

Elektrodynamika

Część 2

Specjalne metody elektrostatyki

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

| | | |
|----------|--|----------|
| 3 | Specjalne metody elektrostatyki | 3 |
| 3.1 | Równanie Laplace'a | 3 |
| 3.2 | Metoda obrazów | 6 |
| 3.3 | Metoda separacji zmiennych | 19 |
| 3.4 | Rozwinięcie multipolowe | 31 |

3 Specjalne metody elektrostatyki

3.1 Równanie Laplace'a

3.1.1 Wprowadzenie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } \mathbf{E}, \text{ zwykle trudne}$$

3 Specjalne metody elektrostatyki

3.1 Równanie Laplace'a

3.1.1 Wprowadzenie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } \mathbf{E}, \text{ zwykle trudne}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } V, \text{ trochę łatwiej}$$

3 Specjalne metody elektrostatyki

3.1 Równanie Laplace'a

3.1.1 Wprowadzenie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } \mathbf{E}, \text{ zwykle trudne}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } V, \text{ trochę łatwiej}$$

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{równanie Poissona}$$

3 Specjalne metody elektrostatyki

3.1 Równanie Laplace'a

3.1.1 Wprowadzenie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } \mathbf{E}, \text{ zwykle trudne}$$

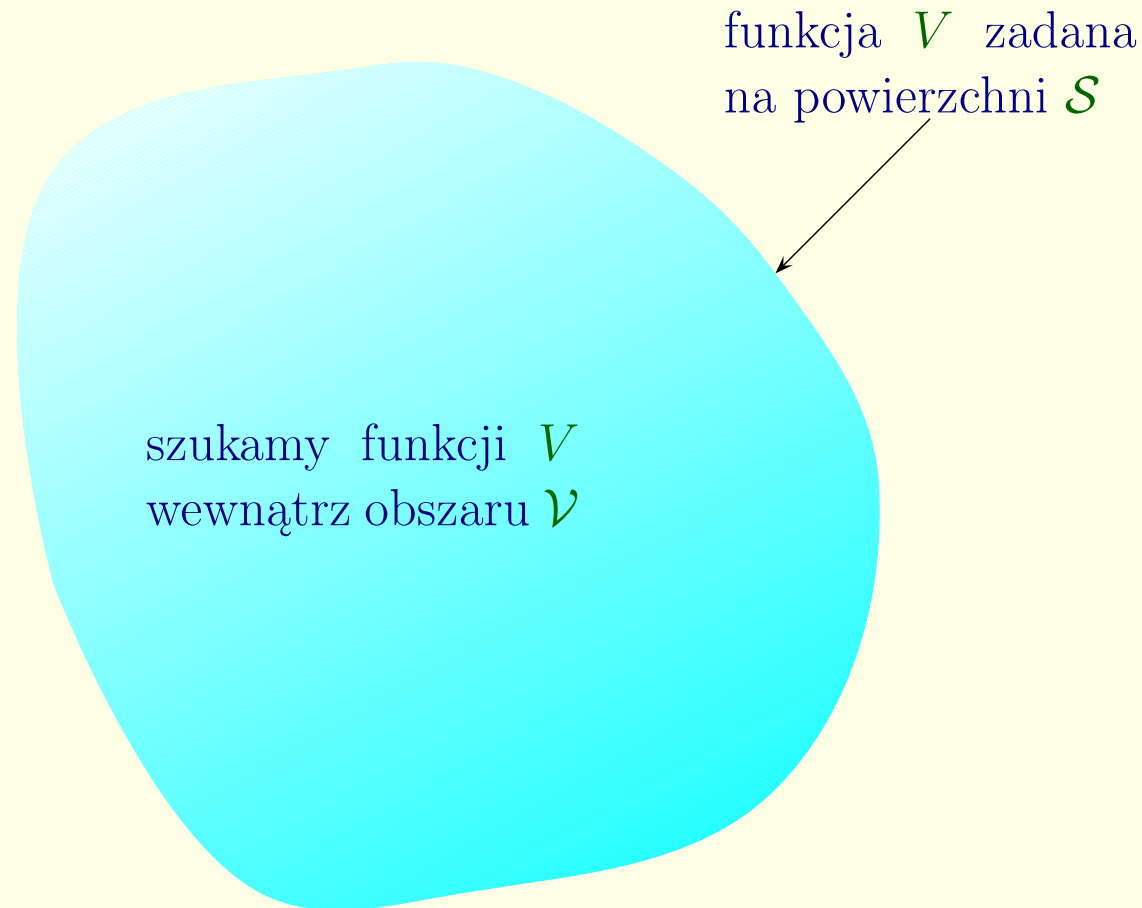
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad \text{z } \rho \text{ wyznaczamy } V, \text{ trochę łatwiej}$$

