{\perp} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

natężenie prądu płynącego przez  
powierzchnię  $\mathcal{S}$

$$I = \int_{\mathcal{S}} J da_{\perp} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

natężenie prądu płynącego przez powierzchnię  $\mathcal{S}$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

całkowity ładunek wypływający z obszaru  $\mathcal{V}$  w jednostce czasu

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

natężenie prądu płynącego przez powierzchnię  $S$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

całkowity ładunek wypływający z obszaru  $V$  w jednostce czasu

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

natężenie prądu płynącego przez powierzchnię  $S$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

całkowity ładunek wypływający z obszaru  $V$  w jednostce czasu

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

równanie ciągłości

## 5.2 Prawo Biota-Savarta

### 5.2.1 Prądy stałe

Ładunki stacjonarne  $\Rightarrow$  stałe pole elektryczne: elektrostatyka

Stałe prądy  $\Rightarrow$  stałe pole magnetyczne: magnetostatyka

## 5.2 Prawo Biota-Savarta

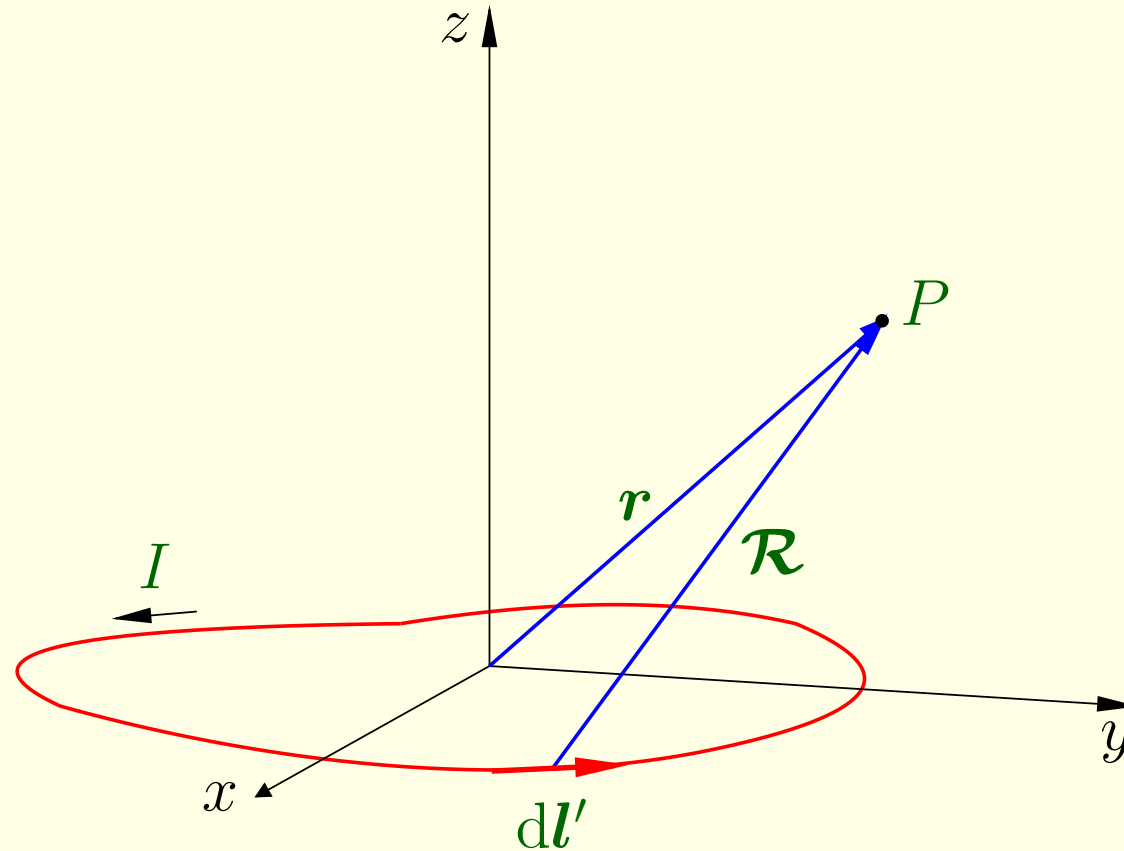
### 5.2.1 Prądy stałe

Ładunki stacjonarne  $\Rightarrow$  stałe pole elektryczne: elektrostatyka

Stałe prądy  $\Rightarrow$  stałe pole magnetyczne: magnetostatyka

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = 0} \quad \text{w magnetostatyce}$$

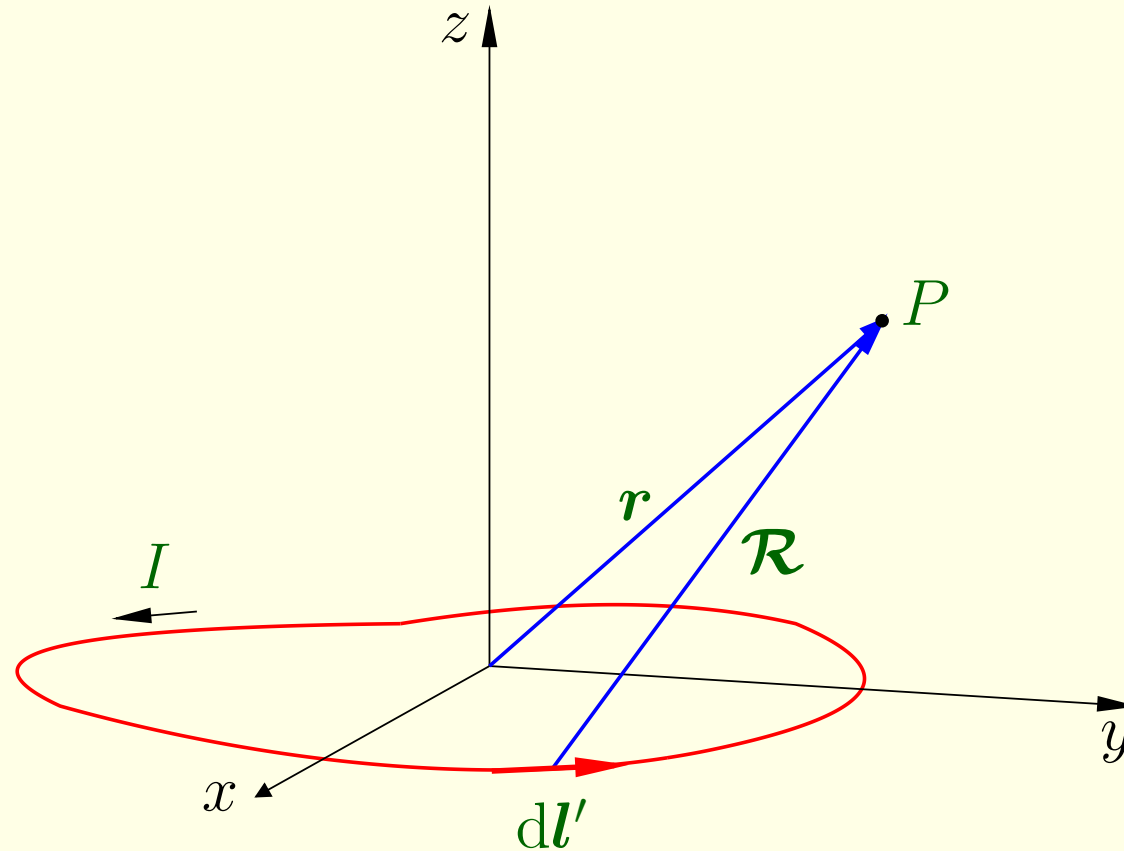
## 5.2.2 Pole magnetyczne liniowego prądu stałego



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

prawo  
Biot-Savarta

## 5.2.2 Pole magnetyczne liniowego prądu stałego



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

prawo  
Biot-Savarta

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[ \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

przenikalność magnetyczna próżni



$$1 \text{ T} = 1 \left[ \frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$$

indukcja magnetyczna  $B$  mierzona jest w teslach

$1 \text{ T} = 1 \left[ \frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$  indukcja magnetyczna  $B$  mierzona jest w teslach

$1 \text{ T} = 10^4$  gausów

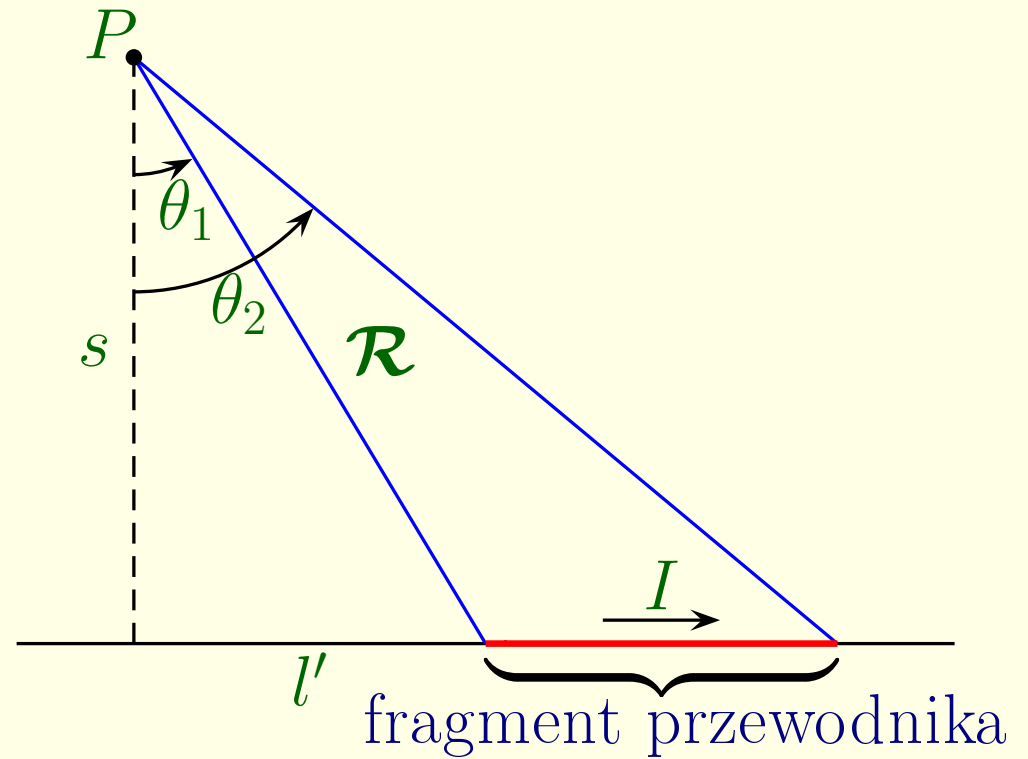
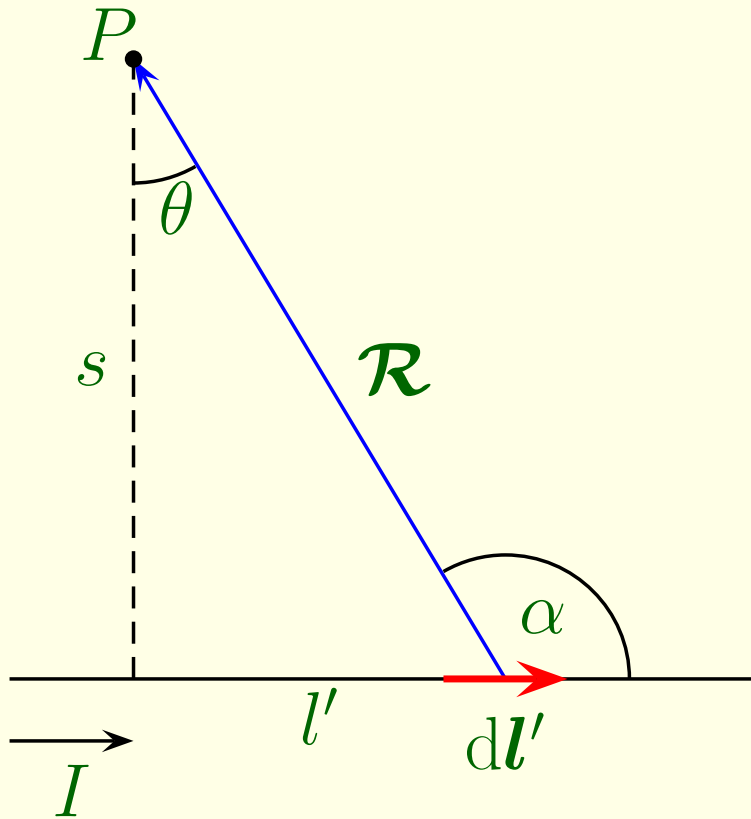
$1 \text{ T} = 1 \left[ \frac{\text{N}}{\text{Am}} \right]$  indukcja magnetyczna  $B$  mierzona jest w teslach

$1 \text{ T} = 10^4$  gausów

Pole magnetyczne Ziemi ma indukcję około 0.5 gausa.

