

Elektrodynamika

Część 3

Pola elektryczne w materii

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

4	Pola elektryczne w materii	3
4.1	Polaryzacja elektryczna	3
4.2	Pole ciała spolaryzowanego	9
4.3	Pole indukcji elektrycznej	19
4.4	Dielektryki liniowe	23

4 Pola elektryczne w materii

4.1 Polaryzacja elektryczna

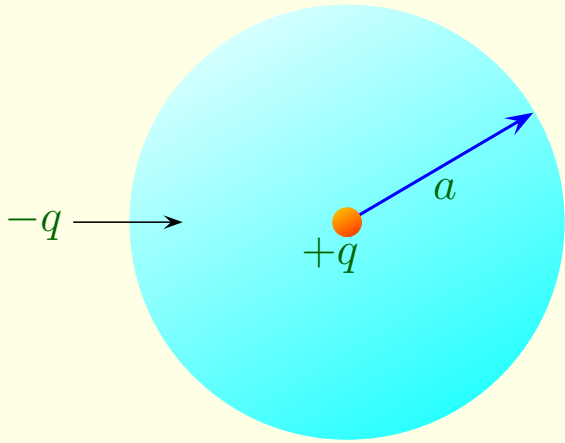
4.1.2 Indukowany moment dipolowy

Co się dzieje z atomem jeśli umieścimy go w polu elektrycznym \mathbf{E} ?

$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$, α — polaryzowalność atomowa

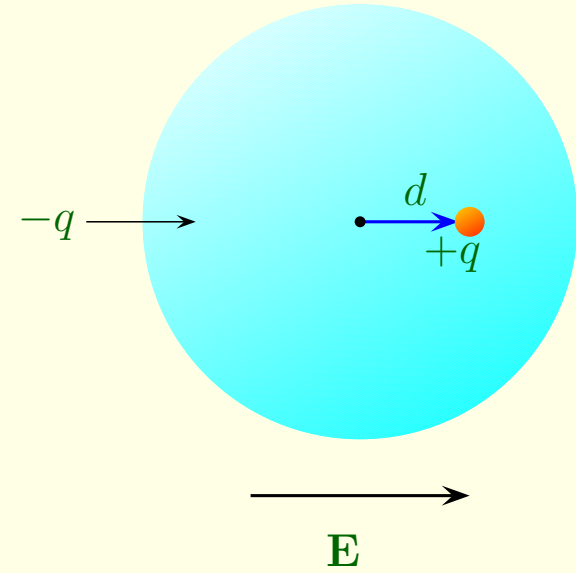
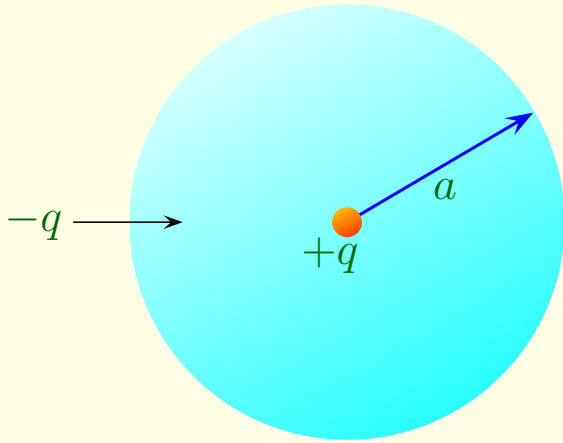
Przykład:

Przyjmijmy, że atom to punktowe jądro ($+q$) otoczone chmurą ładunku w kształcie jednorodnie naładowanej kuli o promieniu a i całkowitym ładunku $-q$. Obliczyć polaryzowalność atomową dla takiego modelu.



Przykład:

Przyjmijmy, że atom to punktowe jądro ($+q$) otoczone chmurą ładunku w kształcie jednorodnie naładowanej kuli o promieniu a i całkowitym ładunku $-q$. Obliczyć polaryzowalność atomową dla takiego modelu.

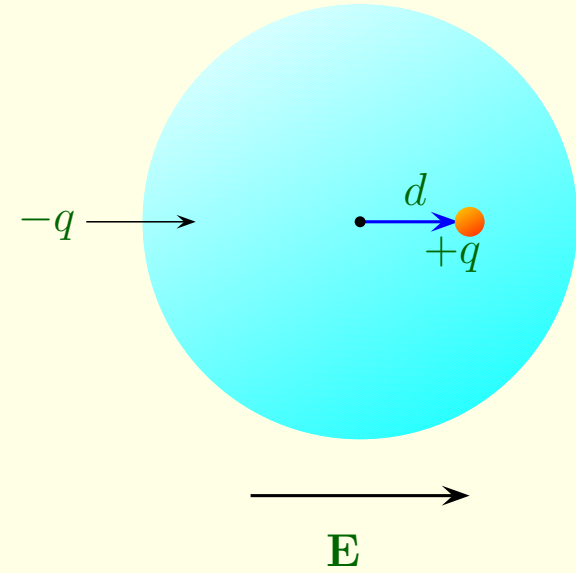
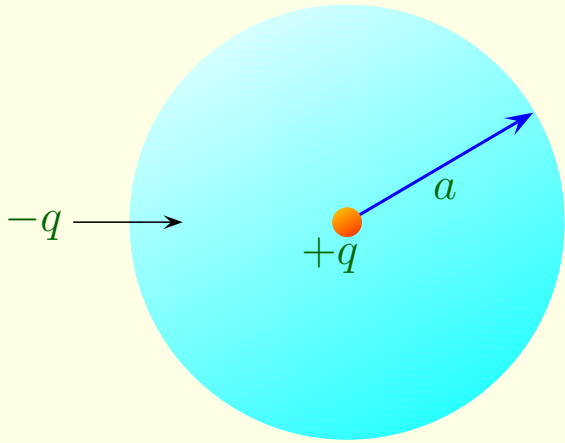


$$E = E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3},$$

pole przesuniętych ładunków
równoważy pole zewnętrzne

Przykład:

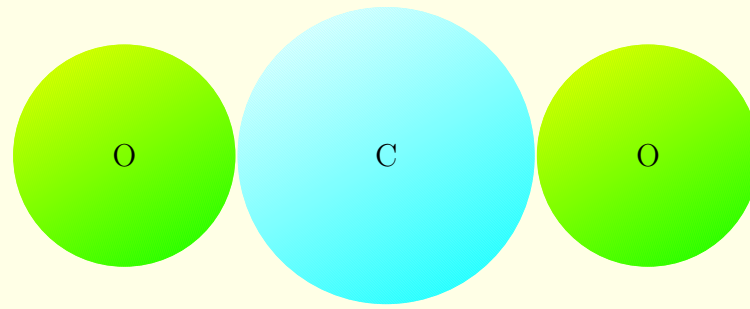
Przyjmijmy, że atom to punktowe jądro ($+q$) otoczone chmurą ładunku w kształcie jednorodnie naładowanej kuli o promieniu a i całkowitym ładunku $-q$. Obliczyć polaryzowalność atomową dla takiego modelu.



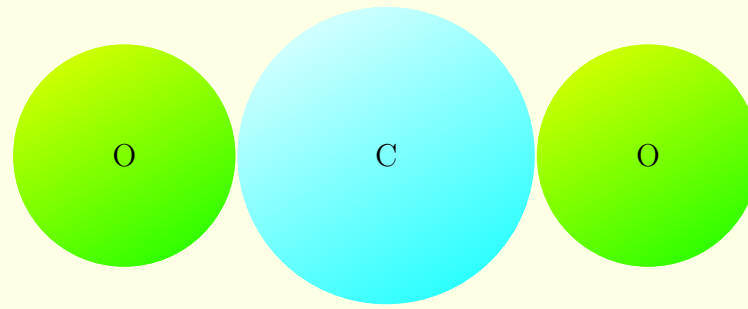
$$E = E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3},$$

pole przesuniętych ładunków
równoważy pole zewnętrzne

$$p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v$$

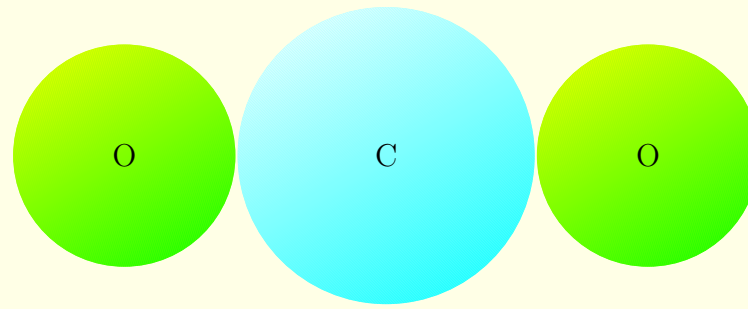


$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \text{cząsteczka anizotropowa}$$



$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$, cząsteczka anizotropowa

$$\begin{cases} \alpha_{\perp} = 2 \cdot 10^{-40} \left[\frac{\text{C}^2\text{m}}{\text{N}} \right] \\ \alpha_{\parallel} = 4.5 \cdot 10^{-40} \left[\frac{\text{C}^2\text{m}}{\text{N}} \right] \end{cases}$$

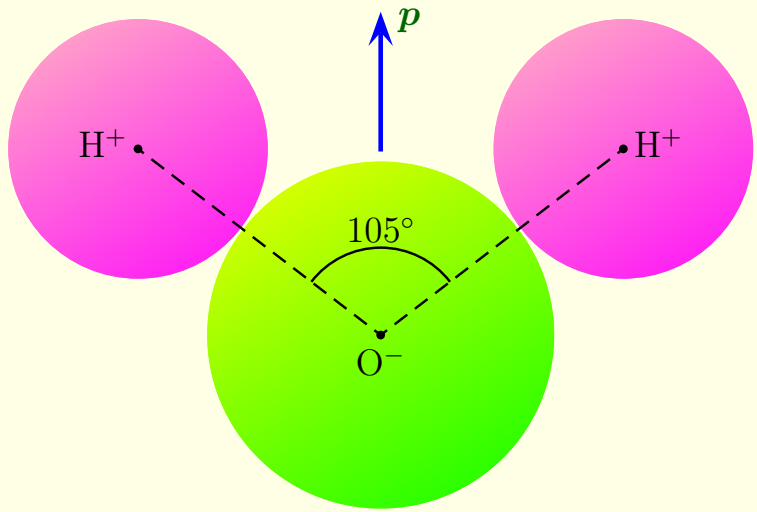


$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$, cząsteczka anizotropowa

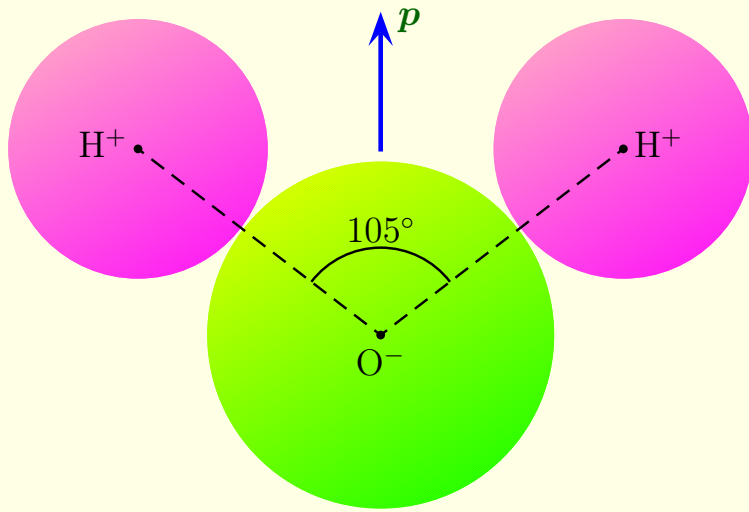
$$\begin{cases} \alpha_{\perp} = 2 \cdot 10^{-40} \left[\frac{\text{C}^2\text{m}}{\text{N}} \right] \\ \alpha_{\parallel} = 4.5 \cdot 10^{-40} \left[\frac{\text{C}^2\text{m}}{\text{N}} \right] \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \right\}, \quad \alpha_{ij} \text{ współrzędne tensora polaryzowalności}$$