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{równanie Poissona}$$

$$\Delta V = 0 \quad \text{równanie Laplace'a, tam gdzie } \rho = 0$$

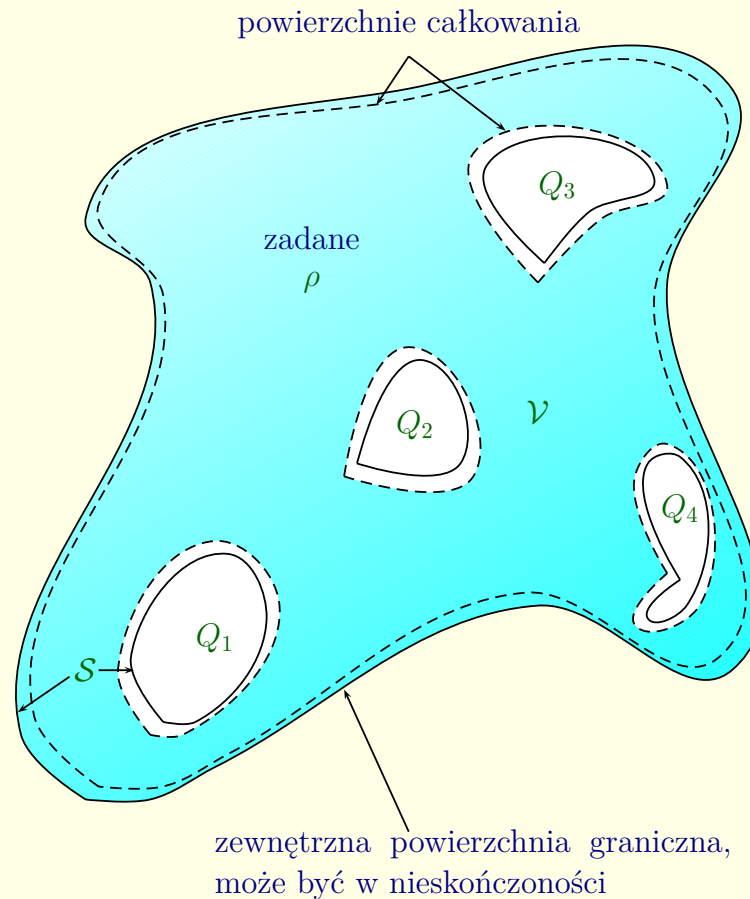
3.1.2 Warunki brzegowe i twierdzenie o jednoznaczności

Rozwiązanie równania Laplace'a w pewnym obszarze \mathcal{V} jest określone jednoznacznie, jeśli podana jest wartość rozwiązania V na powierzchni \mathcal{S} będącej brzegiem obszaru \mathcal{V} .