Przykład:

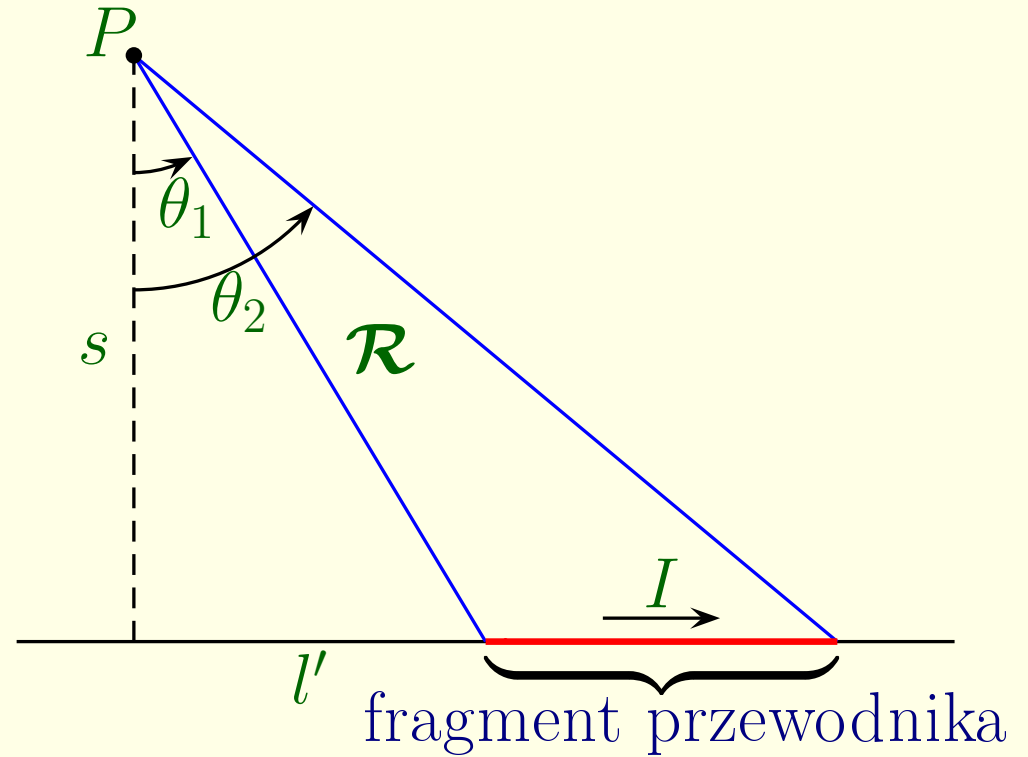
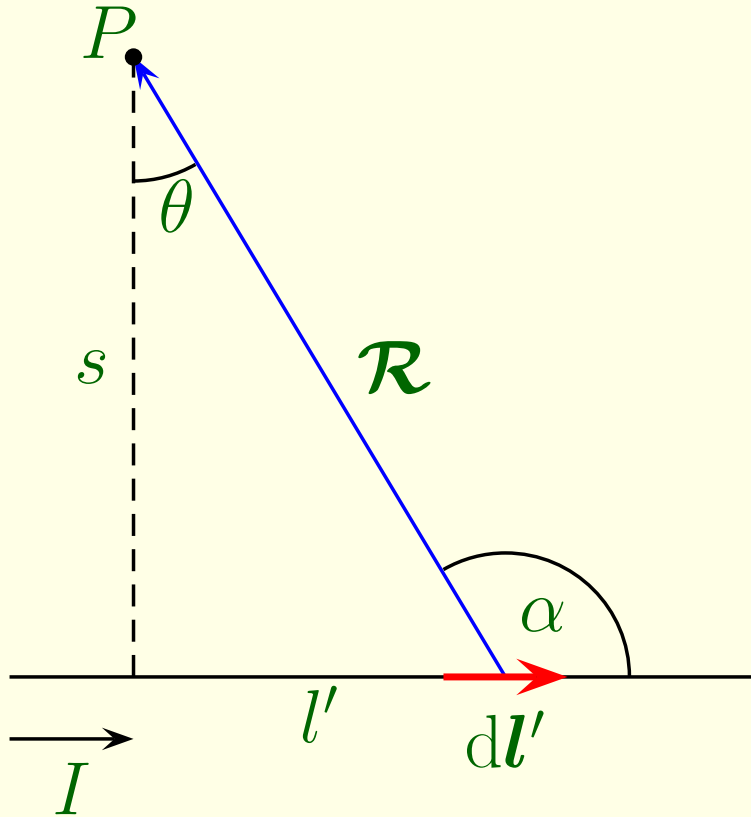
Znaleźć indukcję pola magnetycznego w odległości  $s$  od długiego przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd o natężeniu  $I$ .



wektor  $(d\mathbf{l}' \times \hat{\mathcal{R}})$  ma długość  $dl' \sin \alpha = dl' \cos \theta$

Przykład:

Znaleźć indukcję pola magnetycznego w odległości  $s$  od długiego przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd o natężeniu  $I$ .



wektor  $(d\mathbf{l}' \times \hat{\mathcal{R}})$  ma długość  $dl' \sin \alpha = dl' \cos \theta$

$$l' = s \operatorname{tg} \theta \quad \Rightarrow \quad dl' = \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$s = \mathcal{R} \cos \theta$$

$$s = \mathcal{R} \cos \theta$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

$$s = \mathcal{R} \cos \theta$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{s^2} \right) \left( \frac{s}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta \, d\theta$$



$$s = \mathcal{R} \cos \theta$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{s^2} \right) \left( \frac{s}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta \, d\theta$$

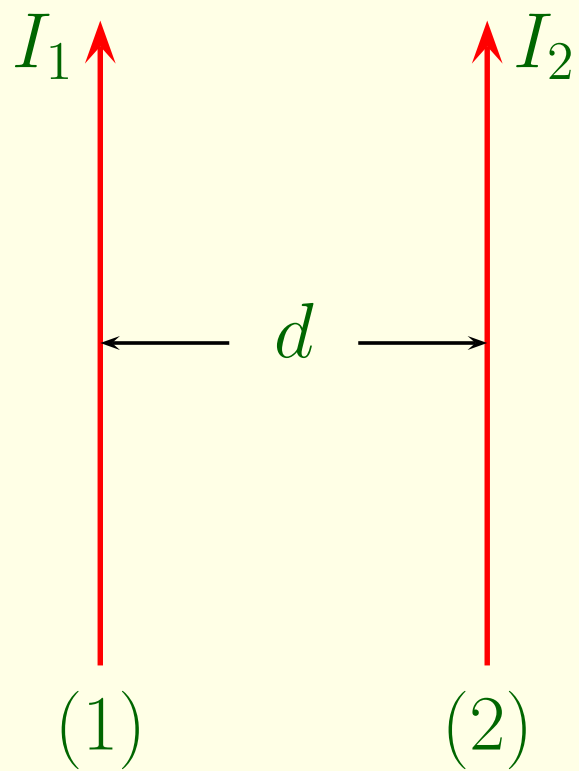
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad \text{dla fragmentu}$$

$$s = \mathcal{R} \cos \theta$$

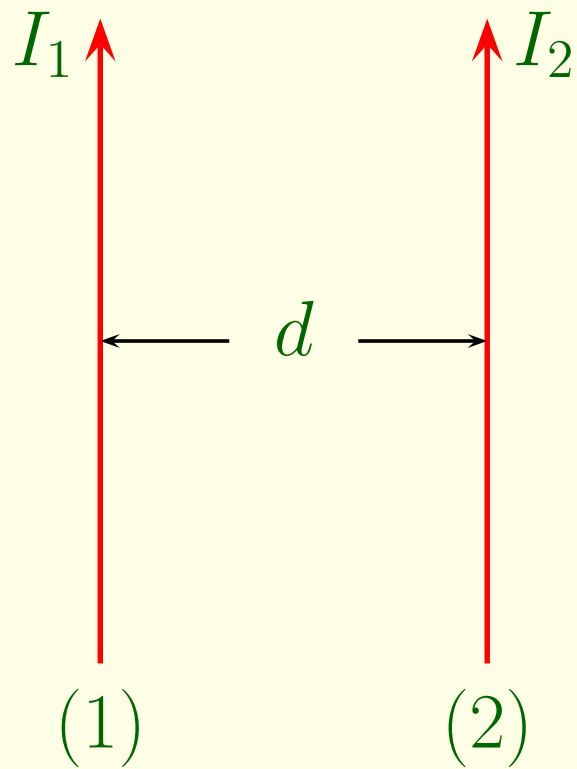
$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{s^2}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{s^2} \right) \left( \frac{s}{\cos^2 \theta} \right) \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad \text{dla fragmentu} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad \text{dla nieskończonego przewodnika}$$

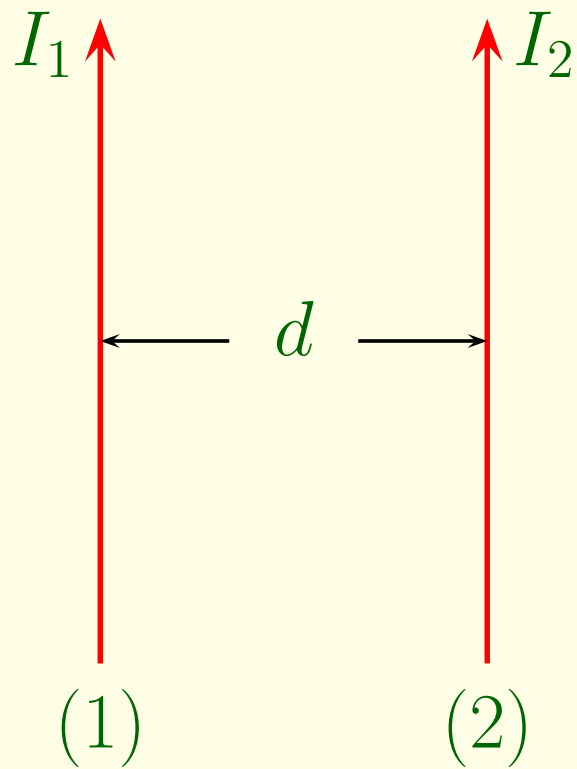


$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad \text{siła Lorentza}$$



$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = I \int (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad \text{siła Lorentza}$$

$$F = I_2 \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) \int \mathrm{d}l \quad \text{całkowita siła jest nieskończona}$$



$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = I \int (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) \quad \text{siła Lorentza}$$

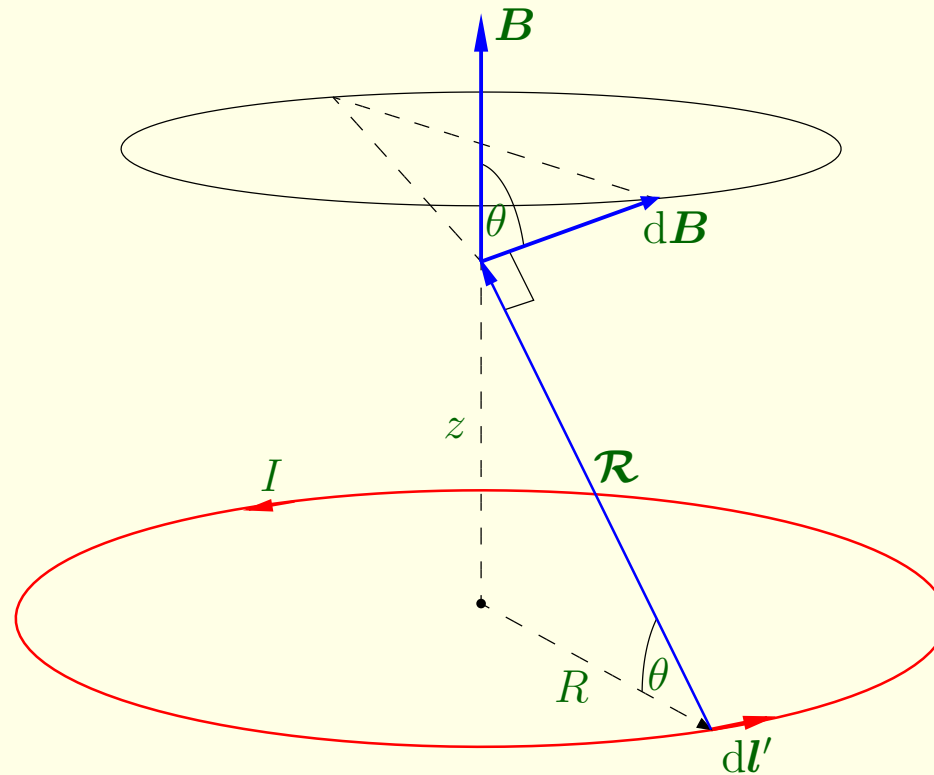
$$F = I_2 \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) \int dl \quad \text{całkowita siła jest nieskończona}$$

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad \text{siła na jednostkę długości}$$

---

Przykład:

Znaleźć pole magnetyczne na prostej przechodzącej przez środek kołowej pętli o promieniu  $R$  z prądem stałym o natężeniu  $I$ , prostopadłej do płaszczyzny pętli, w odległości  $z$  od tej płaszczyzny.



$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl'}{R^2} \cos \theta \quad \text{składowe pionowe dodają się}$$

$d\mathbf{l}'$  i  $\hat{\mathbf{R}}$  są prostopadłe,  $\cos \theta$  i  $\mathcal{R}^2$  są stałe,  $\int dl' = 2\pi R$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

---

$d\mathbf{l}'$  i  $\hat{\mathbf{R}}$  są prostopadłe,  $\cos \theta$  i  $\mathcal{R}^2$  są stałe,  $\int dl' = 2\pi R$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

---

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} da' \quad \text{dla prądów powierzchniowych}$$



$d\mathbf{l}'$  i  $\hat{\mathbf{R}}$  są prostopadłe,  $\cos \theta$  i  $\mathcal{R}^2$  są stałe,  $\int dl' = 2\pi R$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

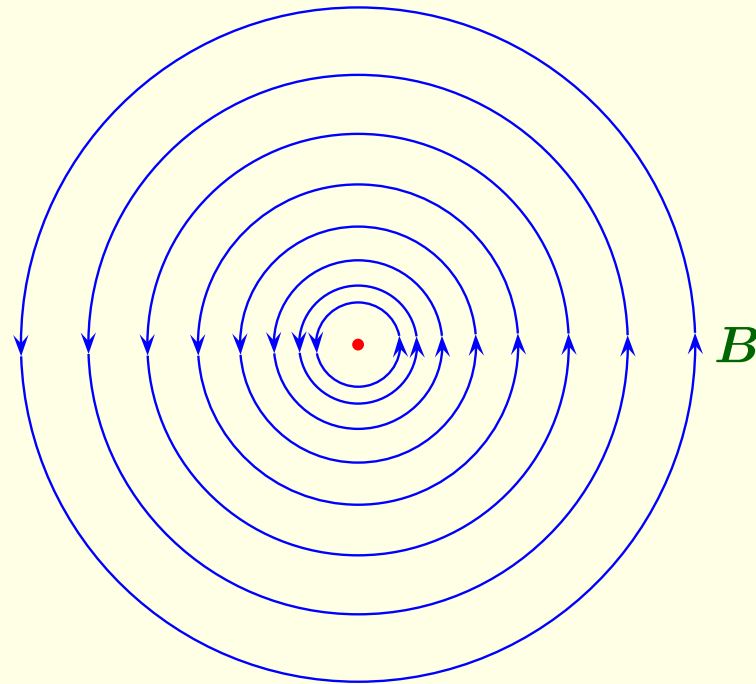
---

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} da' \quad \text{dla prądów powierzchniowych}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} d\tau' \quad \text{dla prądów objętościowych}$$