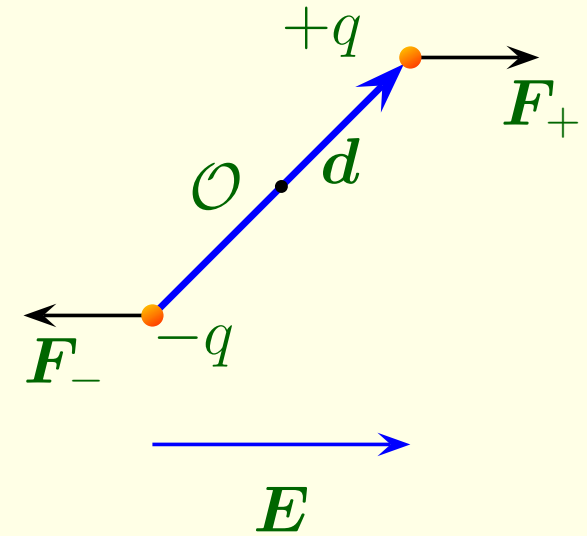
4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych



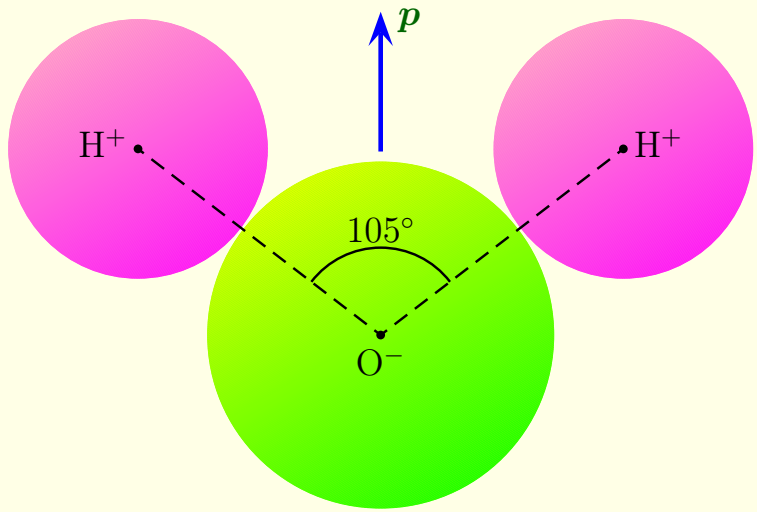
4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych



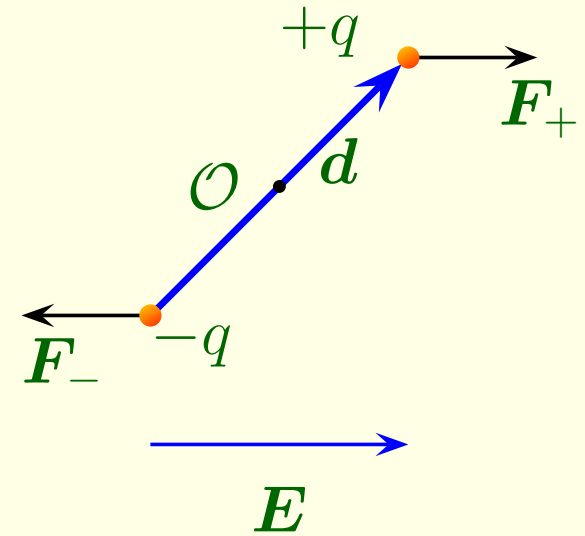
cząsteczka polarna



4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych

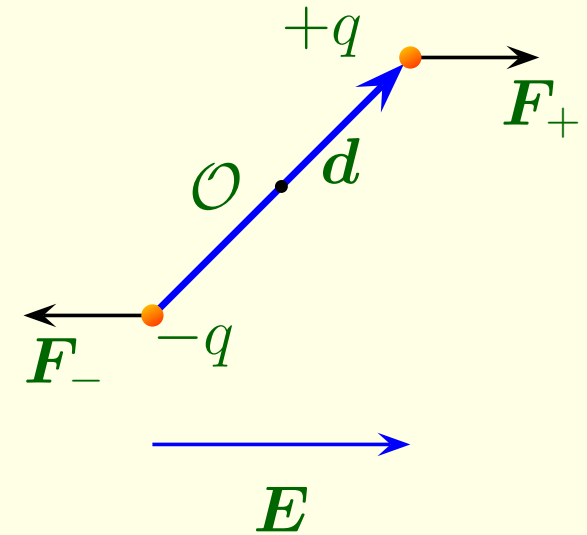
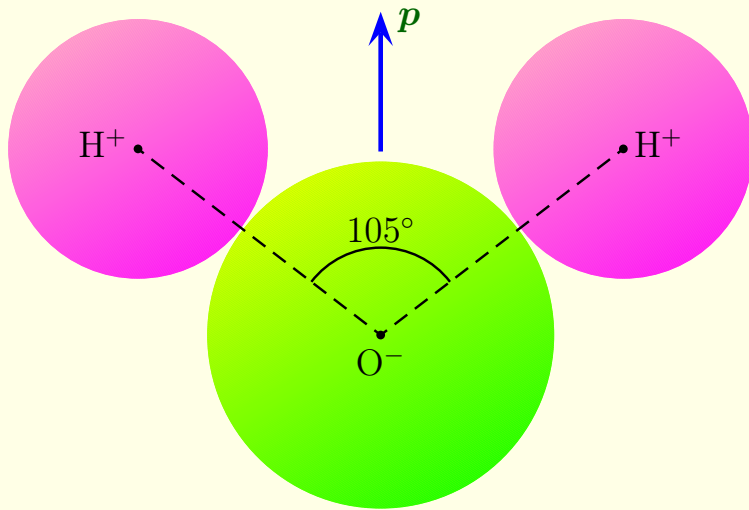


cząsteczka polarna



$$F_+ = qE = -F_- \quad \text{siły się równoważą}$$

4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych

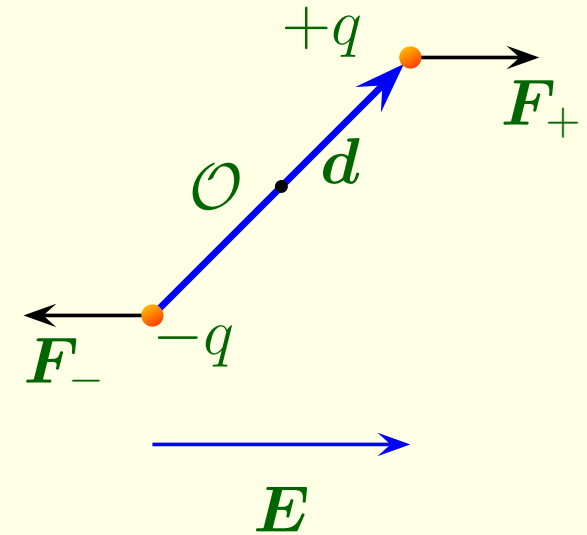
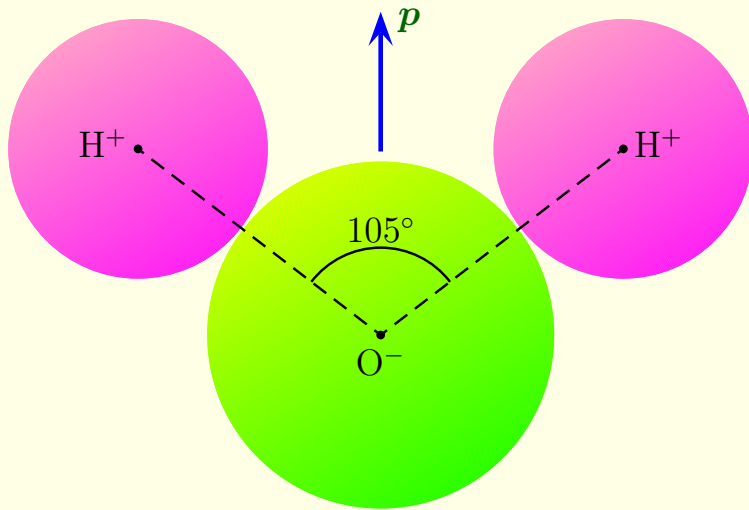


cząsteczka polarna

$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} = -\mathbf{F}_- \quad \text{siły się równoważą}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-)$$

4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych



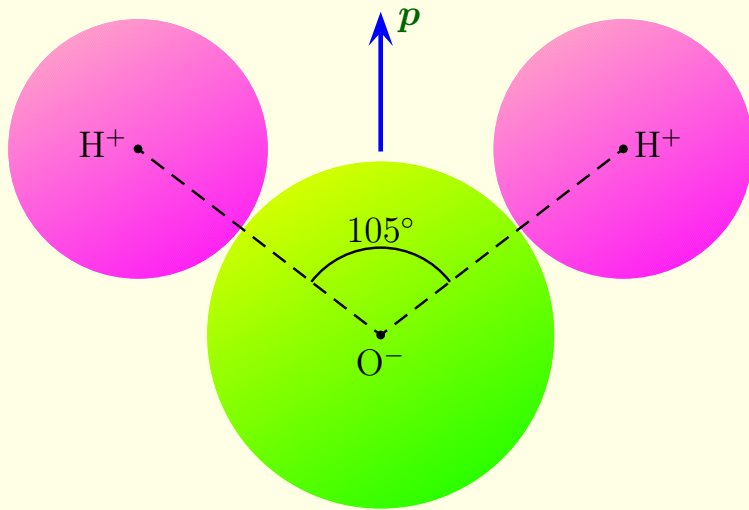
cząsteczka polarna

$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} = -\mathbf{F}_- \quad \text{siły się równoważą}$$

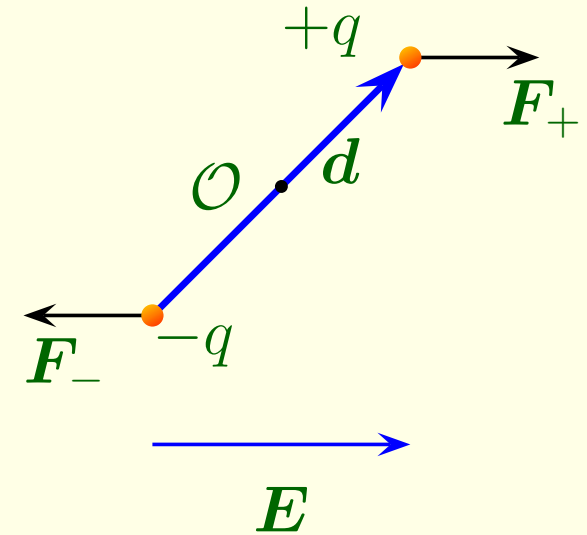
$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-)$$

$$= [(\mathbf{d}/2) \times (q\mathbf{E})] + [(-\mathbf{d}/2) \times (-q\mathbf{E})]$$

4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych



cząsteczka polarna



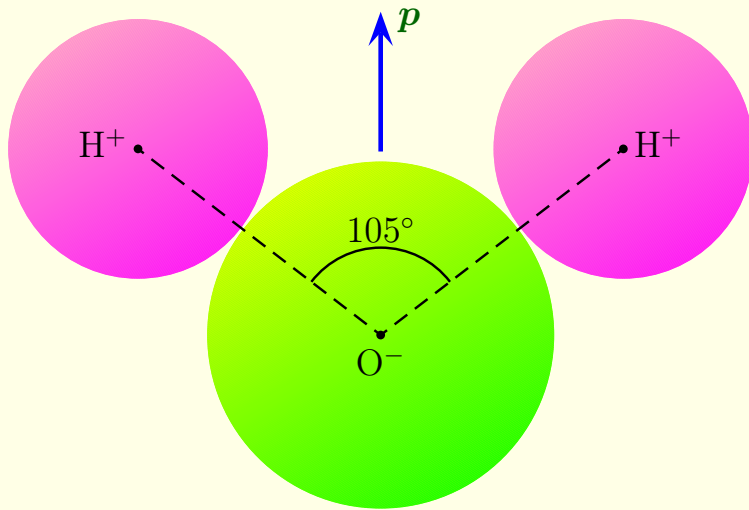
$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} = -\mathbf{F}_- \quad \text{siły się równoważą}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-)$$