3.1.3 Przewodniki i drugie twierdzenie o jednoznaczności

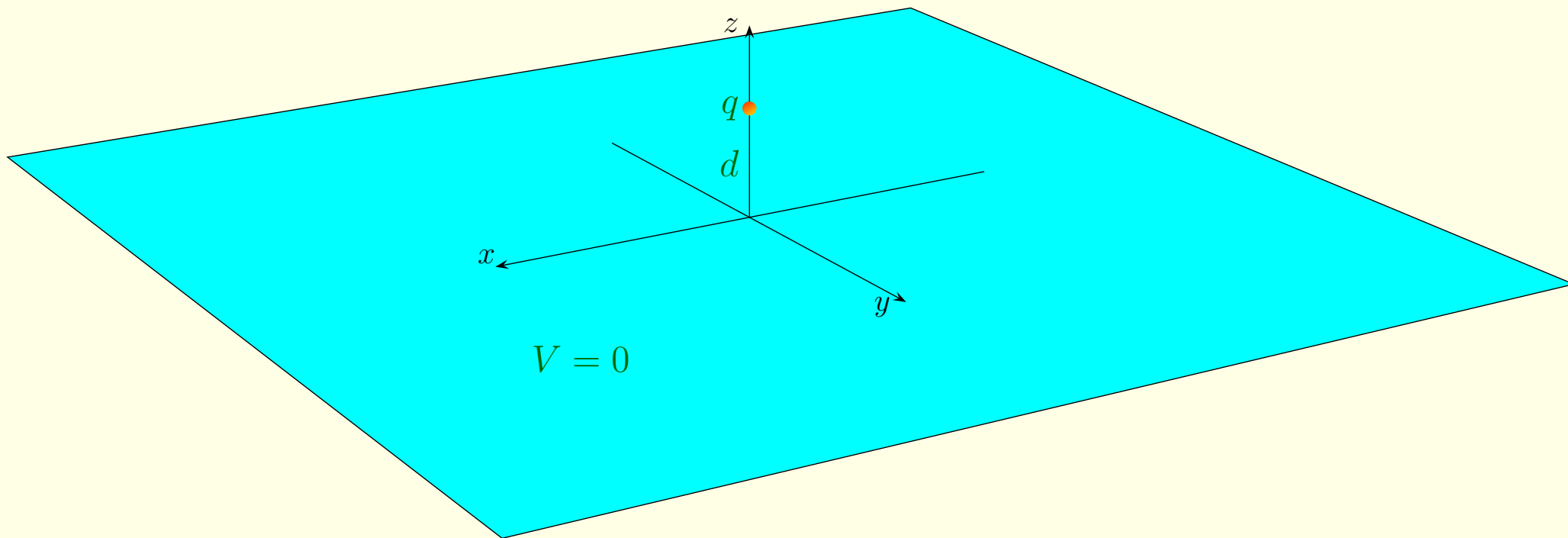
W obszarze \mathcal{V} otoczonym przez przewodniki i zawierającym ładunki objętościowe o gęstości ρ pole elektryczne jest określone jednoznacznie, jeśli zadany jest całkowity ładunek na każdym z przewodników.



3.2 Metoda obrazów

3.2.1 Klasyczny przykład

Ładunek q w odległości d od nieskończonej, uziemionej, przewodzącej płaszczyzny. Jaki jest potencjał w obszarze nad płaszczyzną?



Chcemy znaleźć rozwiązanie równania Poissona dla $z > 0$ przy warunkach brzegowych:

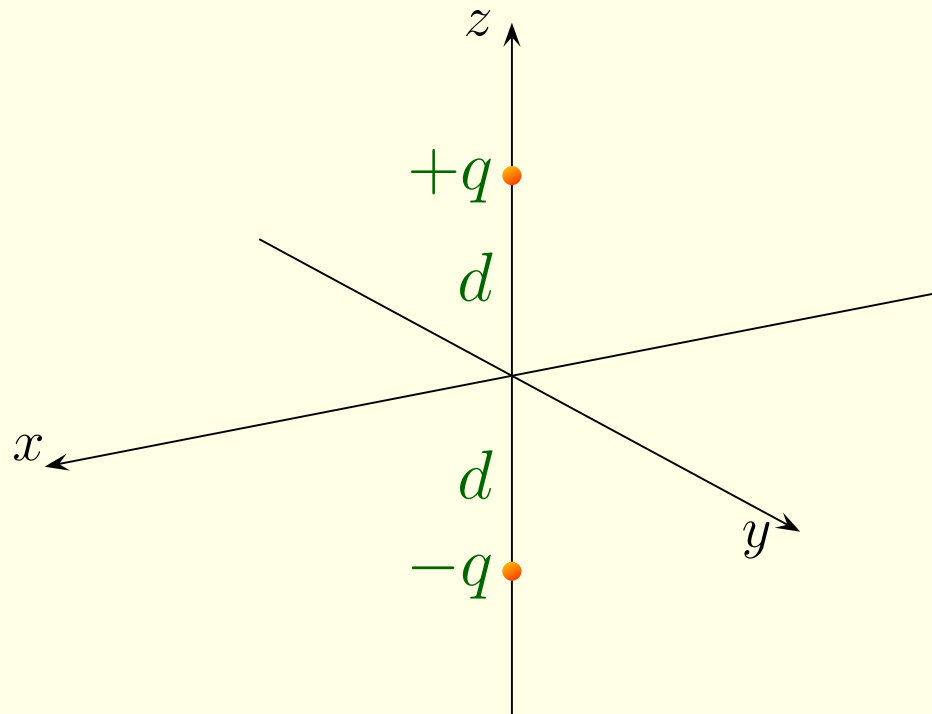
1. $V = 0$ dla $z = 0$

2. $V \rightarrow 0$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

Chcemy znaleźć rozwiązanie równania Poissona dla $z > 0$ przy warunkach brzegowych:

1. $V = 0$ dla $z = 0$
2. $V \rightarrow 0$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

Rozważmy zupełnie inny układ



$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right]$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right]$$

1. $V = 0$ dla $z = 0$

2. $V \rightarrow 0$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

Jedynym ładunkiem dla $z > 0$ jest ładunek $+q$ umieszczony w $(0, 0, d)$.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right]$$

1. $V = 0$ dla $z = 0$

2. $V \rightarrow 0$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

Jedynym ładunkiem dla $z > 0$ jest ładunek $+q$ umieszczony w $(0, 0, d)$.

To są warunki wyjściowego zadania!

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right]$$

1. $V = 0$ dla $z = 0$

2. $V \rightarrow 0$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

Jedynym ładunkiem dla $z > 0$ jest ładunek $+q$ umieszczony w $(0, 0, d)$.

To są warunki wyjściowego zadania!

Z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wynika, że, dla $z \geq 0$, potencjał ładunku znajdującego się nad uziemioną płaszczyzną przewodzącą jest taki sam jak od układu dwóch ładunków $+q$ i $-q$ rozmieszczonych symetrycznie względem płaszczyzny xy .

Ładunek q' jest zwierciadlanym obrazem ładunku q . Stąd nazwa metoda obrazów.

3.2.2 Indukowane ładunki powierzchniowe

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

3.2.2 Indukowane ładunki powierzchniowe

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

3.2.2 Indukowane ładunki powierzchniowe

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q(z-d)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}\right)^3} + \frac{q(z+d)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}\right)^3} \right]$$

3.2.2 Indukowane ładunki powierzchniowe

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q(z-d)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}\right)^3} + \frac{q(z+d)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}\right)^3} \right]$$

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}\right)^3}$$

gęstość powierzchniowa
ładunku

$$Q = \int \sigma da \quad \text{\u0142adunek ca\u0142kowity}$$

$$Q = \int \sigma \, da \quad \text{\u0142adunek ca\u0142kowity}$$

Obliczmy t\u0119 ca\u0142k\u0119, wprowadzaj\u0105c wsp\u00f3\u0142rzedne biegunowe (r, ϕ)

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad da = r \, dr \, d\phi$$

$$Q = \int \sigma \, da \quad \text{\u0142adunek ca\u0142kowity}$$

Obliczmy t\u0119 ca\u0142k\u0119, wprowadzaj\u0105c wsp\u00f3\u0142rzedne biegunowe (r, ϕ)

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad da = r \, dr \, d\phi$$

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$Q = \int \sigma \, da \quad \text{\u0142adunek ca\u0142kowity}$$

Obliczmy t\u0119 ca\u0142k\u0119, wprowadzaj\u0105c wsp\u00f3\u0142rzedne biegunowe (r, ϕ)

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad da = r \, dr \, d\phi$$

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r \, dr \, d\phi = \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^{\infty} = -q$$

3.2.3 Siła i energia

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{tak jak dla dwóch ładunków}$$

3.2.3 Siła i energia

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{tak jak dla dwóch ładunków}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad \text{dwa ładunki bez płaszczyzny przewodzącej}$$

3.2.3 Siła i energia

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{tak jak dla dwóch ładunków}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad \text{dwa ładunki bez płaszczyzny przewodzącej}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad \text{ładunek i płaszczyzna przewodząca}$$

3.2.3 Siła i energia

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{tak jak dla dwóch ładunków}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad \text{dwa ładunki bez płaszczyzny przewodzącej}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad \text{ładunek i płaszczyzna przewodząca}$$

Dlaczego połowa?