## 5.3 Dywergencja i rotacja $\mathbf{B}$

### 5.3.1 Prądy prostoliniowe



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint dl = \mu_0 I$$

rotacja jest różna od zera

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad \text{we współrzędnych walcowych } (s, \phi, z)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad \text{we współrzędnych walcowych } (s, \phi, z)$$

$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad \text{we współrzędnych walcowych } (s, \phi, z)$$

$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{1}{s} s d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

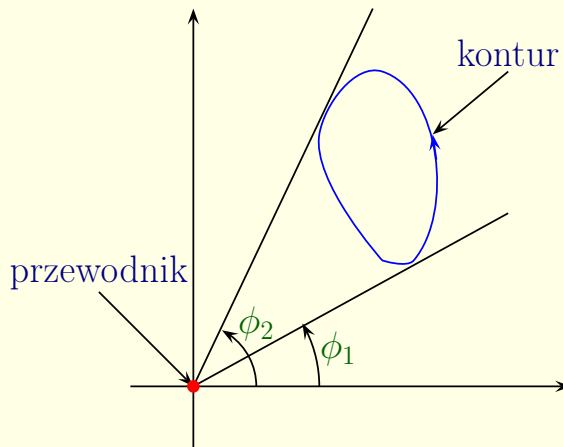
Przy założeniu, że kontur okrąży przewodnik tylko raz.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad \text{we współrzędnych walcowych } (s, \phi, z)$$

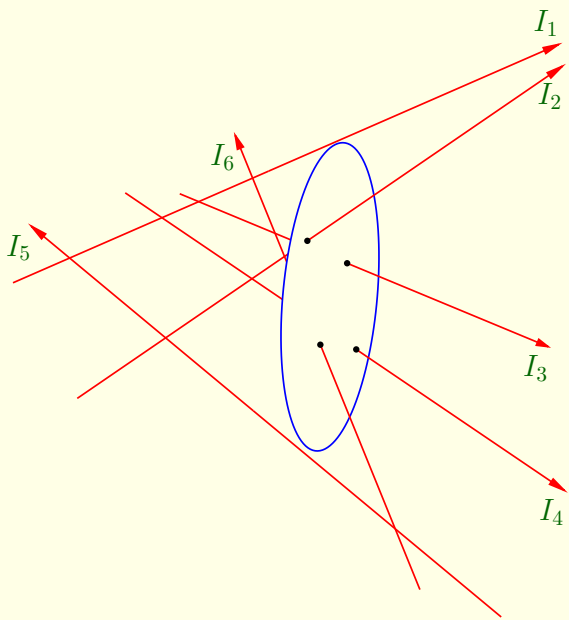
$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{1}{s} s d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

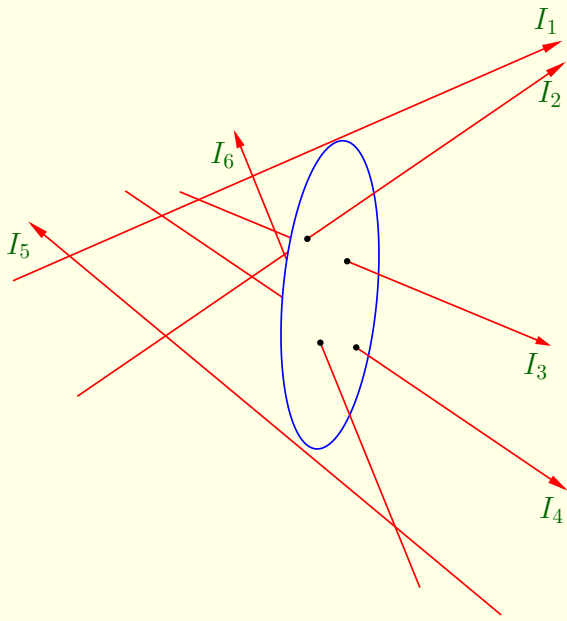
Przy założeniu, że kontur okrąży przewodnik tylko raz.



Jeśli kontur nie otacza przewodnika to  $\int d\phi = 0$ ;  $\phi$  zmienia się od  $\phi_1$  do  $\phi_2$  i z powrotem



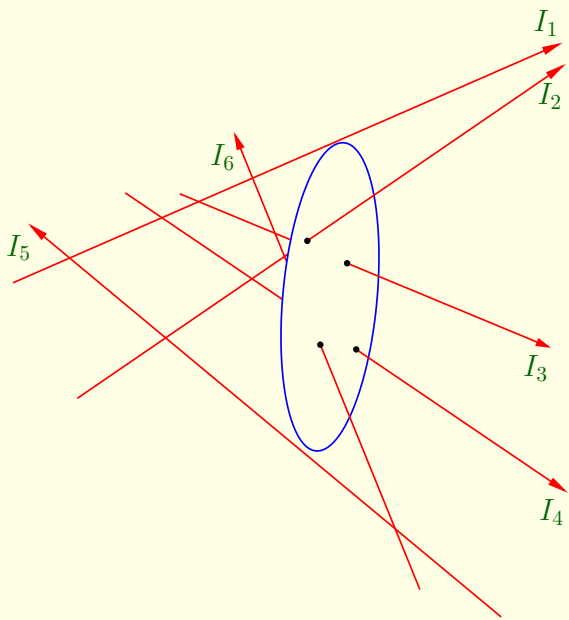
wiązka przewodników; każdy przewodnik otaczany przez kontur daje wkład równy  $\pm\mu_0 I$ ; przewodnik nie otaczany przez kontur nie daje wkładu



wiązka przewodników; każdy przewodnik otaczany przez kontur daje wkład równy  $\pm\mu_0 I$ ; przewodnik nie otaczany przez kontur nie daje wkładu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c, \quad I_c \text{ jest całkowitym natężeniem prądu}$$

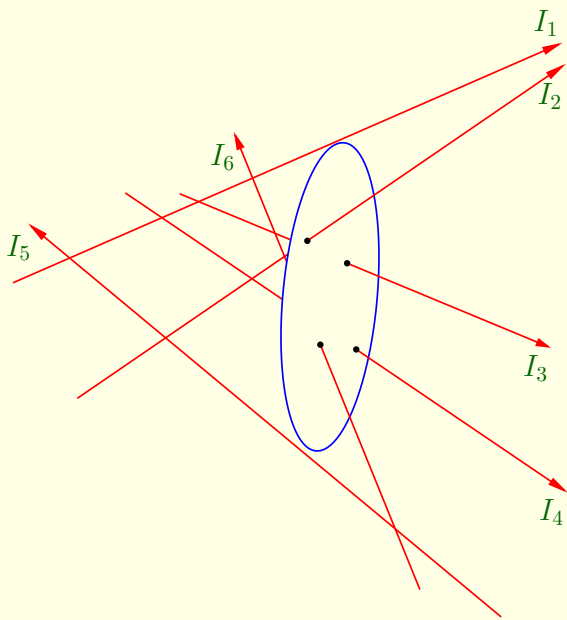




wiązka przewodników; każdy przewodnik otaczany przez kontur daje wkład równy  $\pm\mu_0 I$ ; przewodnik nie otaczany przez kontur nie daje wkładu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c, \quad I_c \text{ jest całkowitym natężeniem prądu}$$

$$I_c = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad \mathbf{J} \text{ — objętościowa gęstość prądu}$$

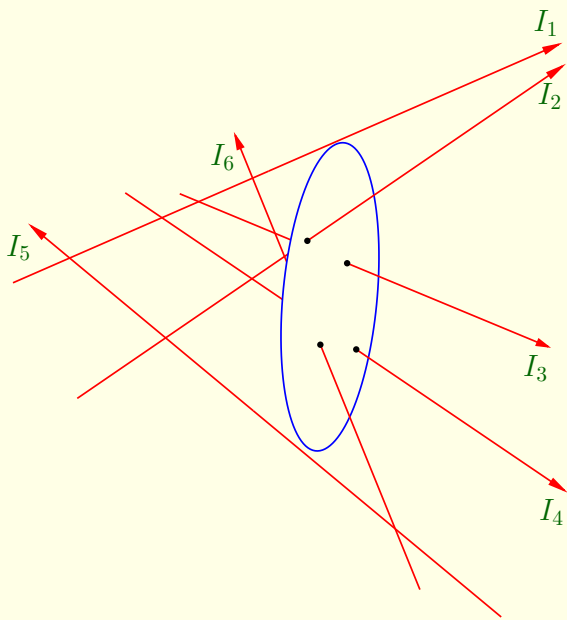


wiązka przewodników; każdy przewodnik otaczany przez kontur daje wkład równy  $\pm\mu_0 I$ ; przewodnik nie otaczany przez kontur nie daje wkładu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c, \quad I_c \text{ jest całkowitym natężeniem prądu}$$

$$I_c = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad \mathbf{J} \text{ — objętościowa gęstość prądu}$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad \text{z twierdzenia Stokesa}$$



wiązka przewodników; każdy przewodnik otaczany przez kontur daje wkład równy  $\pm\mu_0 I$ ; przewodnik nie otaczany przez kontur nie daje wkładu

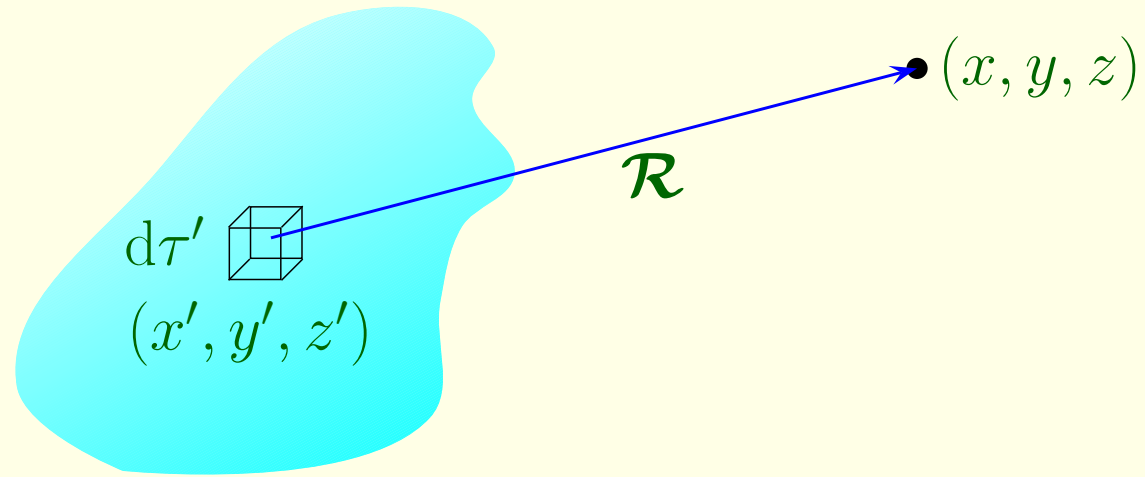
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c, \quad I_c \text{ jest całkowitym natężeniem prądu}$$

$$I_c = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad \mathbf{J} \text{ — objętościowa gęstość prądu}$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \quad \text{z twierdzenia Stokesa}$$

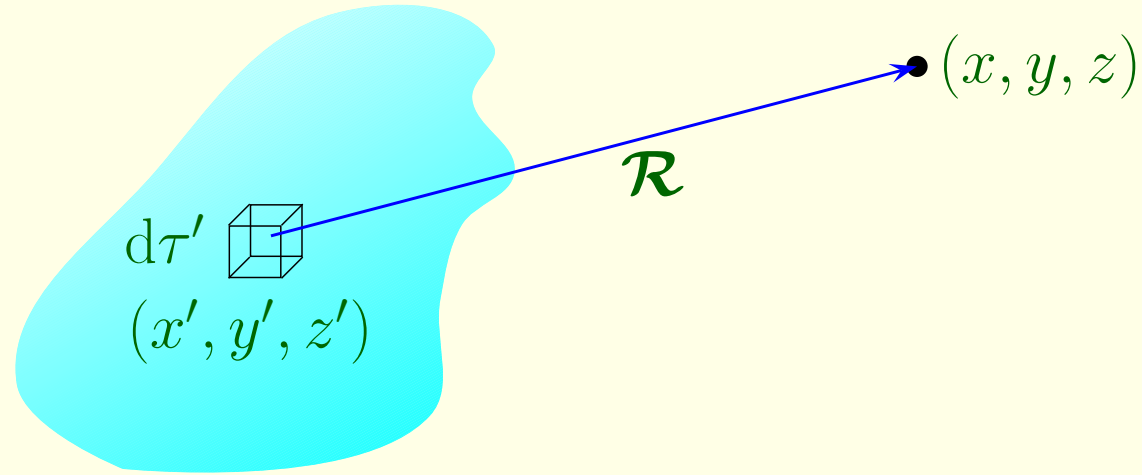
$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

## 5.3.2 Dywergencja i rotacja $\mathbf{B}$



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} d\tau', \quad \text{prawo Biota-Savarta}$$

## 5.3.2 Dywergencja i rotacja B

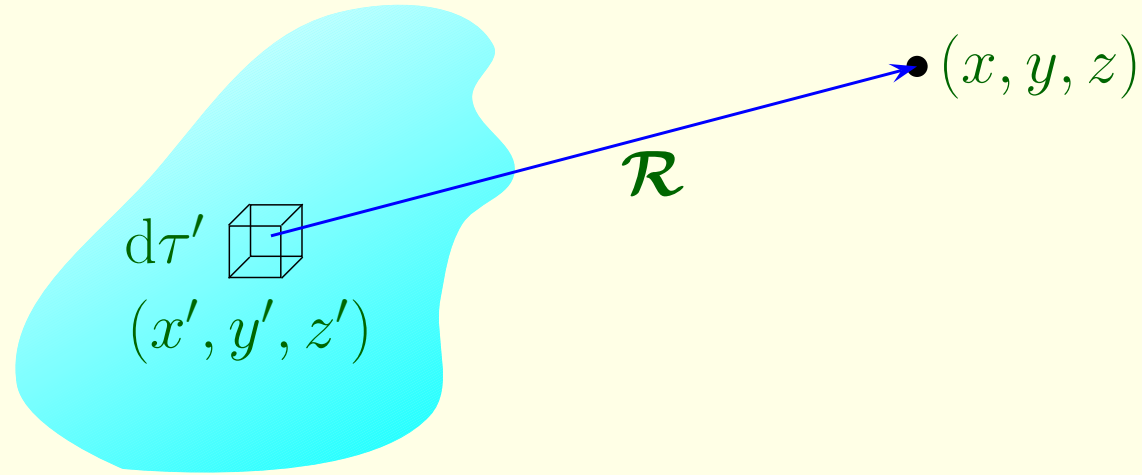


$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} d\tau', \quad \text{prawo Biota-Savarta}$$

$$\mathcal{R} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

## 5.3.2 Dywergencja i rotacja $\mathbf{B}$



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} d\tau', \quad \text{prawo Biota-Savarta}$$

$$\mathcal{R} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right)$$

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right)$$

$\nabla \times \mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{J}$  nie zależy od nieprimowanych zmiennych



$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right)$$

$\nabla \times \mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{J}$  nie zależy od nieprimowanych zmiennych

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = 0$$

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left( \nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right)$$

$\nabla \times \mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{J}$  nie zależy od nieprimowanych zmiennych

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Dywergencja indukcji magnetycznej jest równa zero

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) - \underbrace{(\mathbf{J} \cdot \nabla)}_{=0} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) - \underbrace{(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}}_{=0}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}}_{=0} - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \underbrace{\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0}$$

Pochodne  $\mathbf{J}$  są równe zeru bo  $\mathbf{J}$  nie zależy od nieprimowanych zmiennych.