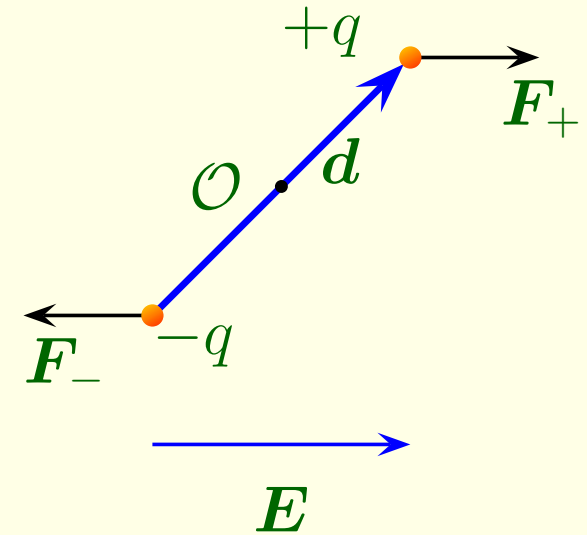
$$= [(\mathbf{d}/2) \times (q\mathbf{E})] + [(-\mathbf{d}/2) \times (-q\mathbf{E})]$$

$$= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \quad \text{moment siły}$$

4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych



cząsteczka polarna



$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} = -\mathbf{F}_- \quad \text{siły się równoważą}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= [(\mathbf{d}/2) \times (q\mathbf{E})] + [(-\mathbf{d}/2) \times (-q\mathbf{E})] \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \quad \text{moment siły}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\delta \mathbf{E}) \quad \text{pole niejednorodne}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\delta \mathbf{E}) \quad \text{pole niejednorodne}$$

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\delta \mathbf{E}) \quad \text{pole niejednorodne}$$

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}} \quad \text{siła działająca na dipol w polu niejednorodnym}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\delta \mathbf{E}) \quad \text{pole niejednorodne}$$

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}} \quad \text{siła działająca na dipol w polu niejednorodnym}$$

$$\boxed{U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}} \quad \text{energia dipola w polu}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q(\delta \mathbf{E}) \quad \text{pole niejednorodne}$$

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}} \quad \text{siła działająca na dipol w polu niejednorodnym}$$

$$\boxed{U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}} \quad \text{energia dipola w polu}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad \text{energia oddziaływania dwóch dipoli}$$

4.1.4 Polaryzacja elektryczna

Co się dzieje z dielektrykiem umieszczonym w polu?

4.1.4 Polaryzacja elektryczna

Co się dzieje z dielektrykiem umieszczonym w polu?

Materiał zostaje **spolaryzowany**.

4.1.4 Polaryzacja elektryczna

Co się dzieje z dielektrykiem umieszczonym w polu?

Materiał zostaje **spolaryzowany**.

$\mathbf{P} \equiv$ moment dipolowy na jednostkę objętości

4.1.4 Polaryzacja elektryczna

Co się dzieje z dielektrykiem umieszczonym w polu?

Materiał zostaje **spolaryzowany**.

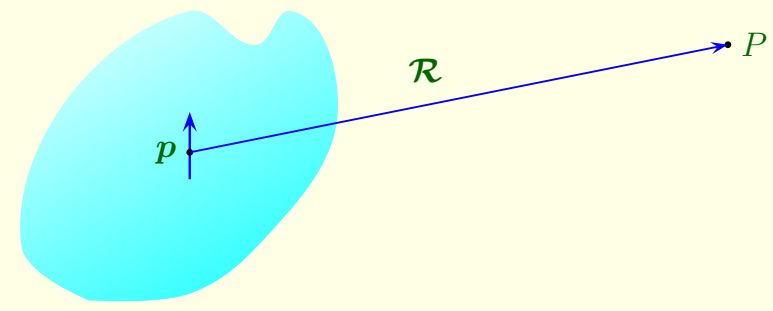
P \equiv moment dipolowy na jednostkę objętości

polaryzacja elektryczna

4.2 Pole ciała spolaryzowanego

4.2.1 Ładunki związane

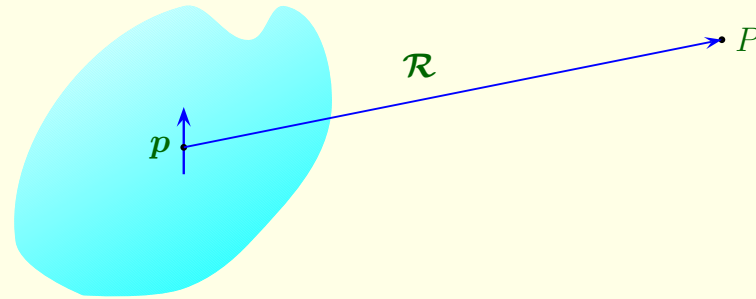
Jakie pole wytwarza spolaryzowane ciało?



4.2 Pole ciała spolaryzowanego

4.2.1 Ładunki związane

Jakie pole wytwarza spolaryzowane ciało?

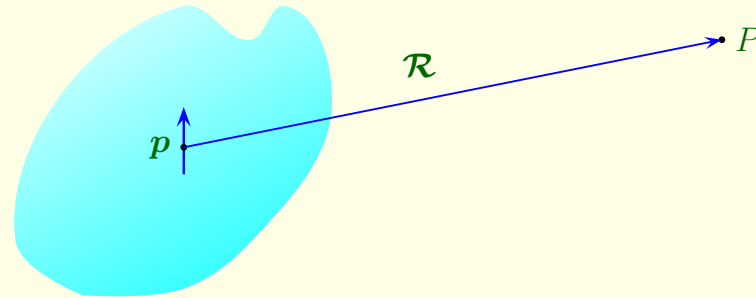


$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{p}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{dla pojedynczego dipola}$$

4.2 Pole ciała spolaryzowanego

4.2.1 Ładunki związane

Jakie pole wytwarza spolaryzowane ciało?



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{p}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{dla pojedynczego dipola}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d\tau' \quad \text{dla objętości } \mathcal{V}$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) d\tau',$$

korzystamy z

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) d\tau', \quad \text{korzystamy z}$$
$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{R}} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \right]$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) d\tau', \quad \text{korzystamy z}$$
$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{R}} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \right]$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{\mathcal{R}} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau'$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) d\tau', \quad \text{korzystamy z}$$

$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{R}} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \right]$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{\mathcal{R}} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau'$$

$$\sigma_{zw} \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

gęstość powierzchniowa ładunków związanych

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) d\tau', \quad \text{korzystamy z}$$
$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{R}} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \right]$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{\mathcal{R}} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau'$$

$$\sigma_{zw} \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

gęstość powierzchniowa ładunków związanych

$$\rho_{zw} \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

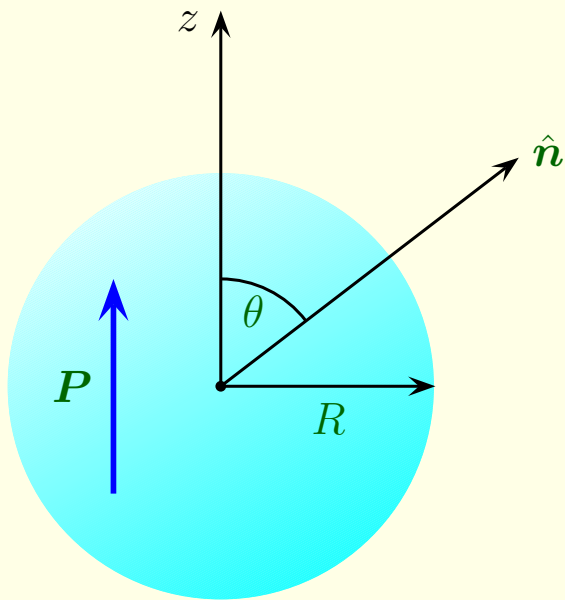
gęstość objętościowa ładunków związanych

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{zw}}{\mathcal{R}} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{zw}}{\mathcal{R}} d\tau'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{zw}}{\mathcal{R}} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{zw}}{\mathcal{R}} d\tau'$$

Przykład:

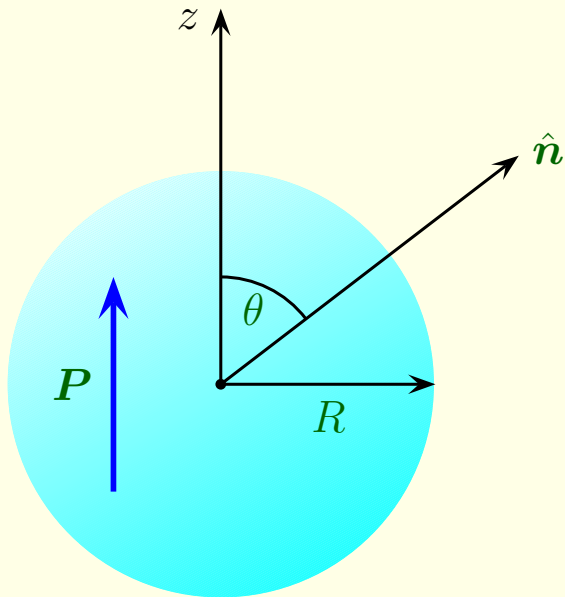
Znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez jednorodnie spolaryzowaną kulę o promieniu R .



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{zw}}{\mathcal{R}} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{zw}}{\mathcal{R}} d\tau'$$

Przykład:

Znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez jednorodnie spolaryzowaną kulę o promieniu R .



$$\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta$$

Szukamy pola wytworzonego przez rozkład powierzchniowy ładunku $P \cos \theta$. To już obliczyliśmy!

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{dla } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{dla } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{dla } r < R, \quad \text{pole jednorodne}$$

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{dla } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{dla } r < R, \quad \text{pole jednorodne}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{dla } r \geq R, \quad \begin{array}{l} \text{potencjał od dipola} \\ \text{umieszczonego w środku kuli} \end{array}$$

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{dla } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{dla } r < R, \quad \text{pole jednorodne}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{dla } r \geq R, \quad \begin{array}{l} \text{potencjał od dipola} \\ \text{umieszczonego w środku kuli} \end{array}$$

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}, \quad \text{wartość dipola}$$