3.2.3 Siła i energia

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{tak jak dla dwóch ładunków}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad \text{dwa ładunki bez płaszczyzny przewodzącej}$$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad \text{ładunek i płaszczyzna przewodząca}$$

Dlaczego połowa?

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

Dla $z < 0$, $E = 0$ dla ładunku i powierzchni przewodzącej

Możemy to obliczyć

Możemy to obliczyć

$$W = \int_{\infty}^d \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Możemy to obliczyć

$$W = \int_{\infty}^d \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{q^2}{4z^2} dz$$

Możemy to obliczyć

$$W = \int_{\infty}^d \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{q^2}{4z^2} dz = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q^2}{4z} \right) \Bigg|_{\infty}^d$$

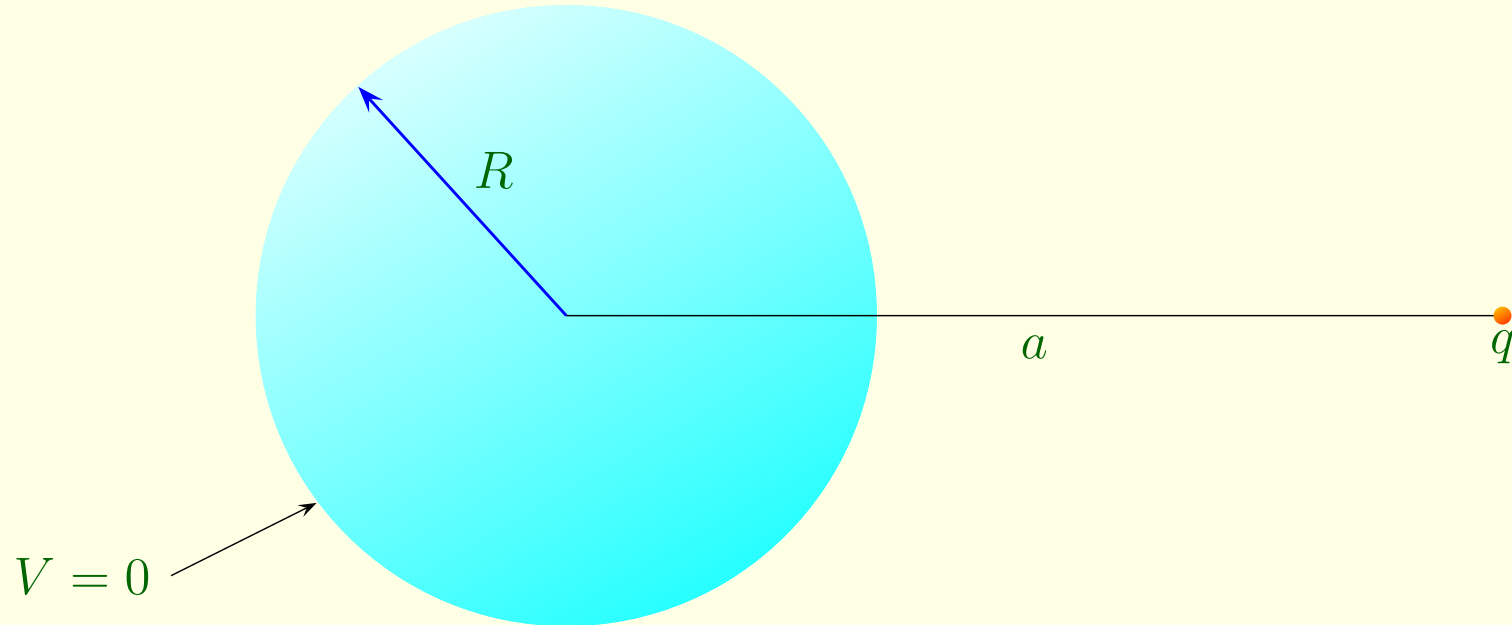
Możemy to obliczyć

$$W = \int_{\infty}^d \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{q^2}{4z^2} dz = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q^2}{4z} \right) \Big|_{\infty}^d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$$