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{R})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) d\tau'$$

$$\nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) - \underbrace{(\mathbf{J} \cdot \nabla)}_{=0} \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}}_{=0} - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \underbrace{\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0}$$

Pochodne  $\mathbf{J}$  są równe zeru bo  $\mathbf{J}$  nie zależy od nieprimowanych zmiennych.

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{R})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{pokażemy, że się zeruje}$$

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{pokażemy, że się zeruje}$$

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \left( \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right] - \left( \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \right) \underbrace{(\nabla' \cdot \mathbf{J})}_{=0}$$

skorzystaliliśmy z  $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$



$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{pokażemy, że się zeruje}$$

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \left( \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right] - \left( \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \right) \underbrace{(\nabla' \cdot \mathbf{J})}_{=0}$$

skorzystaliliśmy z  $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

$$\left[ -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right]$$

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{pokażemy, że się zeruje}$$

$$(\mathbf{J} \cdot \nabla') \left( \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \right) = \nabla' \cdot \left[ \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right] - \underbrace{\left( \frac{x - x'}{\mathcal{R}^3} \right) (\nabla' \cdot \mathbf{J})}_{=0}$$

skorzystaliliśmy z  $\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

$$\left[ -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right]$$

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left[ \frac{(x - x')}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right] d\tau' = \oint_S \frac{(x - x')}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}' = 0$$

Na brzegu obszaru  $\mathbf{J} = 0$ .

### 5.3.3 Zastosowanie prawa Ampère'a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

### 5.3.3 Zastosowanie prawa Ampère'a

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

### 5.3.3 Zastosowanie prawa Ampère'a

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c} \quad \text{całkowa postać prawa Ampère'a}$$

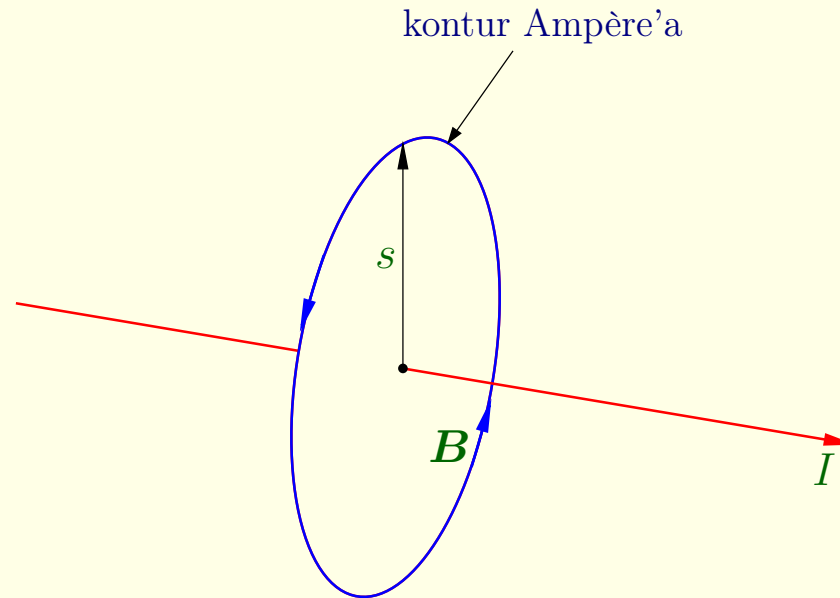
$I_c$  — całkowity prąd otoczony konturem

Elektrostatyka:      prawo Coulomba       $\rightarrow$  prawo Gaussa

Magnetostatyka:      prawo Biota-Savarta       $\rightarrow$  prawo Ampère'a

Przykład:

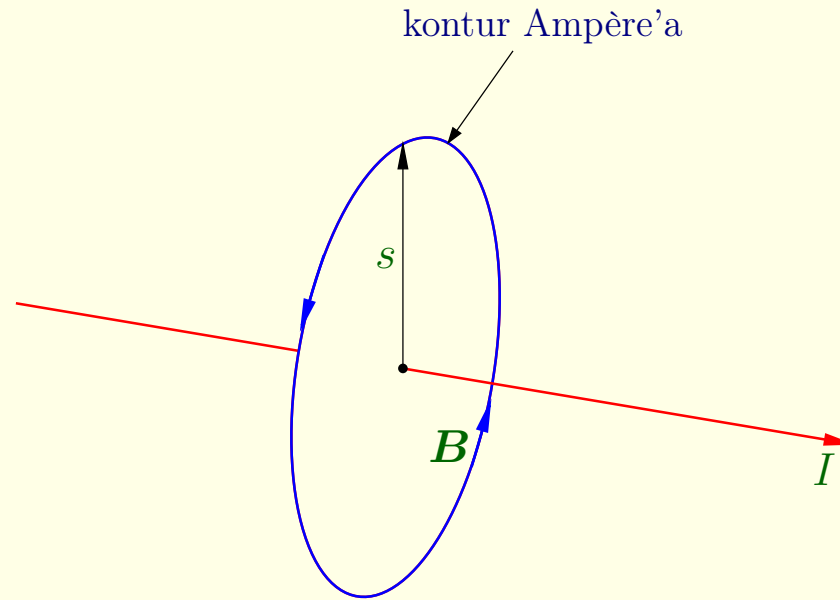
Znaleźć indukcję pola magnetycznego w odległości  $s$  od długiego przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd stały o natężeniu  $I$ .



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B 2\pi s = \mu_0 I_c = \mu_0 I, \quad \text{z prawa Ampère'a}$$

Przykład:

Znaleźć indukcję pola magnetycznego w odległości  $s$  od długiego przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd stały o natężeniu  $I$ .

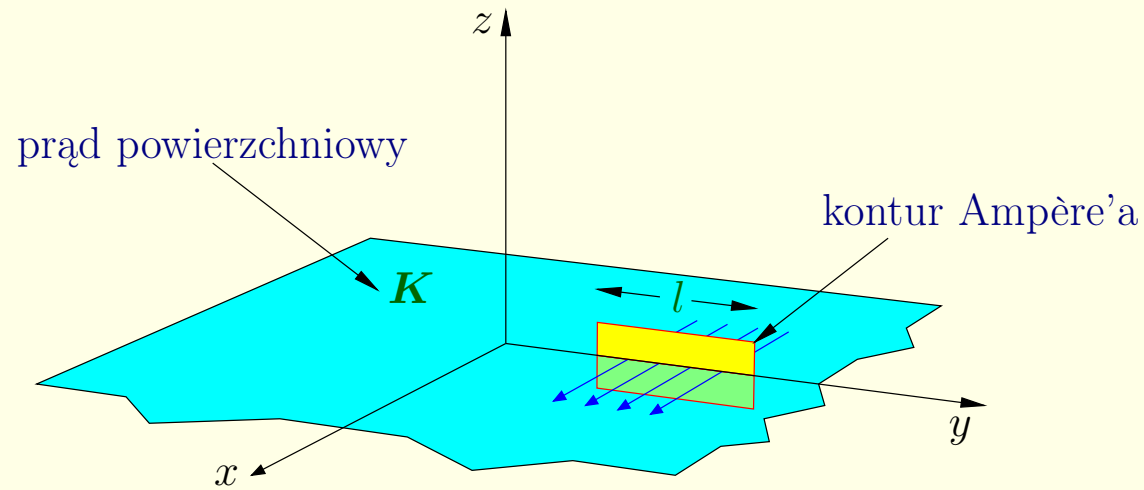


$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B 2\pi s = \mu_0 I_c = \mu_0 I, \quad \text{z prawa Ampère'a}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Przykład:

Znaleźć indukcję pola magnetycznego od nieskończonej płaszczyzny z prądem powierzchniowym  $\mathbf{K} = K\hat{x}$ . płynącym w płaszczyźnie  $xy$ .

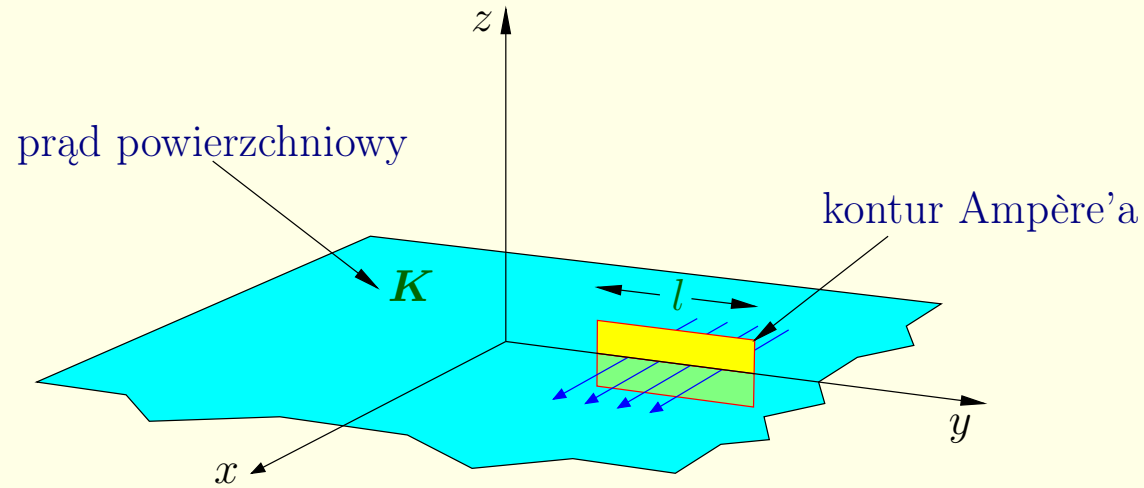


$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = \mu_0 I_c = \mu_0 Kl$$



Przykład:

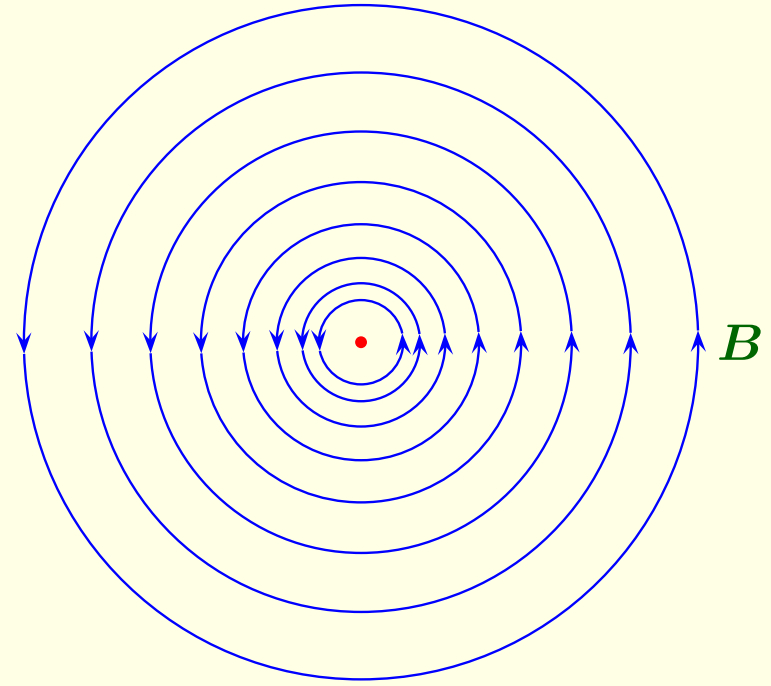
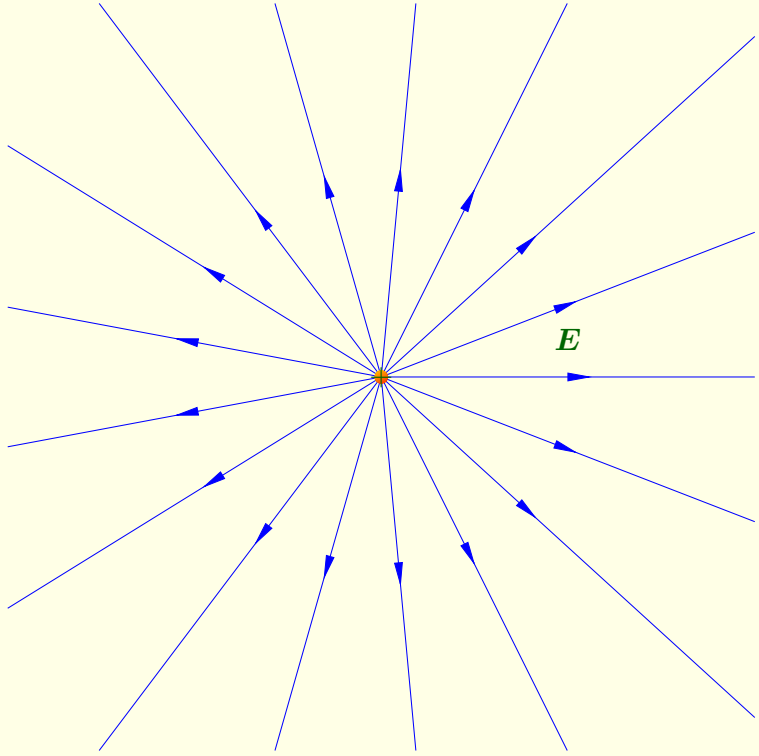
Znaleźć indukcję pola magnetycznego od nieskończonej płaszczyzny z prądem powierzchniowym  $\mathbf{K} = K\hat{x}$ . płynącym w płaszczyźnie  $xy$ .