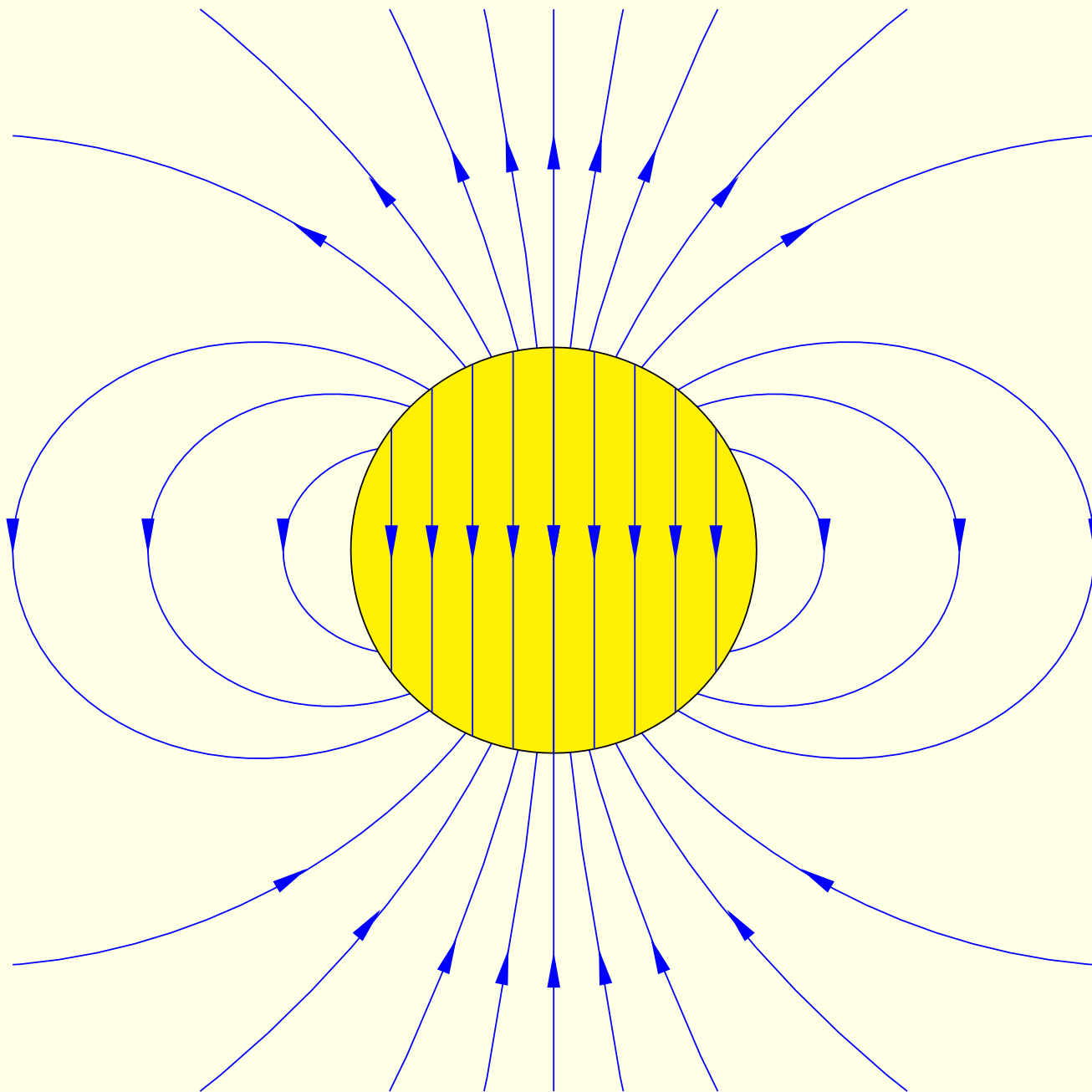
$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta & \text{dla } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{dla } r < R, \quad \text{pole jednorodne}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{dla } r \geq R, \quad \begin{array}{l} \text{potencjał od dipola} \\ \text{umieszczonego w środku kuli} \end{array}$$

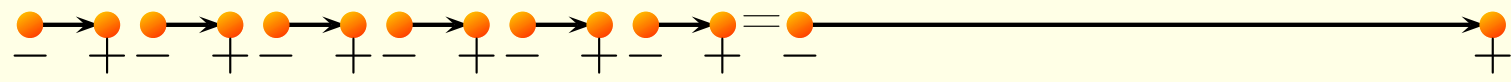
$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P}, \quad \text{wartość dipola}$$

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad \text{pole dipola}$$

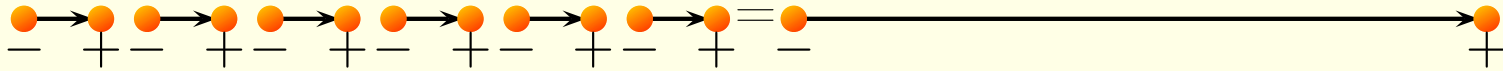


linie pola dla jednorodnie spolaryzowanej kuli

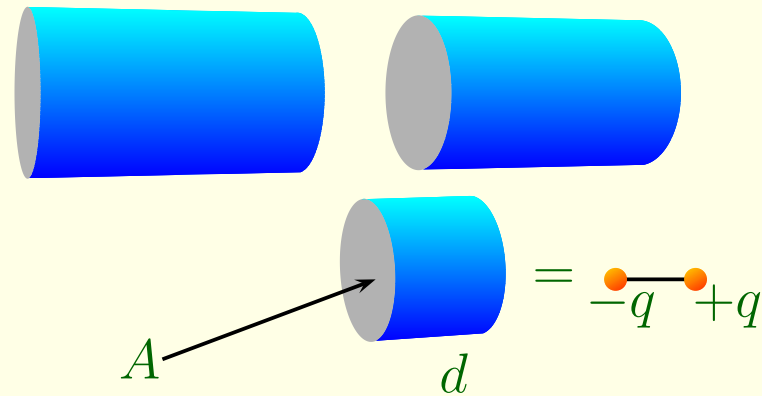
4.2.2 Fizyczna interpretacja ładunków związanych



4.2.2 Fizyczna interpretacja ładunków związanych

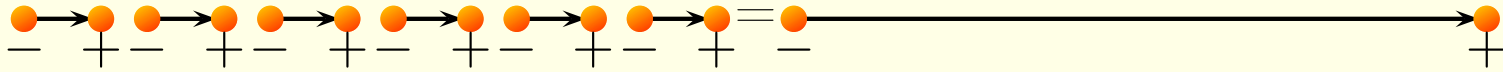


Spolaryzowany walec

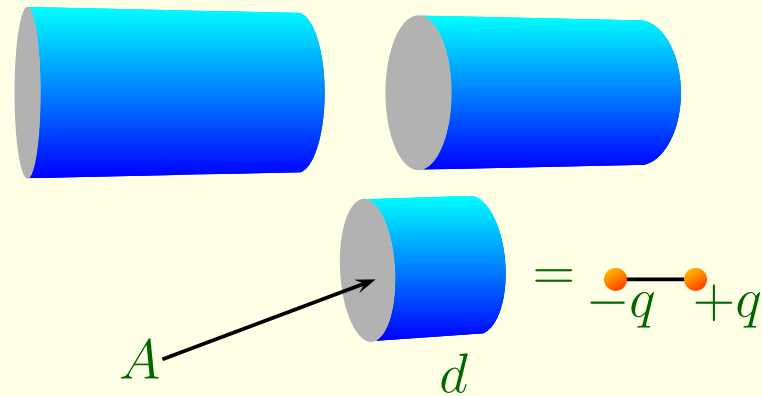


$$P(Ad) = (PA)d = qd \quad \text{moment dipolowy wycinka}$$

4.2.2 Fizyczna interpretacja ładunków związanych

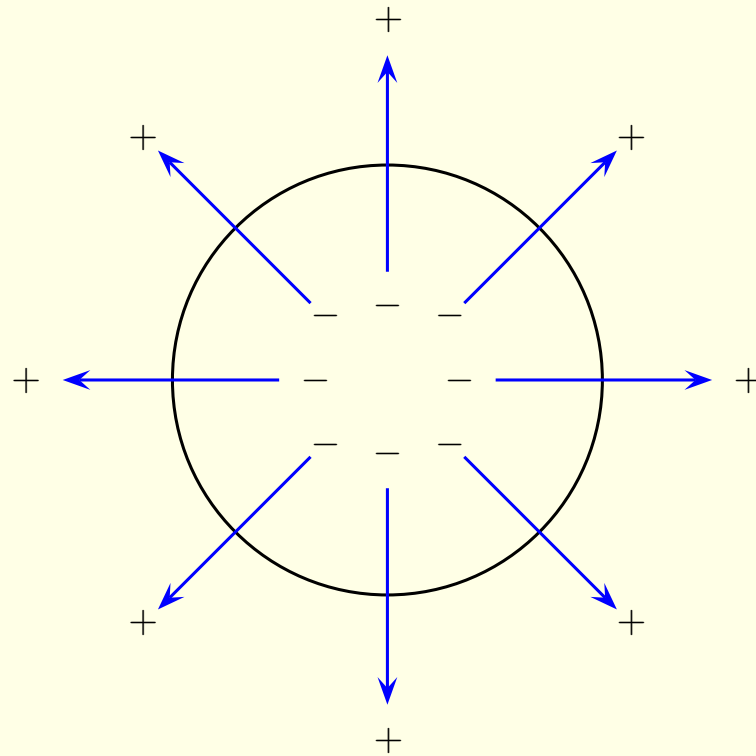


Spolaryzowany walec



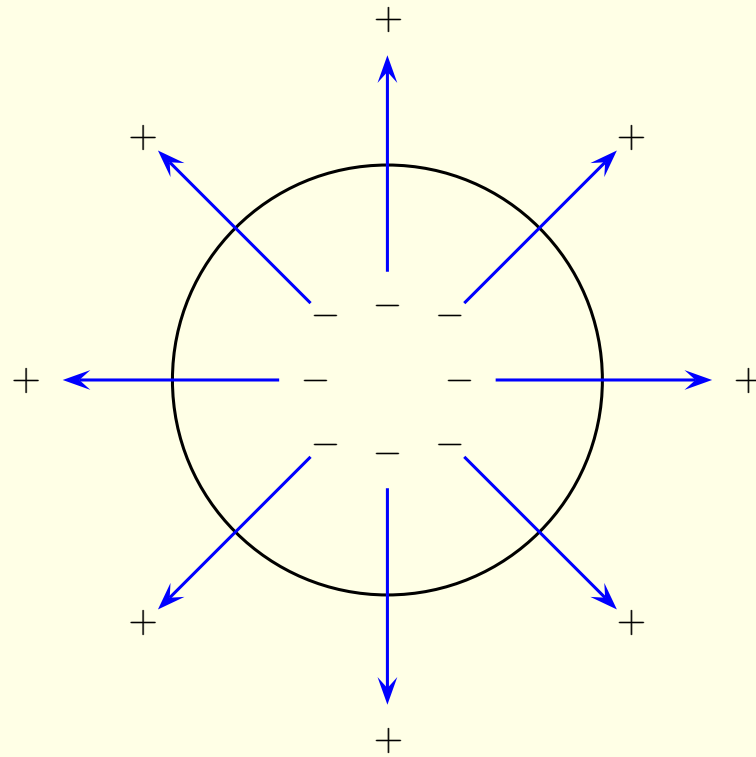
$$P(Ad) = (PA)d = qd \quad \text{moment dipolowy wycinka}$$

$$\sigma_{zw} = \frac{q}{A} = P \quad \text{gęstość powierzchniowa ładunku}$$



polaryzacja niejednorodna

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_{zw} d\tau = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = - \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{P}) d\tau$$

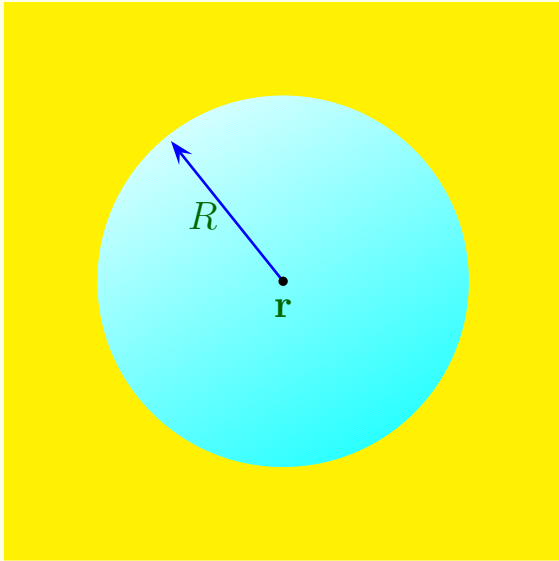


polaryzacja niejednorodna

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_{zw} d\tau = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = - \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{P}) d\tau$$

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

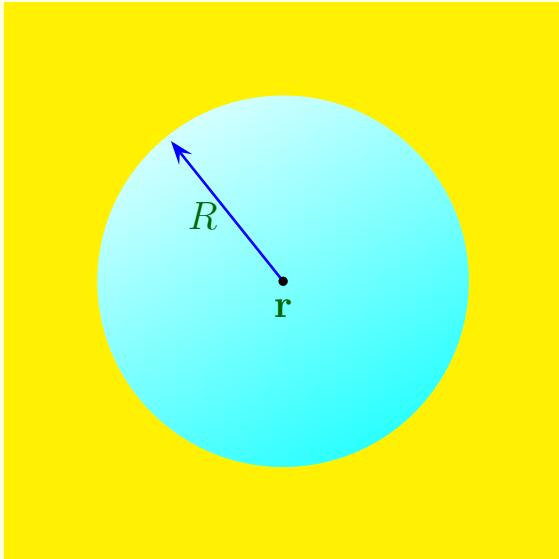
4.2.3 Pole w dielektryku



chcemy obliczyć **pole makroskopowe**
w punkcie \mathbf{r} ; rozważmy kulę o
promieniu R wokół punktu \mathbf{r}

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{zew} + \mathbf{E}_{wew}$$

4.2.3 Pole w dielektryku

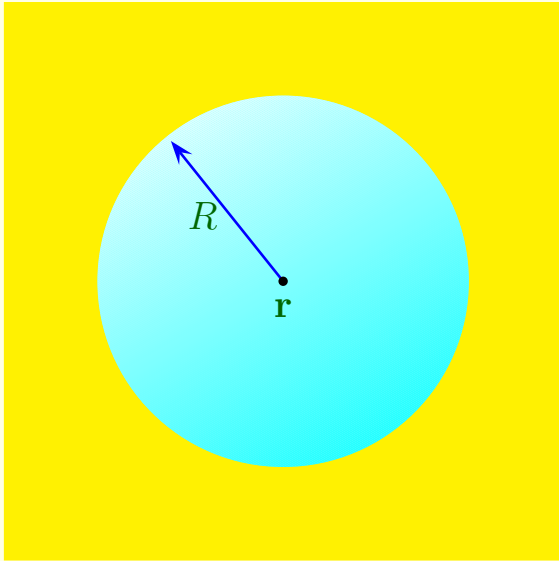


chcemy obliczyć pole makroskopowe w punkcie r ; rozważmy kulę o promieniu R wokół punktu r

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{zew} + \mathbf{E}_{wew}$$

$\mathbf{E}_{wew} = ?$. jakie jest pole od ładunków wewnątrz kuli?