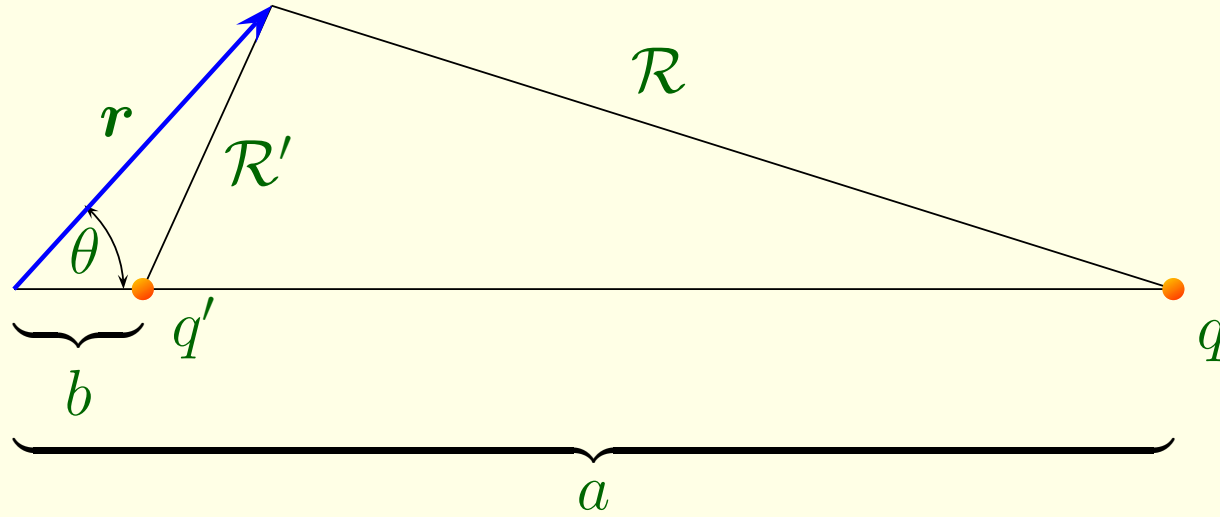
3.2.4 Inne zadania związane z metodą obrazów

Przykład:

Ładunek punktowy q znajduje się w odległości a od środka uziemionej przewodzącej kuli o promieniu R . Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli.

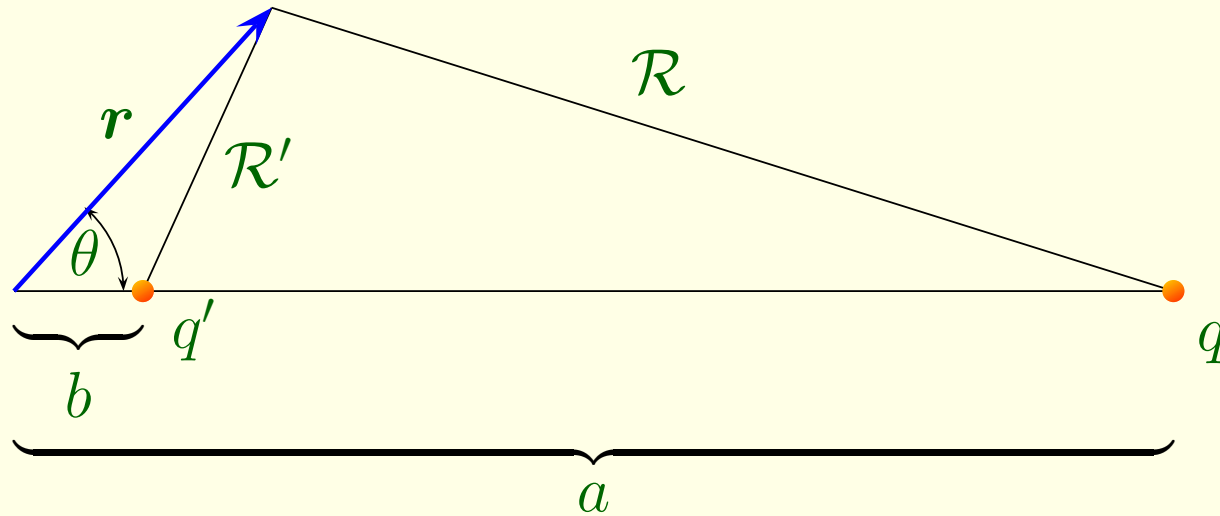


Rozważmy zupełnie inny układ



Dwa ładunki punktowe q i q'