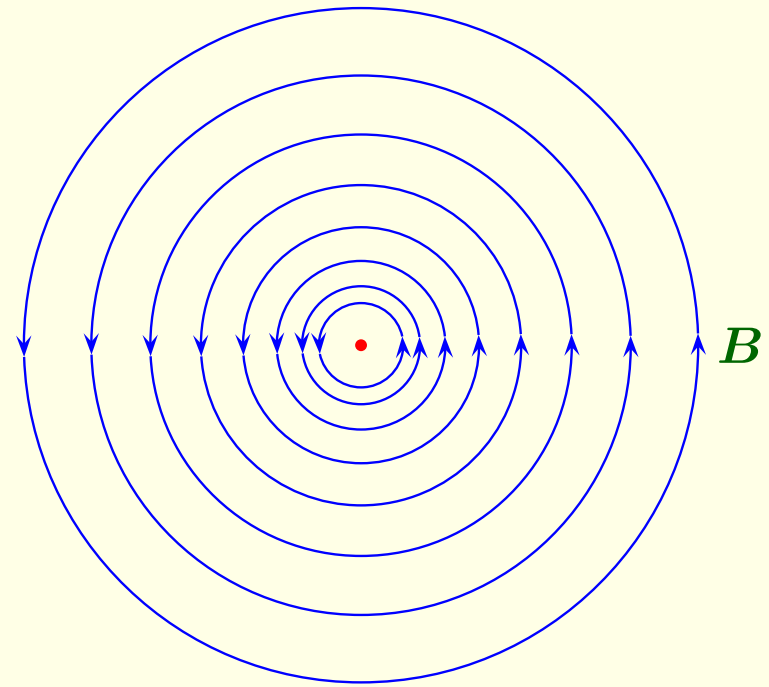
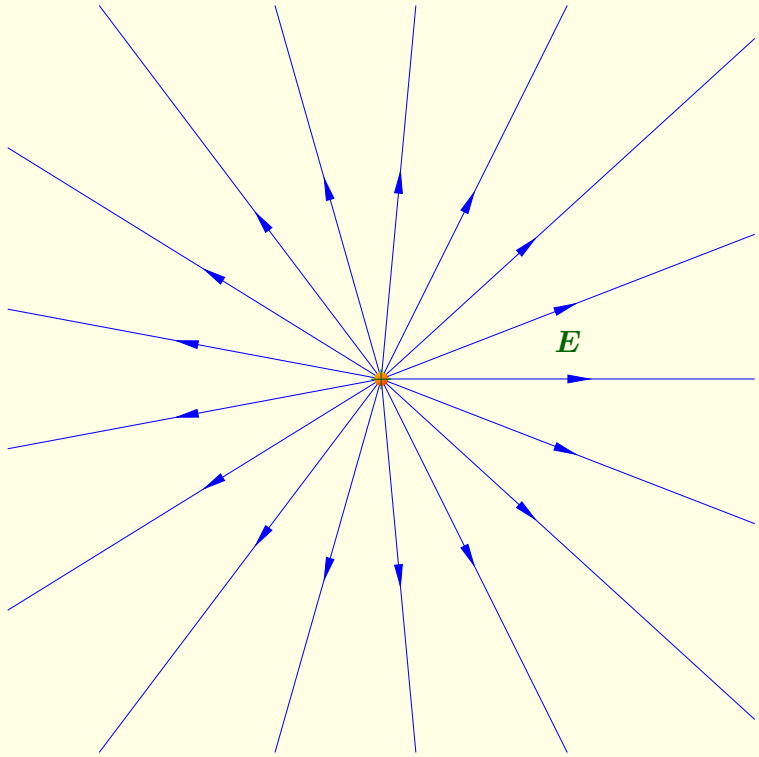
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = \mu_0 I_c = \mu_0 Kl$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} +(\mu_0/2)K\hat{y} & \text{dla } z < 0 \\ -(\mu_0/2)K\hat{y} & \text{dla } z > 0 \end{cases}$$

## 5.3.4 Porównanie magnetostatyki i elektrostatyki



## 5.3.4 Porównanie magnetostatyki i elektrostatyki



$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \text{prawo Gaussa} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} & \text{prawo Ampère'a} \end{cases}$$

## 5.4 Magnetyczny potencjał wektorowy

### 5.4.1 Potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

## 5.4 Magnetyczny potencjał wektorowy

### 5.4.1 Potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

## 5.4 Magnetyczny potencjał wektorowy

### 5.4.1 Potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

## 5.4 Magnetyczny potencjał wektorowy

### 5.4.1 Potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

## 5.4 Magnetyczny potencjał wektorowy

### 5.4.1 Potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \lambda, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$



## 5.4 Magnetyczny potencjał wektorowy

### 5.4.1 Potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \lambda, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{\mathcal{R}} d\tau', \quad \text{jeśli } \nabla \cdot \mathbf{A}_0 \text{ znika w nieskończoności}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{\mathcal{R}} d\tau', \quad \text{jeśli } \nabla \cdot \mathbf{A}_0 \text{ znika w nieskończoności}$$

Możemy zawsze wybrać  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{\mathcal{R}} d\tau', \quad \text{jeśli } \nabla \cdot \mathbf{A}_0 \text{ znika w nieskończoności}$$

Możemy zawsze wybrać  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau' \quad \text{jeśli } \mathbf{J} \text{ znika w nieskończoności}$$

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{\mathcal{R}} d\tau', \quad \text{jeśli } \nabla \cdot \mathbf{A}_0 \text{ znika w nieskończoności}$$

Możemy zawsze wybrać  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau' \quad \text{jeśli } \mathbf{J} \text{ znika w nieskończoności}$$

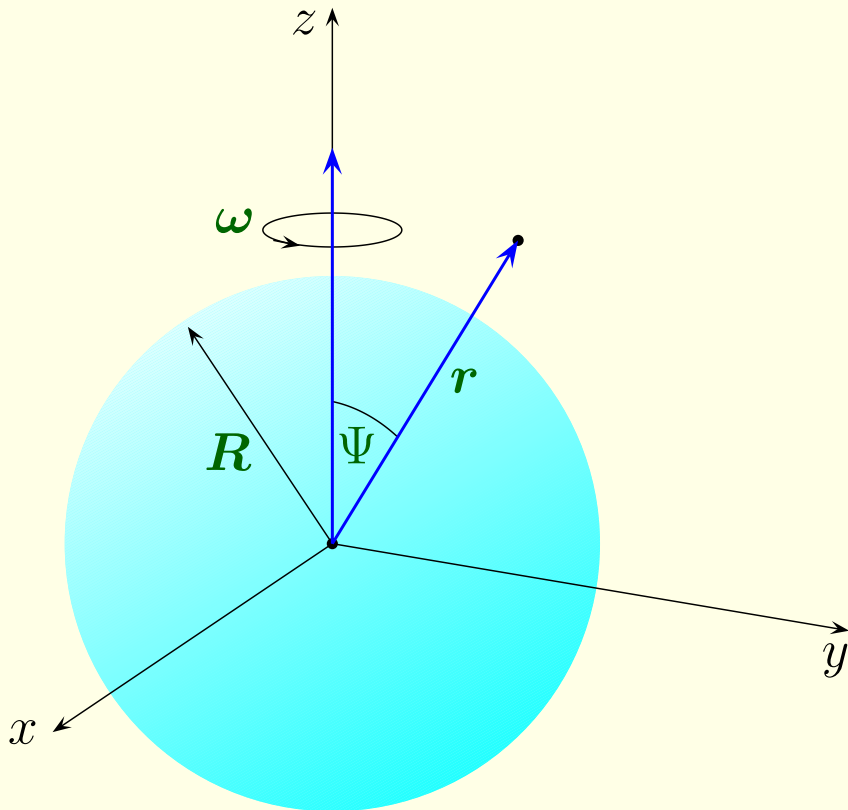
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{\mathcal{R}} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{\mathcal{R}} dl', \quad \text{dla prądów liniowych}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{\mathcal{R}} da', \quad \text{dla prądów powierzchniowych}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{R} da', \quad \text{dla prądów powierzchniowych}$$

Przykład:

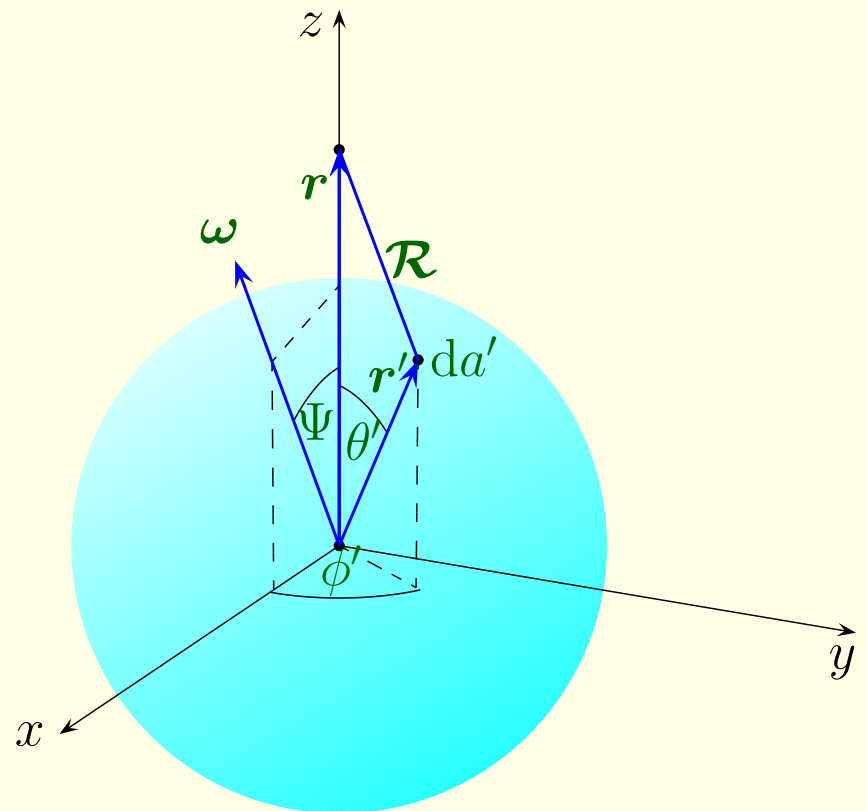
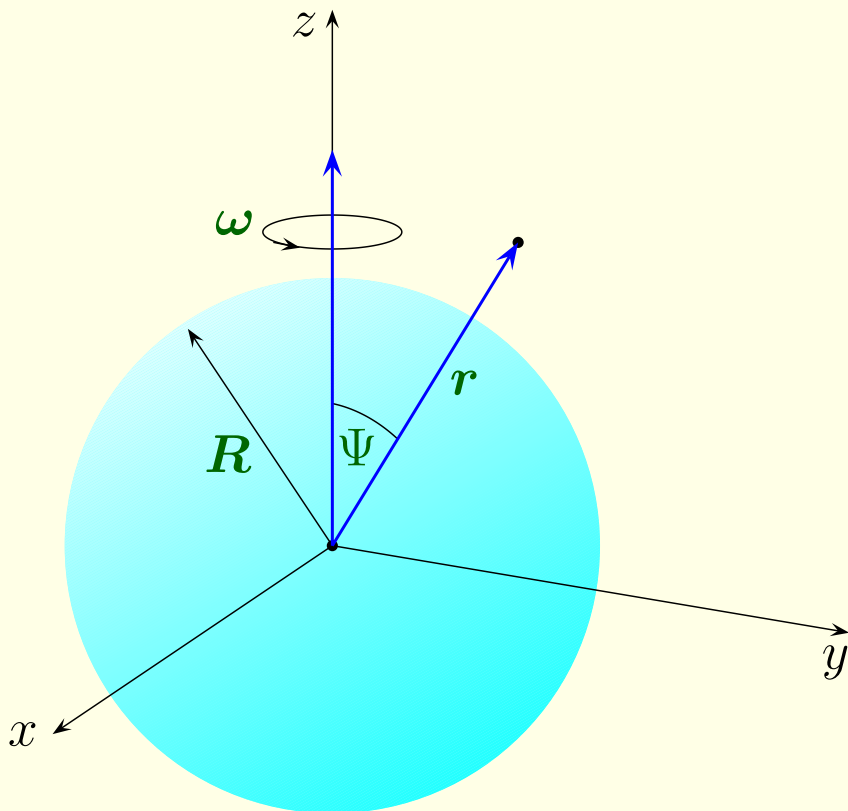
Powierzchnia sferyczna o promieniu  $R$  naładowana ładunkiem powierzchniowym  $\sigma$  wiruje z prędkością kątową  $\omega$ . Znaleźć potencjał wektorowy w punkcie  $\mathbf{r}$ .



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{\mathcal{R}} da', \quad \text{dla prądów powierzchniowych}$$

Przykład:

Powierzchnia sferyczna o promieniu  $R$  naładowana ładunkiem powierzchniowym  $\sigma$  wiruje z prędkością kątową  $\omega$ . Znaleźć potencjał wektorowy w punkcie  $\mathbf{r}$ .