4.2.3 Pole w dielektryku



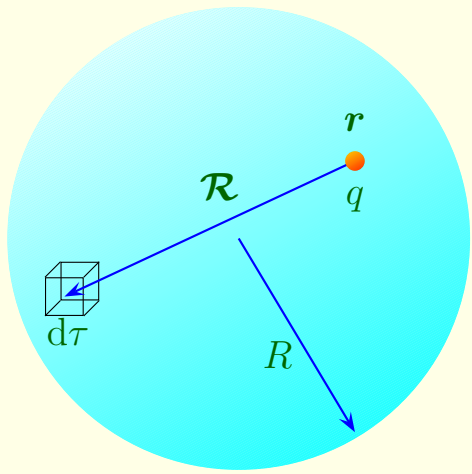
chcemy obliczyć **pole makroskopowe** w punkcie r ; rozważmy kulę o promieniu R wokół punktu r

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{zew} + \mathbf{E}_{wew}$$

$\mathbf{E}_{wew} = ?$. jakie jest pole od ładunków wewnątrz kuli?

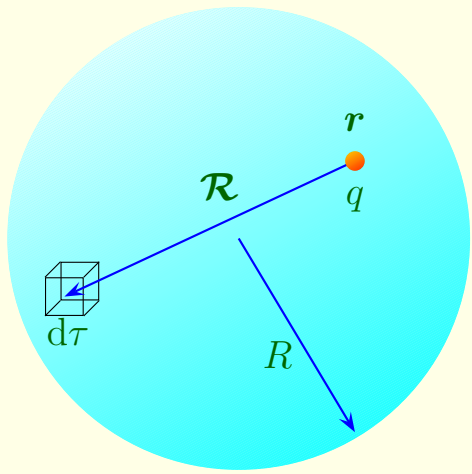
$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}$$

uśrednione pole od ładunków znajdujących się wewnątrz kuli o promieniu R ; \mathbf{p} jest całkowitym momentem dipolowym



obliczamy średnie pole od ładunku q
umieszczonego w punkcie \mathbf{r}

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} d\tau$$

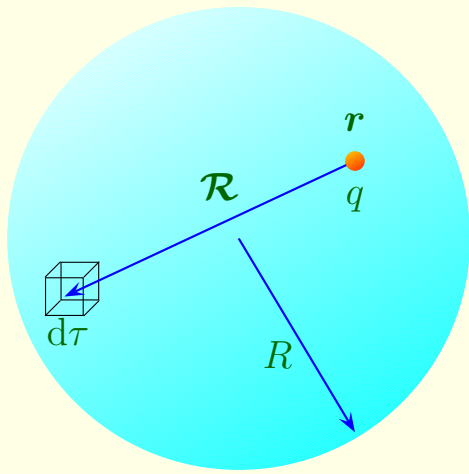


obliczamy średnie pole od ładunku q
umieszczonego w punkcie \mathbf{r}

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

$$\mathbf{E}_{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

pole w punkcie \mathbf{r} od równomiernie
naładowanej kuli, które łatwo policzyć



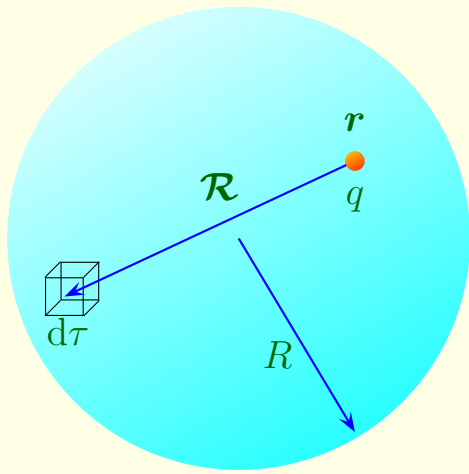
obliczamy średnie pole od ładunku q
umieszczonego w punkcie \mathbf{r}

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

$$\mathbf{E}_{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

pole w punkcie \mathbf{r} od równomiernie
naładowanej kuli, które łatwo policzyć

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \mathbf{E}_{\rho} \quad \text{jeśli } \rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



obliczamy średnie pole od ładunku q
umieszczonego w punkcie \mathbf{r}

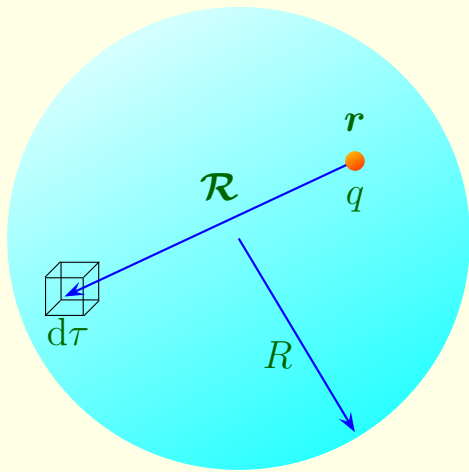
$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

pole w punkcie \mathbf{r} od równomiernie
naładowanej kuli, które łatwo policzyć

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \mathbf{E}_\rho \quad \text{jeśli } \rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}$$



obliczamy średnie pole od ładunku q umieszczonego w punkcie \mathbf{r}

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

$$\mathbf{E}_{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R^2} \hat{\mathbf{R}} d\tau$$

pole w punkcie \mathbf{r} od równomiernie naładowanej kuli, które łatwo policzyć

$$\mathbf{E}_{\text{śred}} = \mathbf{E}_{\rho} \quad \text{jeśli } \rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\mathbf{E}_{\rho} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}$$

$$\mathbf{E}_{\text{wew}} = \mathbf{E}_{\text{śred}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}$$

uśrednione pole od ładunków wewnątrz kuli



$$V_{\text{zew}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{na zewnątrz kuli}} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d\tau'$$

potencjał od ładunków
zewnętrznych

$$V_{\text{zew}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{na zewnątrz kuli}} \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R^2} d\tau'$$

potencjał od ładunków
zewnętrznych

$$\mathbf{E}_{\text{wew}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad \mathbf{p} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \mathbf{P}$$

$$V_{\text{zew}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{na zewnątrz kuli}} \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R^2} d\tau'$$

potencjał od ładunków
zewnętrznych

$$\mathbf{E}_{\text{zew}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad \mathbf{p} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E}_{\text{zew}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

$$V_{zew} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{na zewnątrz kuli}} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d\tau'$$

potencjał od ładunków
zewnętrznych

$$\mathbf{E}_{zew} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad \mathbf{p} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right) \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E}_{zew} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

Uśrednione po dowolnej kuli pole pochodzące od ładunków wewnątrz kuli jest takie samo jak pole w środku jednorodnie spolaryzowanej kuli

$$V_{zew} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{na zewnątrz kuli}} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d\tau'$$

potencjał od ładunków
zewnątrznych

$$\mathbf{E}_{wew} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad \mathbf{p} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right) \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E}_{wew} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

Uśrednione po dowolnej kuli pole pochodzące od ładunków wewnątrz kuli jest takie samo jak pole w środku jednorodnie spolaryzowanej kuli

Potencjał pola makroskopowego:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d\tau'$$

całka obejmuje całą
objętość dielektryka

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw}$ gęstość ładunków związanych i swobodnych

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw}$ gęstość ładunków związanych i swobodnych

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_{zw} + \rho_{sw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{sw} \quad \text{prawo Gaussa}$$

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw}$ gęstość ładunków związanych i swobodnych

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_{zw} + \rho_{sw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{sw} \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{sw}$$

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw}$ gęstość ładunków związanych i swobodnych

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_{zw} + \rho_{sw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{sw} \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{sw}$$

$$\boxed{\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$$

wektor indukcji elektrycznej

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw}$ gęstość ładunków związanych i swobodnych

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_{zw} + \rho_{sw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{sw} \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{sw}$$

$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ wektor indukcji elektrycznej

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}$ prawo Gaussa

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw}$ gęstość ładunków związanych i swobodnych

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_{zw} + \rho_{sw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{sw} \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{sw}$$

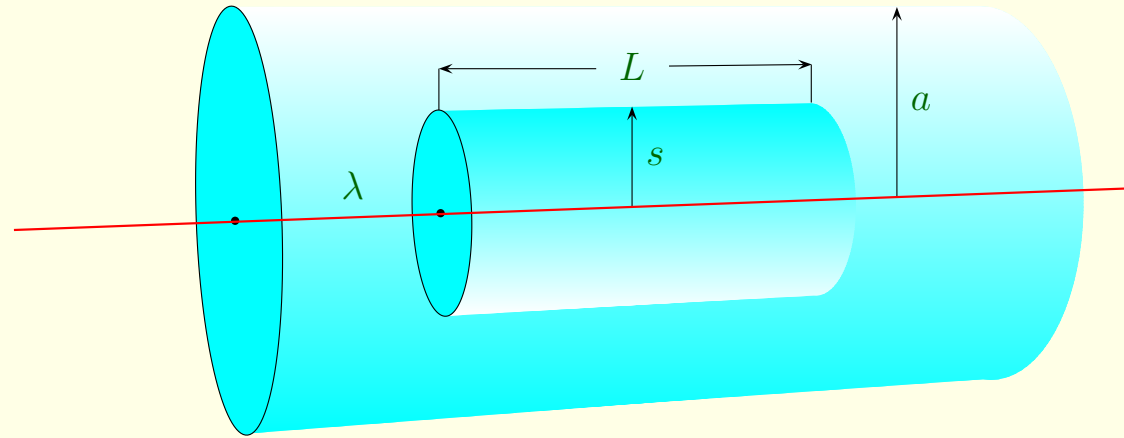
$$\boxed{\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad \text{wektor indukcji elektrycznej}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}} \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{sw \text{ wew}}$$

Przykład:

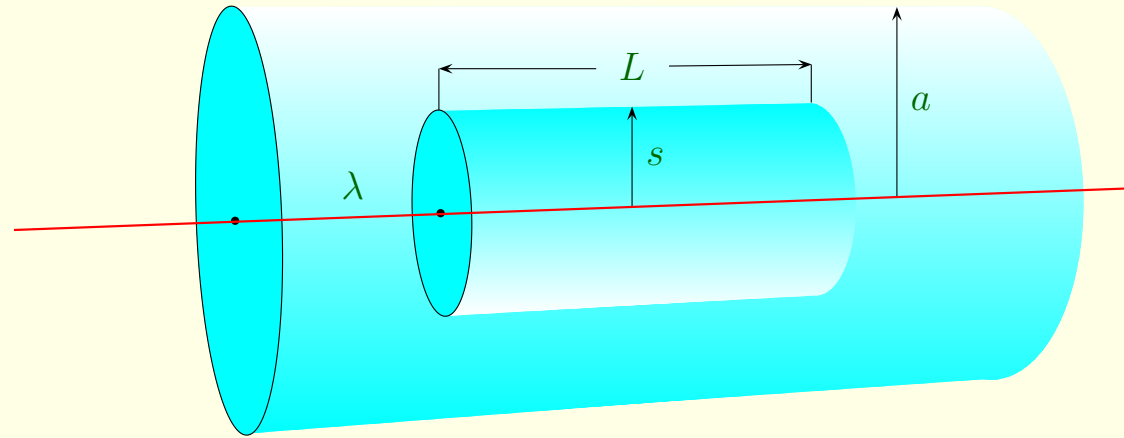
Długi prosty drut, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ , otoczony jest gumową izolacją. Promień warstwy izolacji wynosi a . Znaleźć indukcję elektryczną w tym układzie.



$$D(2\pi sL) = \lambda L \quad \text{z prawa Gaussa}$$

Przykład:

Długi prosty drut, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ , otoczony jest gumową izolacją. Promień warstwy izolacji wynosi a . Znaleźć indukcję elektryczną w tym układzie.