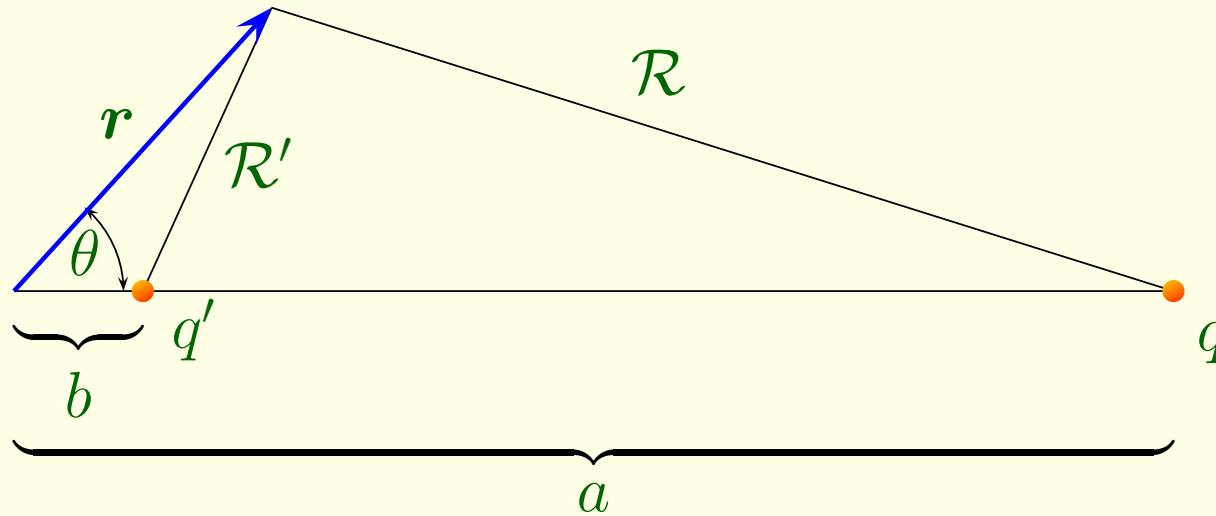
Rozważmy zupełnie inny układ



Dwa ładunki punktowe q i q'

$$q' = -\frac{R}{a}q, \quad b = \frac{R}{a}R, \quad \text{wybieramy takie } q' \text{ i } b, \quad \frac{R}{a} < 1$$

Rozważmy zupełnie inny układ



Dwa ładunki punktowe q i q'

$$q' = -\frac{R}{a}q, \quad b = \frac{R}{a}R, \quad \text{wybieramy takie } q' \text{ i } b, \quad \frac{R}{a} < 1$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} \right) \quad \text{ten potencjał znika na powierzchni kuli } (r = R)$$

We współrzędnych sferycznych

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right]$$

We współrzędnych sferycznych

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right]$$

$V(R, \theta) = 0$, potencjał zeruje się na powierzchni kuli

Z jednoznaczności rozwiązań wynika, że ten potencjał jest potencjałem na zewnątrz kuli.

We współrzędnych sferycznych

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right]$$

$V(R, \theta) = 0$, potencjał zeruje się na powierzchni kuli

Z jednoznaczności rozwiązań wynika, że ten potencjał jest potencjałem na zewnątrz kuli.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2} \quad \text{siła przyciągania}$$

We współrzędnych sferycznych

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right]$$

$V(R, \theta) = 0$, potencjał zeruje się na powierzchni kuli

Z jednoznaczności rozwiązań wynika, że ten potencjał jest potencjałem na zewnątrz kuli.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2} \quad \text{siła przyciągania}$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{gęstość powierzchniowa ładunku}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{dla } r = R$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{dla } r = R$$

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{q(2r - 2a \cos \theta)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{q[(a/R)^2 2r - 2a \cos \theta]}{(R^2 + (ra/R)^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \right\} \Bigg|_{r=R}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{dla } r = R$$

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= -\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{q(2r - 2a \cos \theta)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{q[(a/R)^2 2r - 2a \cos \theta]}{(R^2 + (ra/R)^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \right\} \Bigg|_{r=R} \\ &= -\frac{q}{4\pi R} \frac{a^2 - R^2}{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

3.3 Metoda separacji zmiennych

3.3.1 Współrzędne kartezjańskie

Przeczytać w podręczniku.