$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} da'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} da'$$

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}, \quad da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} da'$$

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}, \quad da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \omega \sin \Psi & 0 & \omega \cos \Psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix} \\ &= R\omega [ -(\cos \Psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + (\cos \Psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \Psi \cos \theta') \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + \sin \Psi \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{z}} ] \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} da'$$

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}, \quad da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \omega \sin \Psi & 0 & \omega \cos \Psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix} \\ &= R\omega [ -(\cos \Psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + (\cos \Psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \Psi \cos \theta') \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + \sin \Psi \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{z}} ] \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \Psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \Psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

$$u \equiv \cos \theta'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \Psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

$$u \equiv \cos \theta'$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rru}} du &= -\frac{R^2 + r^2 + 2Rru}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[ (R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \Psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

$$u \equiv \cos \theta'$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rru}} du = -\frac{R^2 + r^2 + 2Rru}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[ (R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{dla } r < R \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{dla } r > R \end{cases}$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \Psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}$$

$$u \equiv \cos \theta'$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rru}} du = -\frac{R^2 + r^2 + 2Rru}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{3R^2 r^2} \left[ (R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{dla } r < R \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{dla } r > R \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega r \sin \Psi \hat{\mathbf{y}}$$

Po przejściu do „naturalnych” zmiennych gdzie  $\omega$  jest wzdłuż osi  $z$ , mamy

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi} & \text{dla } r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi} & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

Po przejściu do „naturalnych” zmiennych gdzie  $\omega$  jest wzdłuż osi  $z$ , mamy

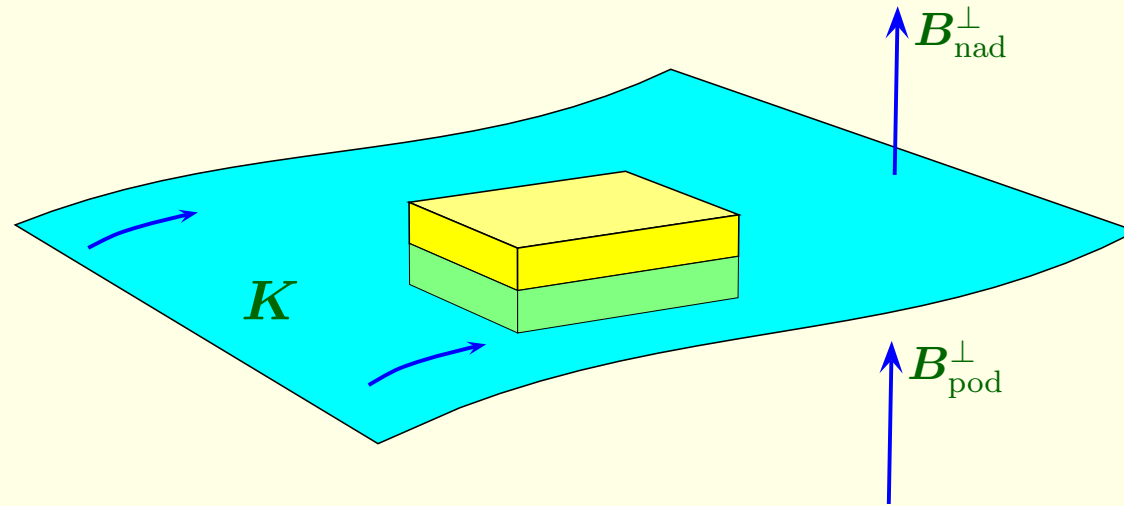
$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi} & \text{dla } r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi} & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{z} = \frac{2}{3} \sigma R \omega$$

Pole indukcji  $\mathbf{B}$  wewnątrz sfery jest **jednorodne**.

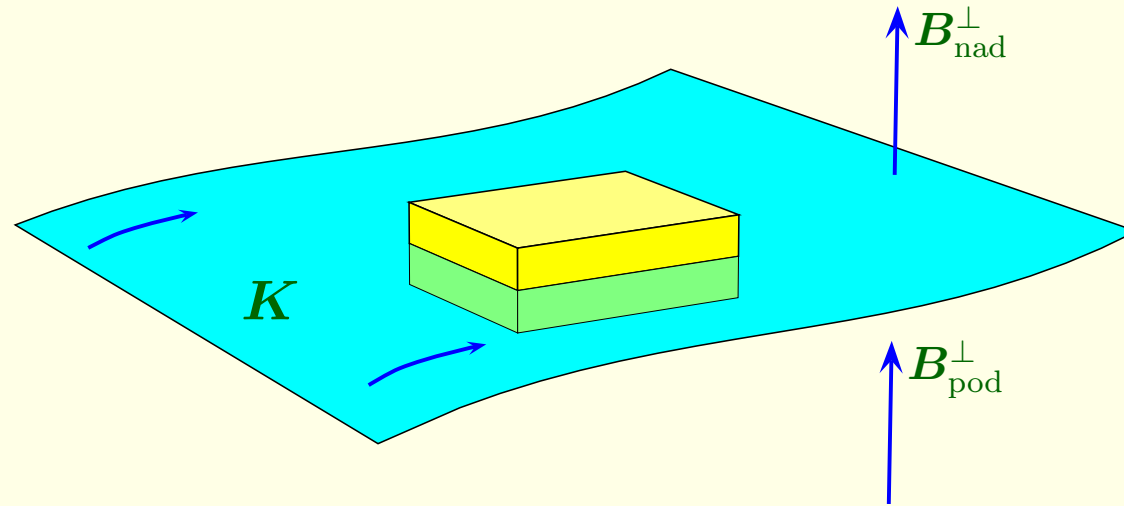
---

## 5.4.2 Magnetostaticzne warunki brzegowe



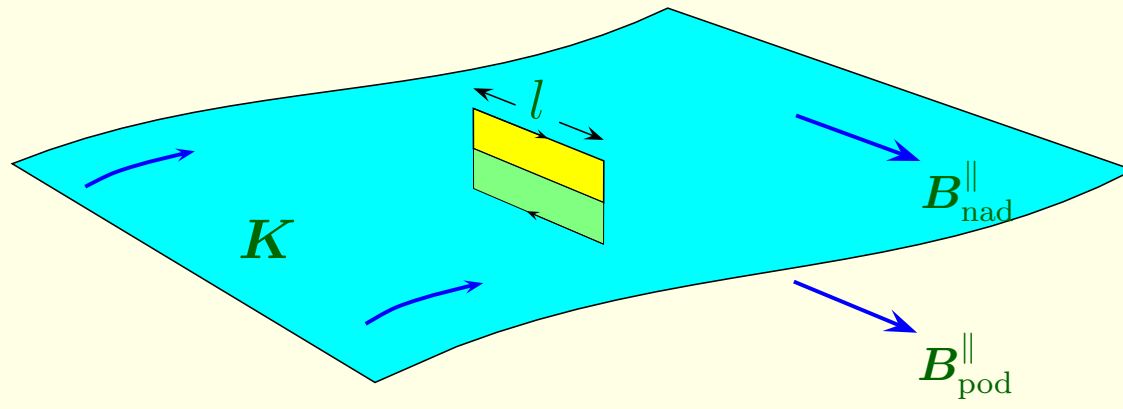
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

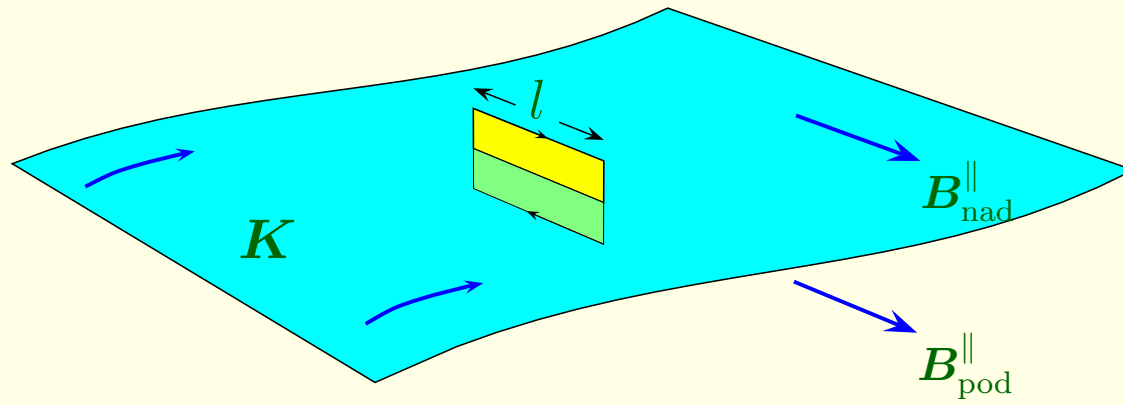
## 5.4.2 Magnetostaticzne warunki brzegowe



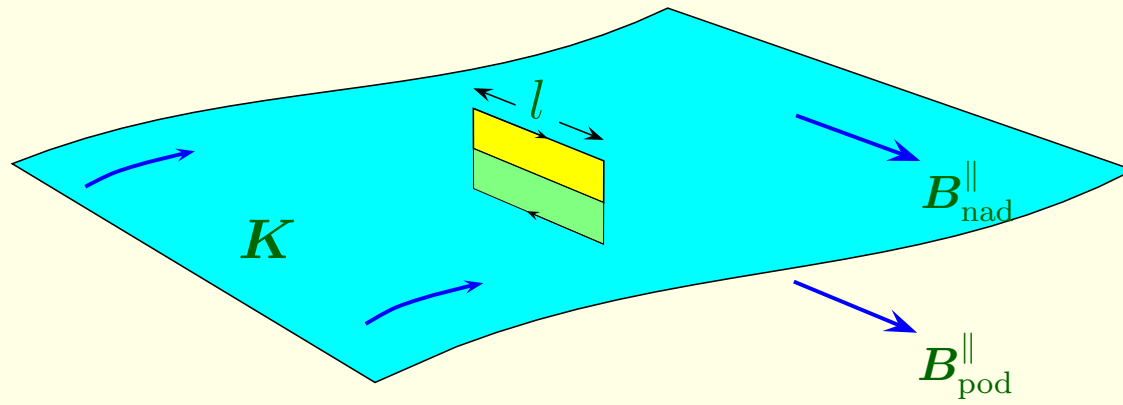
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$B_{\text{nad}}^{\perp} = B_{\text{pod}}^{\perp}$$





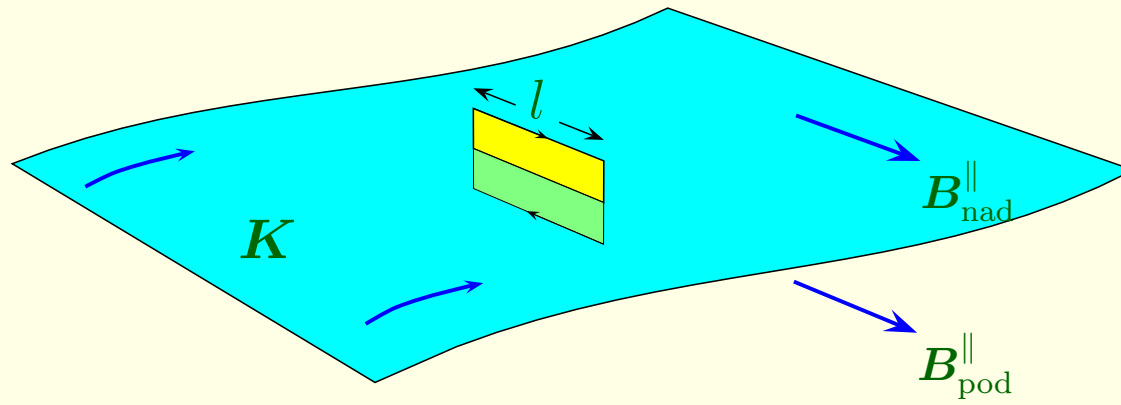
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{\text{nad}}^{\parallel} - B_{\text{pod}}^{\parallel})l = \mu_0 I_c = \mu_0 K l$$



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{\text{nad}}^{\parallel} - B_{\text{pod}}^{\parallel})l = \mu_0 I_c = \mu_0 K l$$

$$B_{\text{nad}}^{\parallel} - B_{\text{pod}}^{\parallel} = \mu_0 K$$





$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{\text{nad}}^{\parallel} - B_{\text{pod}}^{\parallel})l = \mu_0 I_c = \mu_0 K l$$

$$B_{\text{nad}}^{\parallel} - B_{\text{pod}}^{\parallel} = \mu_0 K$$

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{nad}} - \mathbf{B}_{\text{pod}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}})}$$

$\mathbf{A}_{\text{nad}} = \mathbf{A}_{\text{pod}}$  potencjał wektorowy jest ciągły

$\mathbf{A}_{\text{nad}} = \mathbf{A}_{\text{pod}}$  potencjał wektorowy jest ciągły

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  gwarantuje ciągłość składowej normalnej

$\mathbf{A}_{\text{nad}} = \mathbf{A}_{\text{pod}}$  potencjał wektorowy jest ciągły

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  gwarantuje ciągłość składowej normalnej

$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi$  ciągłość składowej stycznej