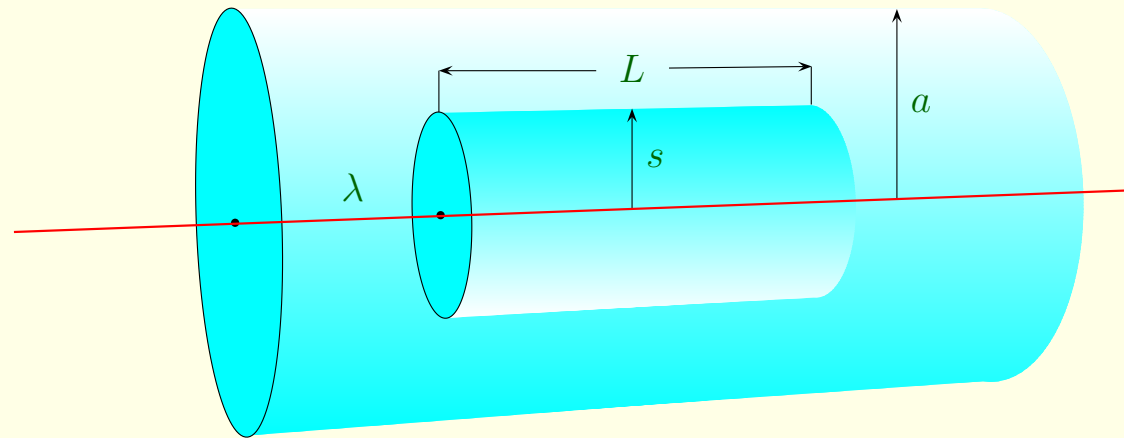


$$D(2\pi sL) = \lambda L \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{\mathbf{s}}, \quad \text{wzór słuszny wewnątrz i na zewnątrz izolacji}$$

Przykład:

Długi prosty drut, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ , otoczony jest gumową izolacją. Promień warstwy izolacji wynosi a . Znaleźć indukcję elektryczną w tym układzie.



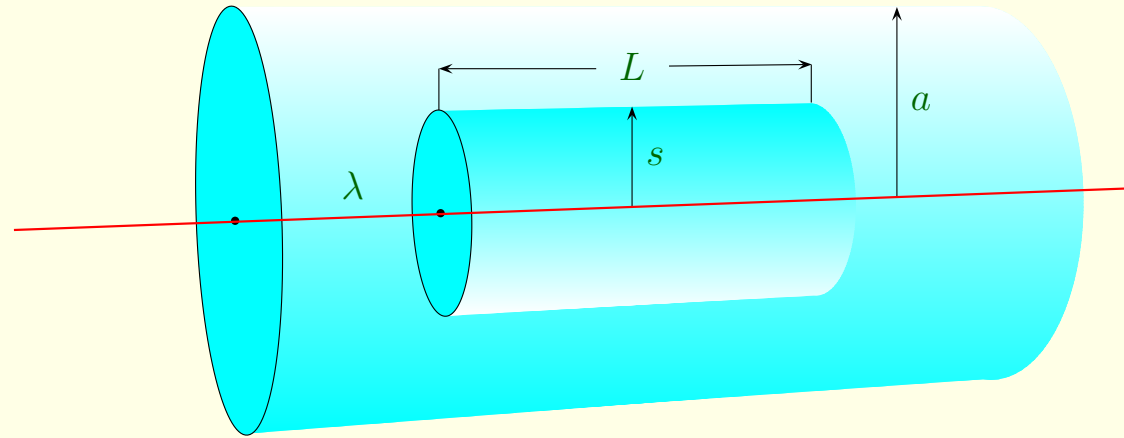
$$D(2\pi sL) = \lambda L \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{\mathbf{s}}, \quad \text{wzór słuszny wewnątrz i na zewnątrz izolacji}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}} \quad \text{dla } s > a \quad (\mathbf{P} = 0)$$

Przykład:

Długi prosty drut, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ , otoczony jest gumową izolacją. Promień warstwy izolacji wynosi a . Znaleźć indukcję elektryczną w tym układzie.



$$D(2\pi sL) = \lambda L \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{\mathbf{s}}, \quad \text{wzór słuszny wewnątrz i na zewnątrz izolacji}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}} \quad \text{dla } s > a \quad (\mathbf{P} = 0)$$

Wewnątrz izolacji nie znamy \mathbf{P} !

4.3.2 Zwodnicze podobieństwo

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho_{\text{sw}}(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{dla } \mathbf{D} \text{ nie ma „prawa Coulomba”}$$

4.3.2 Zwodnicze podobieństwo

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho_{\text{sw}}(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{dla } \mathbf{D} \text{ nie ma „prawa Coulomba”}$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon_0(\nabla \times \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{P}) = \nabla \times \mathbf{P}$$

Do wyznaczenia pola wektorowego nie wystarczy znajomość dywergencji. Trzeba jeszcze znać rotację.

4.3.2 Zwodnicze podobieństwo

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho_{\text{sw}}(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{dla } \mathbf{D} \text{ nie ma „prawa Coulomba”}$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon_0(\nabla \times \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{P}) = \nabla \times \mathbf{P}$$

Do wyznaczenia pola wektorowego nie wystarczy znajomość dywergencji. Trzeba jeszcze znać rotację.

$$\nabla \times \mathbf{D} \neq 0, \quad \mathbf{D} \text{ nie jest gradientem skalara,}$$

\mathbf{D} nie ma potencjału!

\mathbf{D} nie jest wyznaczone wyłącznie przez ładunek swobodny.

4.3.3 Warunki brzegowe

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{sw wew}}$$

4.3.3 Warunki brzegowe

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{sw wew}}$$

$$D_{\text{nad}}^{\perp} - D_{\text{pod}}^{\perp} = \sigma_{\text{sw}} \quad \text{skok składowej prostopadłej}$$

4.3.3 Warunki brzegowe

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{sw wew}}$$

$$D_{\text{nad}}^{\perp} - D_{\text{pod}}^{\perp} = \sigma_{\text{sw}} \quad \text{skok składowej prostopadłej}$$

$$D_{\text{nad}}^{\parallel} - D_{\text{pod}}^{\parallel} = P_{\text{nad}}^{\parallel} - P_{\text{pod}}^{\parallel}, \quad \text{skok składowej równoległej}$$

4.3.3 Warunki brzegowe

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{sw wew}}$$

$$D_{\text{nad}}^{\perp} - D_{\text{pod}}^{\perp} = \sigma_{\text{sw}} \quad \text{skok składowej prostopadłej}$$

$$D_{\text{nad}}^{\parallel} - D_{\text{pod}}^{\parallel} = P_{\text{nad}}^{\parallel} - P_{\text{pod}}^{\parallel}, \quad \text{skok składowej równoległej}$$

W obecności dielektyka te warunki są często bardziej użyteczne niż warunki dla pola.

$$E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

$$\mathbf{E}_{\text{nad}}^{\parallel} - \mathbf{E}_{\text{pod}}^{\parallel} = 0$$

4.4 Dielektryki liniowe

4.4.1 Podatność elektryczna i przenikalność elektryczna

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{dla niezbyt silnych pól}$$

4.4 Dielektryki liniowe

4.4.1 Podatność elektryczna i przenikalność elektryczna

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{dla niezbyt silnych pól}$$

χ_e jest podatnością elektryczną ośrodka

4.4 Dielektryki liniowe

4.4.1 Podatność elektryczna i przenikalność elektryczna

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{dla niezbyt silnych pól}$$

χ_e jest podatnością elektryczną ośrodka

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E},$$

w ośrodkach
liniowych

4.4 Dielektryki liniowe

4.4.1 Podatność elektryczna i przenikalność elektryczna

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{dla niezbyt silnych pól}$$

χ_e jest podatnością elektryczną ośrodka

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E},$$

w ośrodkach
liniowych

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} \text{ jest proporcjonalne do } \mathbf{E}$$

4.4 Dielektryki liniowe

4.4.1 Podatność elektryczna i przenikalność elektryczna

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{dla niezbyt silnych pól}$$

χ_e jest podatnością elektryczną ośrodka

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E},$$

w ośrodkach
liniowych

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} \text{ jest proporcjonalne do } \mathbf{E}$$

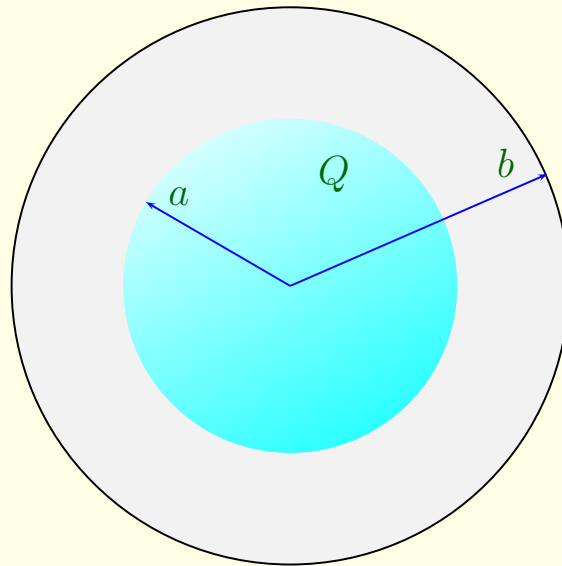
$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad \text{przenikalność elektryczna ośrodka}$$

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad \text{względna przenikalność elektryczna}$$

$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, względna przenikalność elektryczna

Przykład:

Metalowa kula o promieniu a naładowana została ładunkiem Q . Kula otoczona jest powłoką z dielektryka o przenikalności elektrycznej ϵ ; promień powłoki wynosi b . Znaleźć różnicę potencjałów między środkiem kuli i punktem w nieskończoności.



$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$, dla $r > a$ ze względu na symetrię sferyczną

$E = P = D = 0,$ wewnątrz metalowej kuli

$\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$, wewnątrz metalowej kuli

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } r > b \end{cases}$$

$\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$, wewnątrz metalowej kuli

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } r > b \end{cases}$$

$$V = - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$, wewnątrz metalowej kuli

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } r > b \end{cases}$$

$$V = - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr - \int_a^0 (0) dr$$

$\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$, wewnątrz metalowej kuli

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } r > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr - \int_a^0 (0) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) \end{aligned}$$

$\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$, wewnątrz metalowej kuli

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{dla } r > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr - \int_a^0 (0) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) \end{aligned}$$

Nie musieliśmy obliczać polaryzacji ani gęstości ładunków związanych!