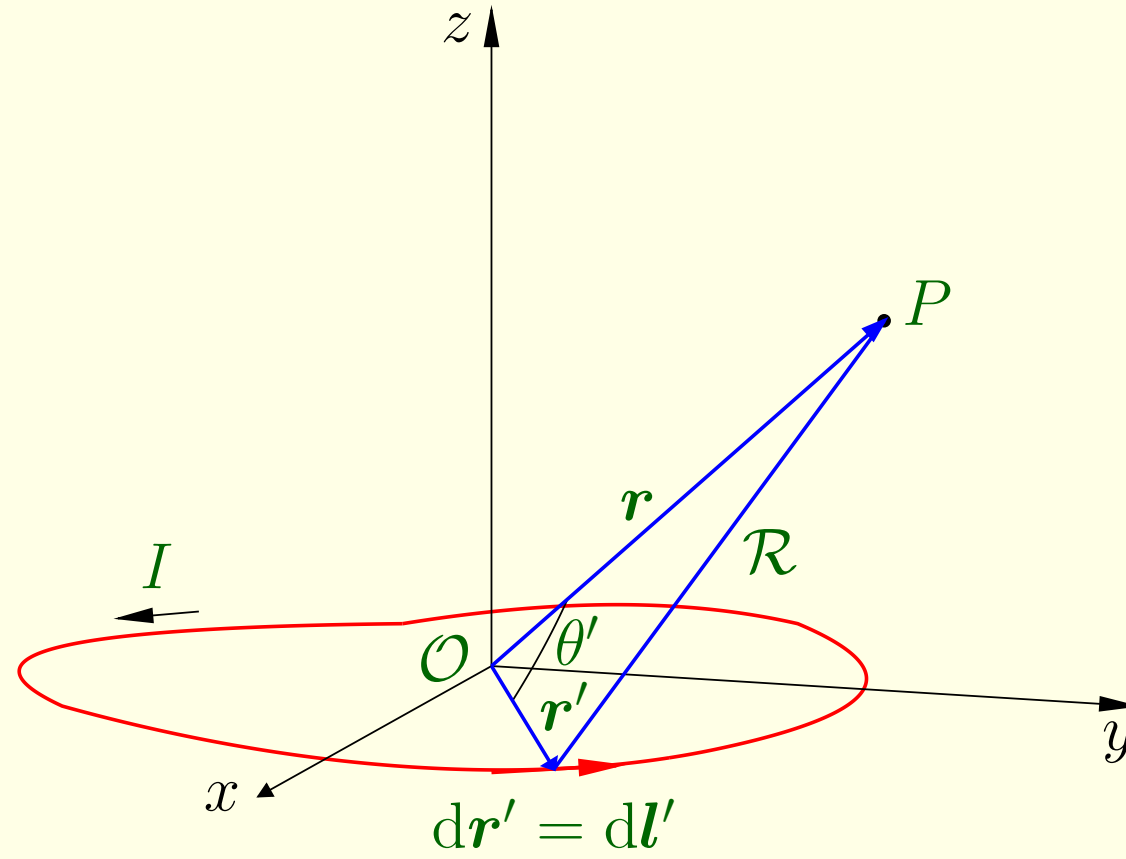
$\mathbf{A}_{\text{nad}} = \mathbf{A}_{\text{pod}}$  potencjał wektorowy jest ciągły

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  gwarantuje ciągłość składowej normalnej

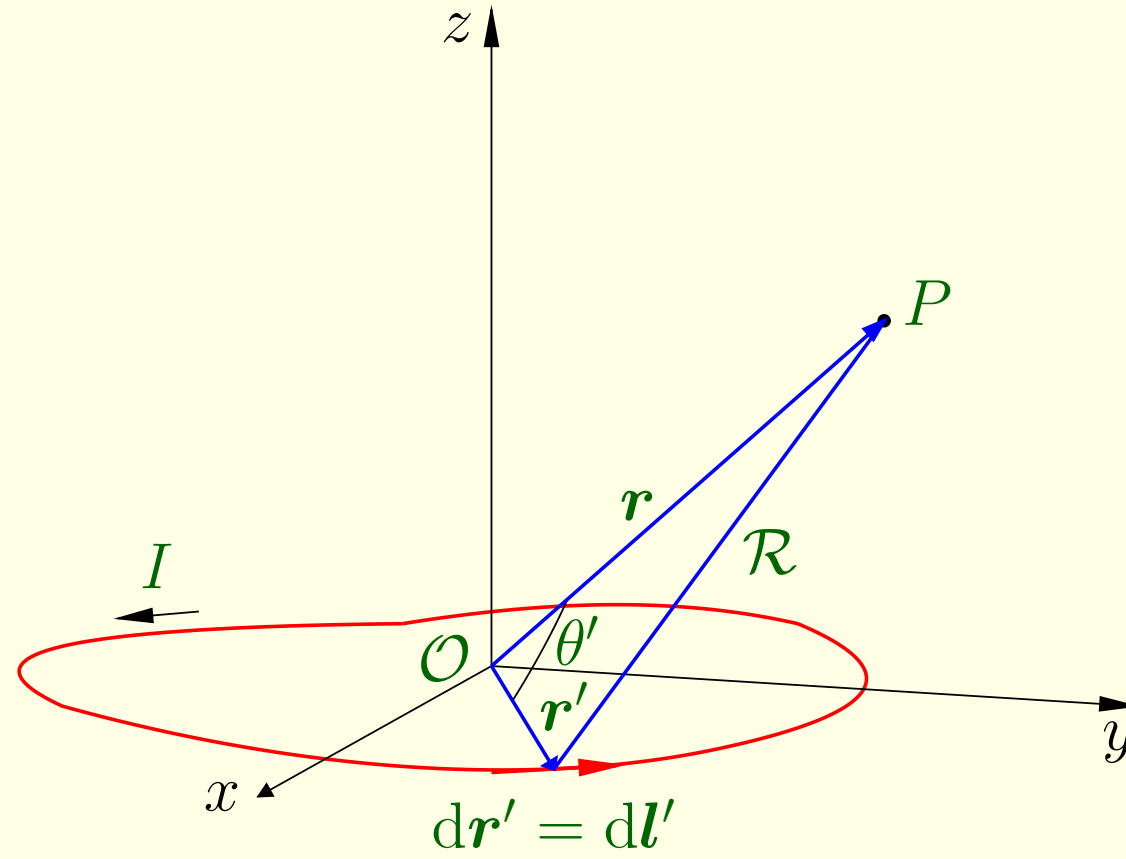
$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi$  ciągłość składowej stycznej

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{nad}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{pod}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

## 5.4.3 Multipolowe rozwinięcie potencjału wektorowego



### 5.4.3 Multipolowe rozwinięcie potencjału wektorowego



$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta')$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathcal{R}} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}'$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathcal{R}} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \dots \right]$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathcal{R}} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \dots \right]$$

$$\oint d\mathbf{l}' = 0, \quad \text{nie ma monopola magnetycznego}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathcal{R}} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \dots \right]$$

$$\oint d\mathbf{l}' = 0, \quad \text{nie ma monopola magnetycznego}$$

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathcal{R}} d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \dots \right]$$

$$\oint d\mathbf{l}' = 0, \quad \text{nie ma monopola magnetycznego}$$

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}'$$

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{a}'$$

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

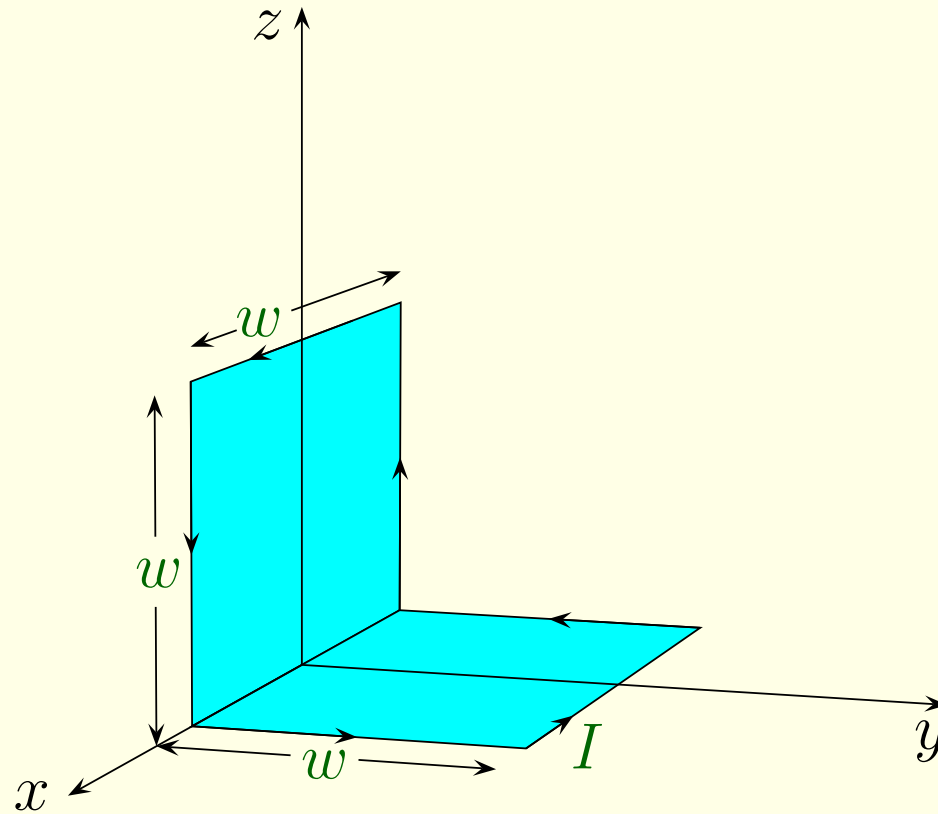
$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a} = I\mathbf{a}$$

magnetyczny moment dipolowy

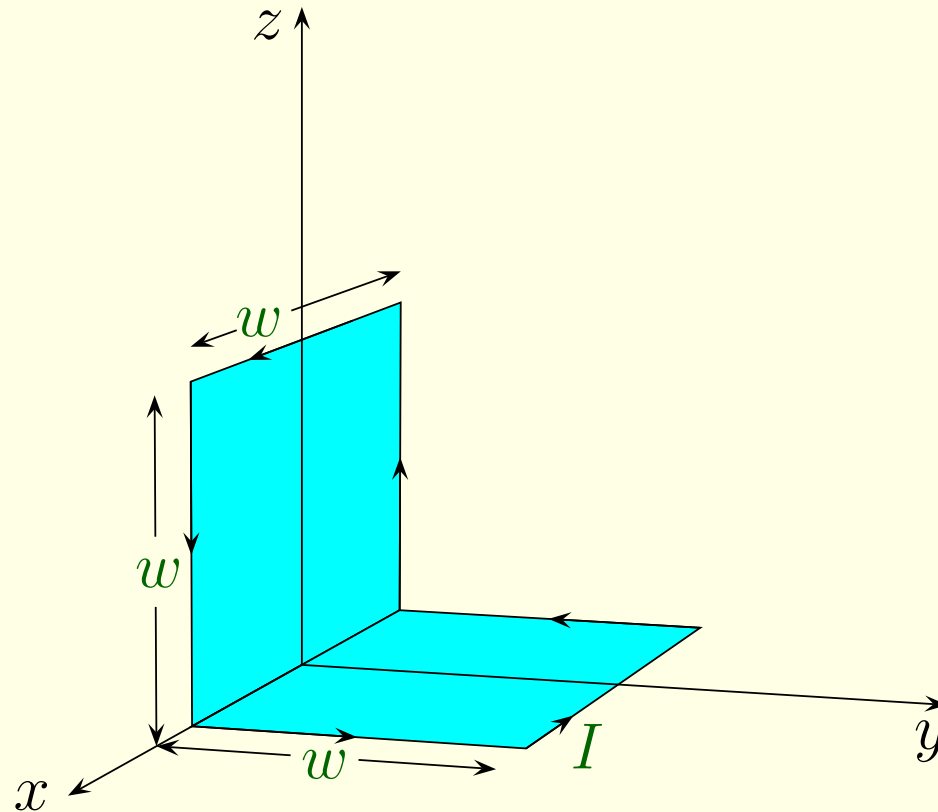
Przykład:

Znaleźć magnetyczny moment dipolowy pętli z prądem o natężeniu  $I$  przedstawionej na rysunku.



Przykład:

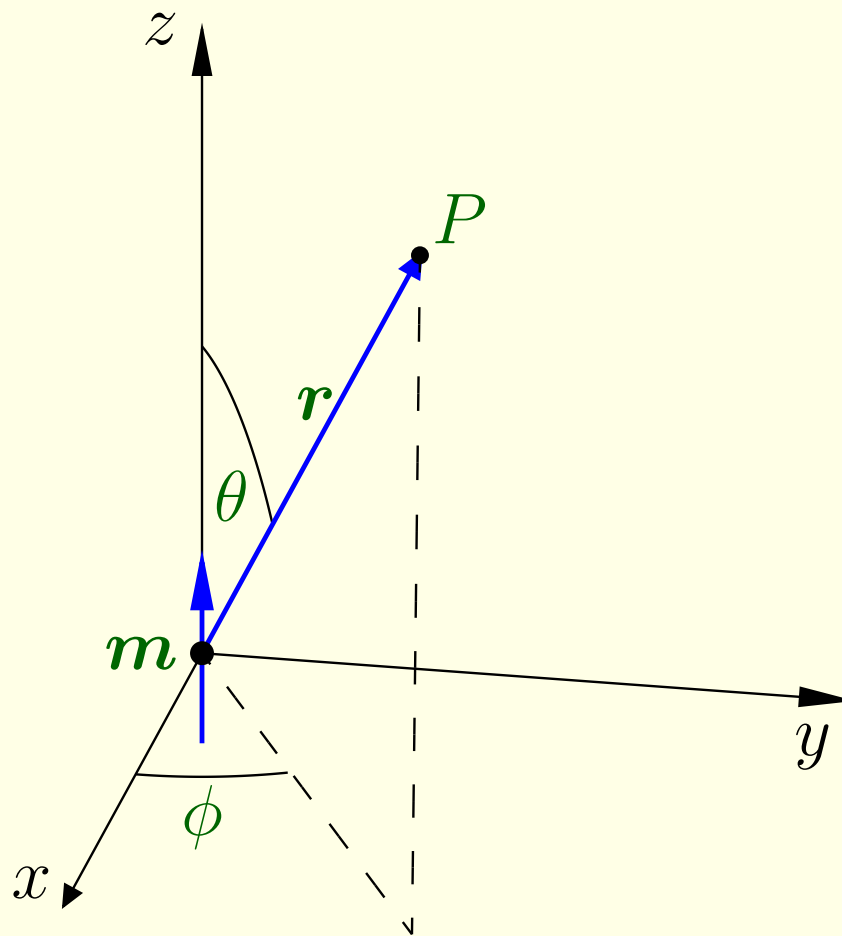
Znaleźć magnetyczny moment dipolowy pętli z prądem o natężeniu  $I$  przedstawionej na rysunku.



$$\mathbf{m} = Iw^2\hat{\mathbf{y}} + Iw^2\hat{\mathbf{z}}$$

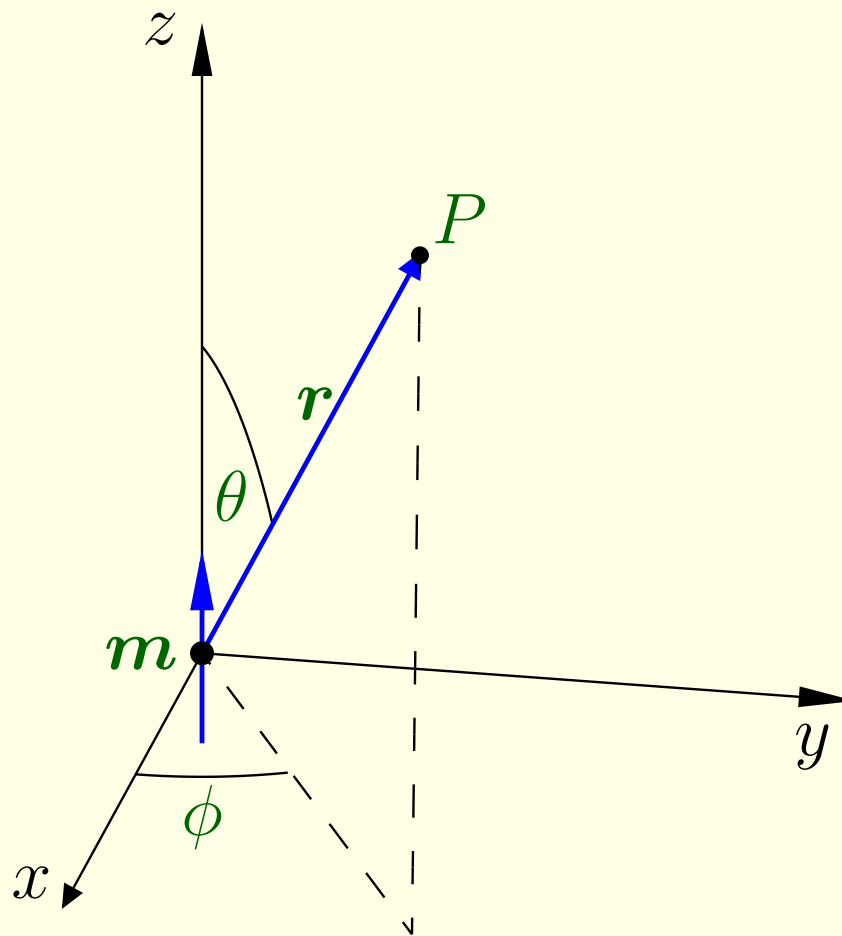
---





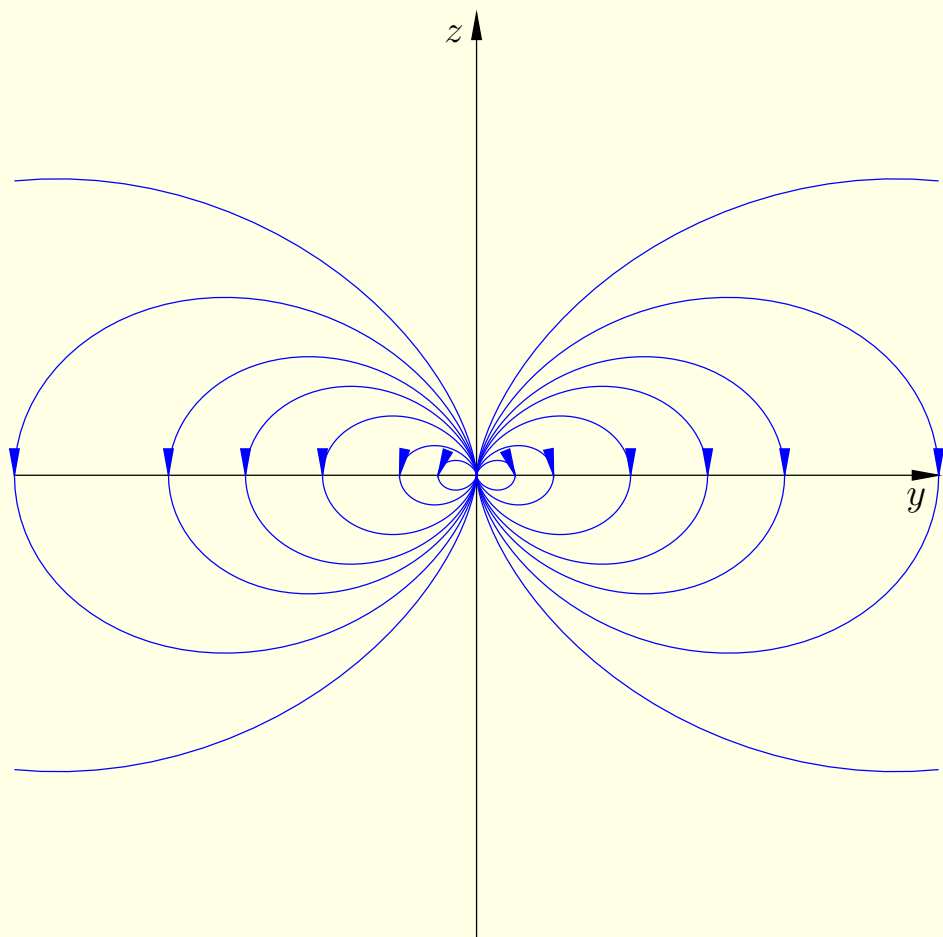
$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

potencjał dipola  $m$  umieszczonego w początku układu współrzędnych

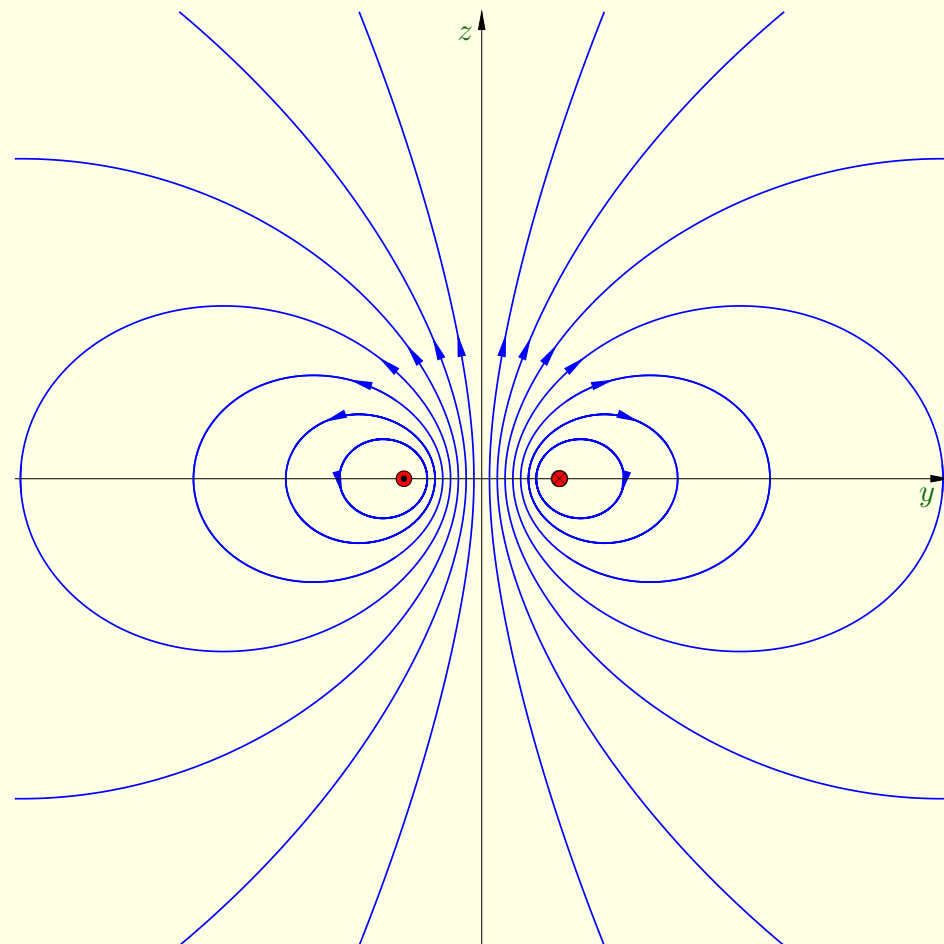


$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad \text{potencjał dipola } m \text{ umieszczonego w początku układu współrzędnych}$$

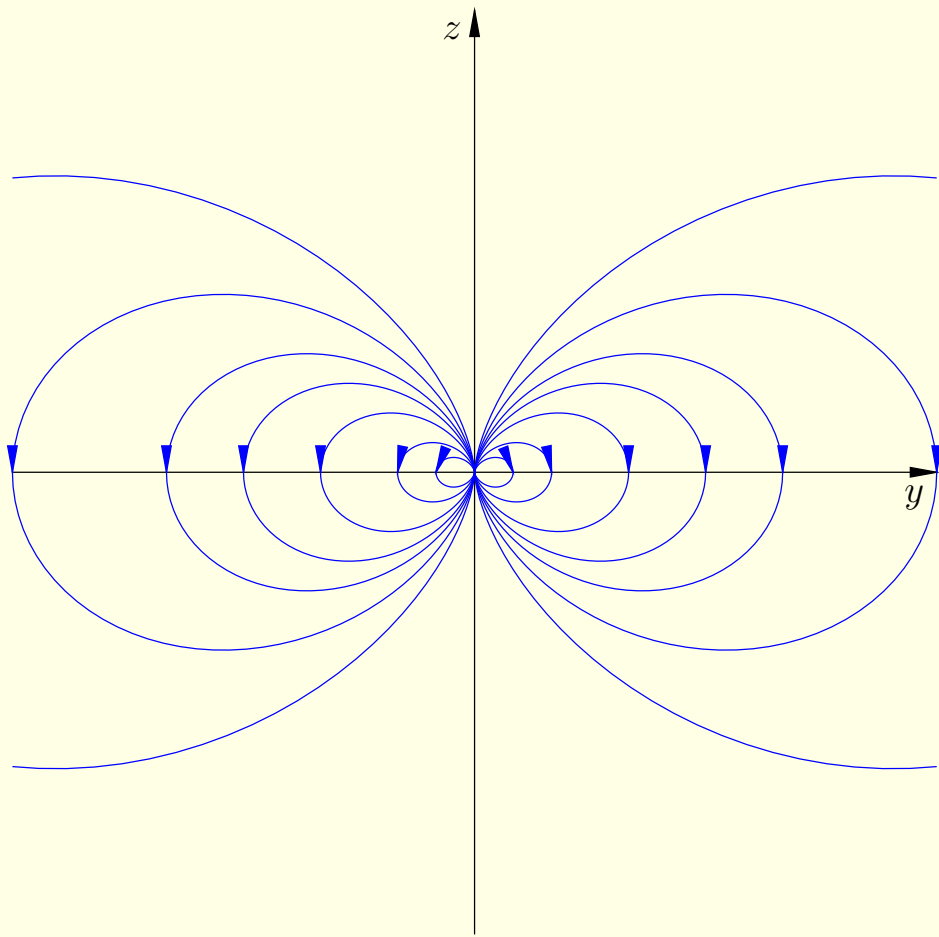
$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$



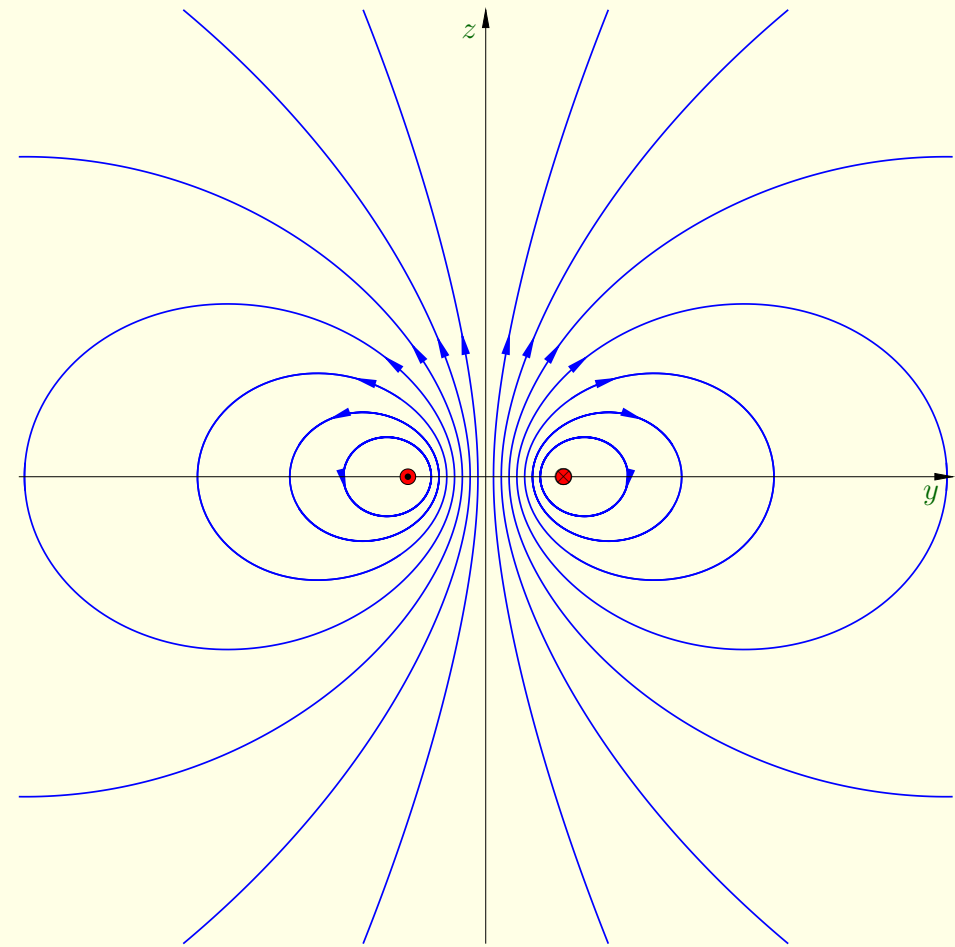
pole „czystego” dipola



pole „fizycznego” dipola



pole „czystego” dipola



pole „fizycznego” dipola

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]$$

indukcja magnetyczna dipola  
w postaci niezależnej od  
układu współrzędnych