Chociaż w tym przypadku nie jest to trudne.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

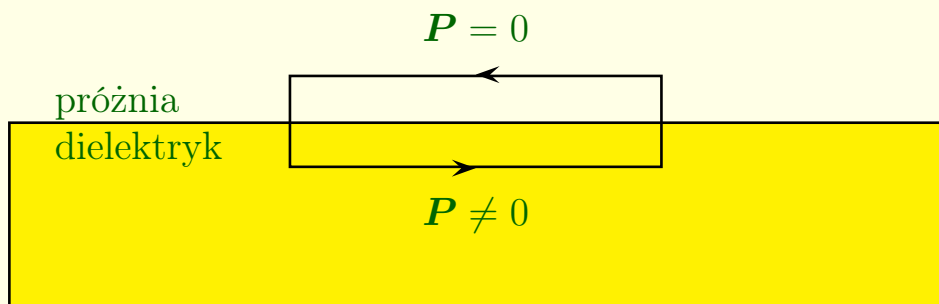
$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

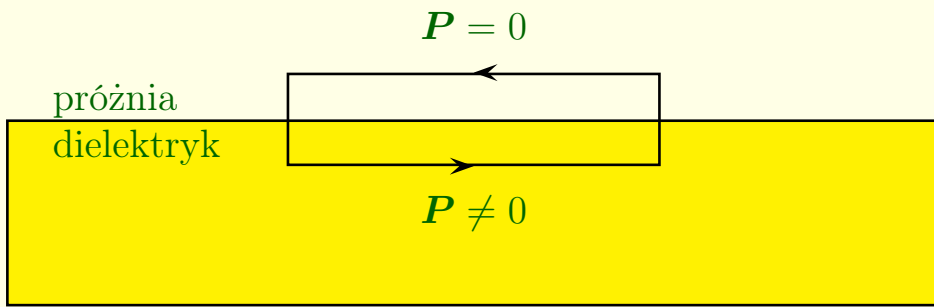
$$\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon b^2} & \text{na powierzchni zewnętrznej} \\ -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon a^2} & \text{na powierzchni wewnętrznej} \end{cases}$$

Znak minus wynika z tego, że wektor $\hat{\mathbf{n}}$ jest skierowany na zewnątrz dielektryka ($+\hat{\mathbf{r}}$ dla $r = b$ i $-\hat{\mathbf{r}}$ dla $r = a$).



$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{P} \neq 0,$$

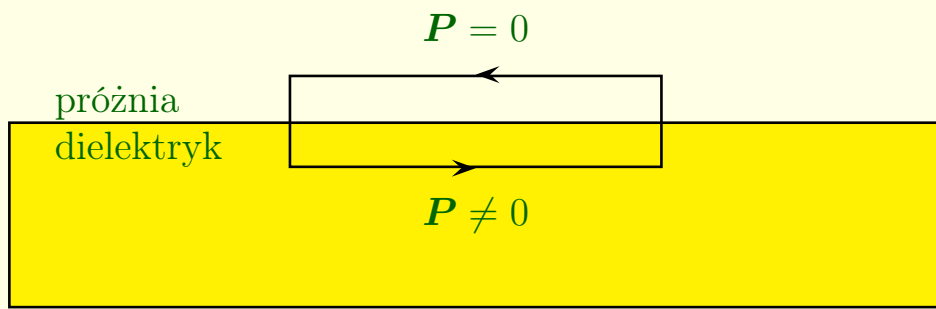
$\epsilon_0 \chi_e$ różne po obu stronach



$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{P} \neq 0,$$

$\epsilon_0 \chi_e$ różne po obu stronach

Także dla dielektryków liniowych podobieństwo \mathbf{D} i \mathbf{E} jest zwodnicze.

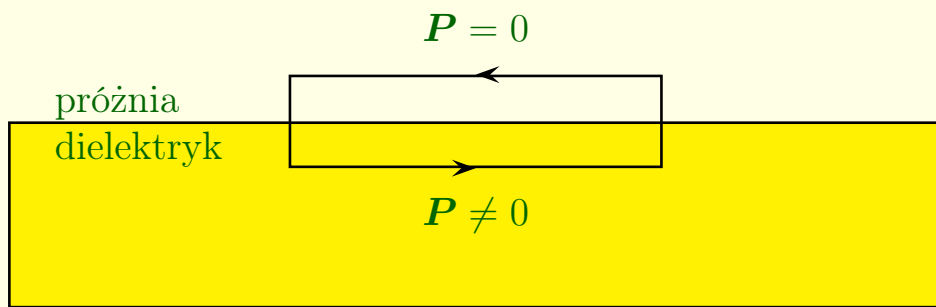


$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{P} \neq 0,$$

$\epsilon_0 \chi_e$ różne po obu stronach

Także dla dielektryków liniowych podobieństwo \mathbf{D} i \mathbf{E} jest zwodnicze.

Chyba, że przestrzeń jest całkowicie wypełniona jednorodnym dielektrykiem.



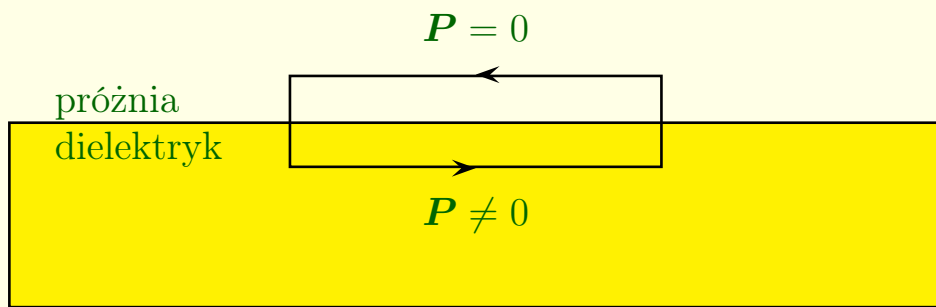
$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{P} \neq 0,$$

$\epsilon_0 \chi_e$ różne po obu stronach

Także dla dielektryków liniowych podobieństwo \mathbf{D} i \mathbf{E} jest zwodnicze.

Chyba, że przestrzeń jest całkowicie wypełniona jednorodnym dielektrykiem.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}, \quad \nabla \times \mathbf{D} = 0, \quad \text{znając } \rho_{sw} \text{ można obliczyć } \mathbf{D}$$



$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{P} \neq 0,$$

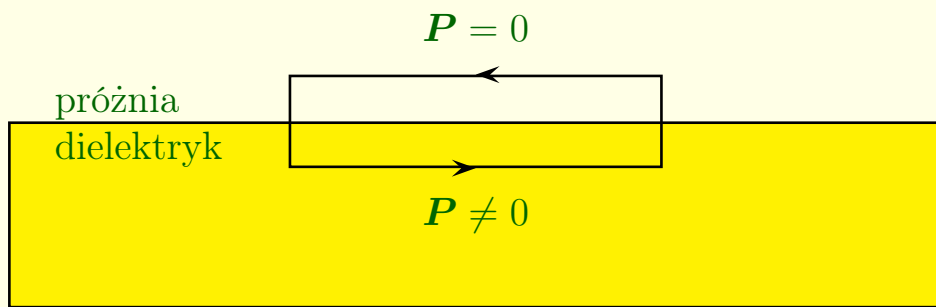
$\epsilon_0 \chi_e$ różne po obu stronach

Także dla dielektryków liniowych podobieństwo \mathbf{D} i \mathbf{E} jest zwodnicze.

Chyba, że przestrzeń jest całkowicie wypełniona jednorodnym dielektrykiem.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}, \quad \nabla \times \mathbf{D} = 0, \quad \text{znając } \rho_{sw} \text{ można obliczyć } \mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{próżni}, \quad \mathbf{E}_{próżni} \text{ jest natężeniem pola elektrycznego jakie dany rozkład ładunków wytworzyłby w próżni}$$



$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{P} \neq 0,$$

$\epsilon_0 \chi_e$ różne po obu stronach

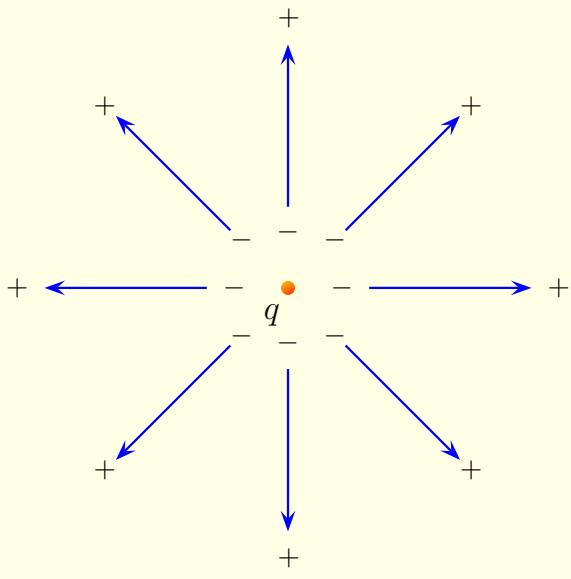
Także dla dielektryków liniowych podobieństwo \mathbf{D} i \mathbf{E} jest zwodnicze.

Chyba, że przestrzeń jest całkowicie wypełniona jednorodnym dielektrykiem.

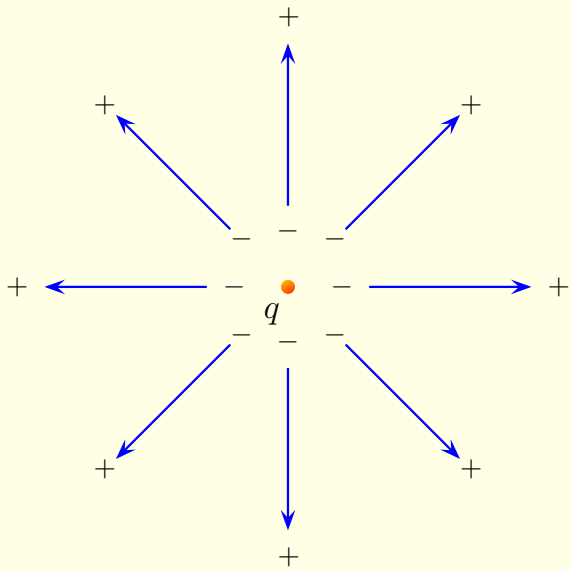
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}, \quad \nabla \times \mathbf{D} = 0, \quad \text{znając } \rho_{sw} \text{ można obliczyć } \mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{próżni}}, \quad \mathbf{E}_{\text{próżni}} \text{ jest natężeniem pola elektrycznego jakie dany rozkład ładunków wytworzyłby w próżni}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_{\text{próżni}} \quad \text{pole w dielektryku jest redukowane o } \epsilon_r$$

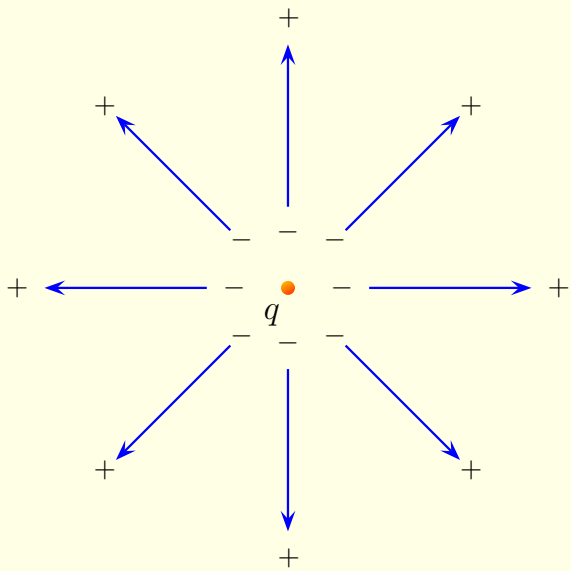


ładunek swobodny q umieszczony w dużym kawałku dielektryka jest ekranowany przez ładunki związane



ładunek swobodny q umieszczony w dużym kawałku dielektryka jest ekranowany przez ładunki związane

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{we wzorze występuje } \epsilon \text{ a nie } \epsilon_0$$



ładunek swobodny q umieszczony w dużym kawałku dielektryka jest ekranowany przez ładunki związane

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{we wzorze występuje } \epsilon \text{ a nie } \epsilon_0$$

$$P_x = \epsilon_0 \left(\chi_{exx} E_x + \chi_{exy} E_y + \chi_{exz} E_z \right)$$

$$P_y = \epsilon_0 \left(\chi_{eyx} E_x + \chi_{eyy} E_y + \chi_{eyz} E_z \right)$$

$$P_z = \epsilon_0 \left(\chi_{ezx} E_x + \chi_{ezy} E_y + \chi_{ezy} E_z \right)$$

dla kryształów tensor podatności elektrycznej

4.4.2 Zagadnienia brzegowe w obecności dielektryków liniowych

$$\begin{aligned}\rho_{zw} &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \chi_e \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \right) \\ &= -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_{sw}\end{aligned}$$

W jednorodnym dielektryku liniowym gęstość ładunku związanego ρ_{zw} jest proporcjonalna do gęstości ładunku swobodnego ρ_{sw} .

4.4.2 Zagadnienia brzegowe w obecności dielektryków liniowych

$$\begin{aligned}\rho_{zw} &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \chi_e \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \right) \\ &= -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_{sw}\end{aligned}$$

W jednorodnym dielektryku liniowym gęstość ładunku związanego ρ_{zw} jest proporcjonalna do gęstości ładunku swobodnego ρ_{sw} .

Jeśli w dielektryku nie ma ładunków swobodnych $\rho_{sw} = 0$, to nieznikająca gęstość ładunku może wystąpić jedynie na powierzchni.

4.4.2 Zagadnienia brzegowe w obecności dielektryków liniowych

$$\begin{aligned}\rho_{zw} &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \chi_e \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \right) \\ &= -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_{sw}\end{aligned}$$

W jednorodnym dielektryku liniowym gęstość ładunku związanego ρ_{zw} jest proporcjonalna do gęstości ładunku swobodnego ρ_{sw} .

Jeśli w dielektryku nie ma ładunków swobodnych $\rho_{sw} = 0$, to nieznikająca gęstość ładunku może wystąpić jedynie na powierzchni.

$$\epsilon_{nad} E_{nad}^{\perp} - \epsilon_{pod} E_{pod}^{\perp} = \sigma_{sw}, \quad \text{warunek brzegowy}$$

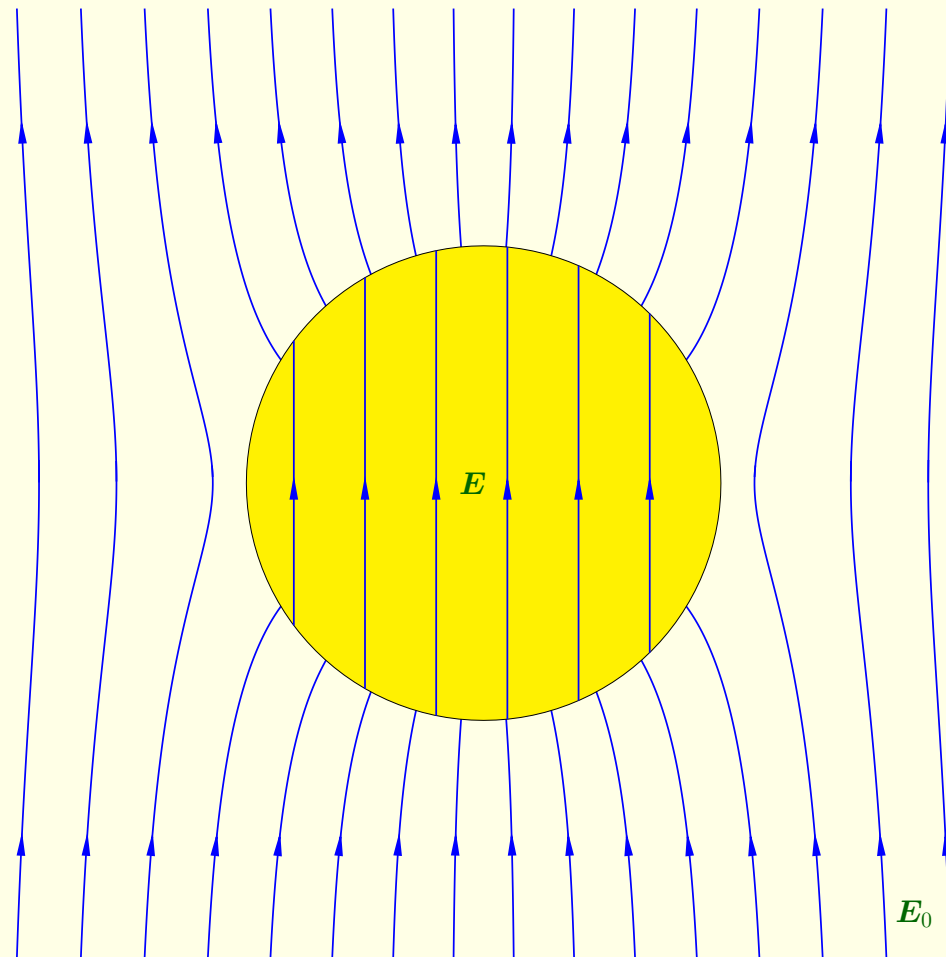
$$\epsilon_{\text{nad}} \frac{\partial V_{\text{nad}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{pod}} \frac{\partial V_{\text{pod}}}{\partial n} = -\sigma_{\text{sw}}, \quad \text{w języku potencjału}$$

$$\epsilon_{\text{nad}} \frac{\partial V_{\text{nad}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{pod}} \frac{\partial V_{\text{pod}}}{\partial n} = -\sigma_{\text{sw}}, \quad \text{w języku potencjału}$$

$$V_{\text{nad}} = V_{\text{pod}}, \quad \text{potencjał jest ciągły}$$

Przykład:

Kula wykonana z jednorodnego dielektryka liniowego została umieszczona w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu E_0 . Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz kuli.



Należy rozwiązać równanie Laplace'a przy następujących warunkach brzegowych:

$$(i) \quad V_{wew} = V_{zew} \quad \text{gdy } r = R$$

$$(ii) \quad \epsilon \frac{\partial V_{wew}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{zew}}{\partial r} \quad \text{gdy } r = R \text{ (nie ma ładunków swobodnych)}$$

$$(iii) \quad V_{zew} \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad \text{gdy } r \gg R$$

Należy rozwiązać równanie Laplace'a przy następujących warunkach brzegowych:

$$(i) \quad V_{\text{wew}} = V_{\text{zew}} \quad \text{gdy } r = R$$

$$(ii) \quad \epsilon \frac{\partial V_{\text{wew}}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{\text{zew}}}{\partial r} \quad \text{gdy } r = R \text{ (nie ma ładunków swobodnych)}$$

$$(iii) \quad V_{\text{zew}} \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad \text{gdy } r \gg R$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Należy rozwiązać równanie Laplace'a przy następujących warunkach brzegowych:

$$(i) \quad V_{\text{wew}} = V_{\text{zew}} \quad \text{gdy } r = R$$

$$(ii) \quad \epsilon \frac{\partial V_{\text{wew}}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{\text{zew}}}{\partial r} \quad \text{gdy } r = R \text{ (nie ma ładunków swobodnych)}$$

$$(iii) \quad V_{\text{zew}} \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad \text{gdy } r \gg R$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$V_{\text{zew}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{i})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{i})$$

$$\begin{cases} A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{i})$$

$$\begin{cases} A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{ii})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{i})$$

$$\begin{cases} A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{ii})$$

$$\begin{cases} \epsilon_r l A_l = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}, & \text{dla } l \neq 1 \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}, & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{i})$$

$$\begin{cases} A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta), \quad (\text{ii})$$

$$\begin{cases} \epsilon_r l A_l = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}, & \text{dla } l \neq 1 \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}, & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_l = B_l = 0 & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0, \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0, & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$\mathbf{E}_{\text{wew}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0, \quad \text{pole wewn} \acute{a}\text{trz kuli jest jednorodne}$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$\mathbf{E}_{\text{wew}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0, \quad \text{pole wewn} \acute{\text{a}}\text{tr z kuli jest jednorodne}$$

$$V_{\text{zew}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^2} E_0 \cos \theta$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$\mathbf{E}_{\text{wew}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0, \quad \text{pole wewn} \acute{a}\text{trz kuli jest jednorodne}$$

$$V_{\text{zew}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^2} E_0 \cos \theta$$

$$\mathbf{E}_{\text{zew}} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \text{pole } \mathbf{E}_0 \text{ plus pole dipola}$$

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$\mathbf{E}_{\text{wew}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0, \quad \text{pole wewn} \acute{a}\text{trz kuli jest jednorodne}$$

$$V_{\text{zew}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^2} E_0 \cos \theta$$

$$\mathbf{E}_{\text{zew}} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \text{pole } \mathbf{E}_0 \text{ plus pole dipola}$$

$$p = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0, \quad \text{moment dipolowy kuli}$$

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad \text{energia zmagazynowana w polu}$$

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad \text{energia zmagazynowana w polu}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad \text{w układach z dielektrykami}$$

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad \text{energia zmagazynowana w polu}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad \text{w układach z dielektrykami}$$

$$\delta W = \int (\delta \rho_{\text{sw}}) V d\tau, \quad \text{do dielektryka wprowadzamy ładunki swobodne}$$

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad \text{energia zmagazynowana w polu}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad \text{w układach z dielektrykami}$$

$$\delta W = \int (\delta \rho_{\text{sw}}) V d\tau, \quad \text{do dielektryka wprowadzamy ładunki swobodne}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}} \quad \Rightarrow \quad \delta \rho_{\text{sw}} = \nabla \cdot (\delta \mathbf{D})$$

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad \text{energia zmagazynowana w polu}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad \text{w układach z dielektrykami}$$

$$\delta W = \int (\delta \rho_{\text{sw}}) V d\tau, \quad \text{do dielektryka wprowadzamy ładunki swobodne}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}} \quad \Rightarrow \quad \delta \rho_{\text{sw}} = \nabla \cdot (\delta \mathbf{D})$$

$$\delta W = \int [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})] V d\tau$$

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad \text{energia zmagazynowana w polu}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad \text{w układach z dielektrykami}$$

$$\delta W = \int (\delta \rho_{\text{sw}}) V d\tau, \quad \text{do dielektryka wprowadzamy ładunki swobodne}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}} \quad \Rightarrow \quad \delta \rho_{\text{sw}} = \nabla \cdot (\delta \mathbf{D})$$

$$\delta W = \int [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})] V d\tau$$

$$\nabla \cdot [(\delta \mathbf{D}) V] = [\nabla \cdot (\delta \mathbf{D})] V + \delta \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau = \int_{\mathcal{S}} (\delta \mathbf{D})V \cdot d\mathbf{a} = 0$$

całkujemy po całej
przestrzeni

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau = \int_{\mathcal{S}} (\delta \mathbf{D})V \cdot d\mathbf{a} = 0$$

całkujemy po całej przestrzeni

$$\delta W = \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau = \int_{\mathcal{S}} (\delta \mathbf{D})V \cdot d\mathbf{a} = 0$$

całkujemy po całej przestrzeni

$$\delta W = \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{dla dielektryków liniowych}$$

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau = \int_{\mathcal{S}} (\delta \mathbf{D})V \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{całkujemy po całej przestrzeni}$$

$$\delta W = \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, dla dielektryków liniowych

$$\frac{1}{2} \delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \delta(\epsilon E^2) = \epsilon (\delta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}$$

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau + \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$$\int \nabla \cdot [(\delta \mathbf{D})V] d\tau = \int_S (\delta \mathbf{D})V \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{całkujemy po całej przestrzeni}$$

$$\delta W = \int (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} d\tau$$

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, dla dielektryków liniowych

$$\frac{1}{2} \delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \delta(\epsilon E^2) = \epsilon (\delta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = (\delta \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}$$

$$\delta W = \delta \left(\frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

Energia układu to praca konieczna do utworzenia danego układu.

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

Energia układu to praca konieczna do utworzenia danego układu.

Dwa sposoby „tworzenia układu”:

(i) Wprowadzamy małymi porcjami ładunki swobodne i związane i umieszczamy je w ich położeniach

$$W = W_{\text{sw}} + W_{\text{zw}}$$

(ii) Wprowadzamy małymi porcjami ładunki swobodne pozwalając dielektrykowi dostosować się do ich obecności

$$W_{\text{całk}} = W_{\text{sw}} + W_{\text{zw}} + W_{\text{sprężynek}}$$