3.3.2 Współrzędne kuliste

Równanie Laplace'a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

3.3 Metoda separacji zmiennych

3.3.1 Współrzędne kartezjańskie

Przeczytać w podręczniku.

3.3.2 Współrzędne kuliste

Równanie Laplace'a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{symetria osiowa}$$

3.3 Metoda separacji zmiennych

3.3.1 Współrzędne kartezjańskie

Przeczytać w podręczniku.

3.3.2 Współrzędne kuliste

Równanie Laplace'a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{symetria osiowa}$$

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

separacja zmiennych

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{separacja}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{separacja}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l + 1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l + 1)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{separacja}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l + 1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l + 1)$$

Równanie różniczkowe **cząstkowe** zostało sprowadzone do układu dwóch równań różniczkowych **zwyczajnych**.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{separacja}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l + 1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l + 1)$$

Równanie różniczkowe **cząstkowe** zostało sprowadzone do układu dwóch równań różniczkowych **zwyczajnych**.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l + 1)R \quad \text{równanie pierwsze}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{separacja}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l + 1), \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l + 1)$$

Równanie różniczkowe **cząstkowe** zostało sprowadzone do układu dwóch równań różniczkowych **zwyczajnych**.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l + 1)R \quad \text{równanie pierwsze}$$

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad \text{rozwiązanie}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad \text{równanie drugie}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad \text{równanie drugie}$$

$$\boxed{\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta)} \quad \text{rozwiązanie (wielomiany Legendre'a)}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad \text{równanie drugie}$$

$$\boxed{\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta)} \quad \text{rozwiązanie (wielomiany Legendre'a)}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad \text{wzór Rodriguesa}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad \text{równanie drugie}$$

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad \text{rozwiązanie (wielomiany Legendre'a)}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad \text{wzór Rodriguesa}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

wielomiany Legendre'a

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

rozwiązanie ogólne dla
symetrii osiowej

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

rozwiązanie ogólne dla symetrii osiowej

Przykład:

Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu R utrzymywany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz powłoki

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

rozwiązanie ogólne dla symetrii osiowej

Przykład:

Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu R utrzymywany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz powłoki

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad B_l = 0$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

rozwiązanie ogólne dla symetrii osiowej

Przykład:

Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu R utrzymywany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz powłoki

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad B_l = 0$$

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

rozwiązanie ogólne dla symetrii osiowej

Przykład:

Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu R utrzymywany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz powłoki

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad B_l = 0$$

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dla } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{dla } l' = l \end{cases}$$

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$A_l = \frac{2l + 1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$A_l = \frac{2l + 1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Jeśli

$$V_0(\theta) = k \sin^2(\theta/2) = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{k}{2} [P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)]$$

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l' + 1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$A_l = \frac{2l + 1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Jeśli

$$V_0(\theta) = k \sin^2(\theta/2) = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{k}{2} [P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)]$$

to

$$V(r, \theta) = \frac{k}{2} \left[r^0 P_0(\cos \theta) - \frac{r^1}{R} P_1(\cos \theta) \right] = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right)$$

Przykład:

Na powierzchni kuli o promieniu R zadany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli, zakładając, że nie ma tam ładunków.

Przykład:

Na powierzchni kuli o promieniu R zadany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli, zakładając, że nie ma tam ładunków.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{teraz } A_l = 0$$

Przykład:

Na powierzchni kuli o promieniu R zadany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli, zakładając, że nie ma tam ładunków.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{teraz } A_l = 0$$

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

Przykład:

Na powierzchni kuli o promieniu R zadany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli, zakładając, że nie ma tam ładunków.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{teraz } A_l = 0$$

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

$$\frac{B_{l'}}{R^{l'+1}} \frac{2}{2l' + 1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Przykład:

Na powierzchni kuli o promieniu R zadany jest potencjał $V_0(\theta)$. Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli, zakładając, że nie ma tam ładunków.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{teraz } A_l = 0$$

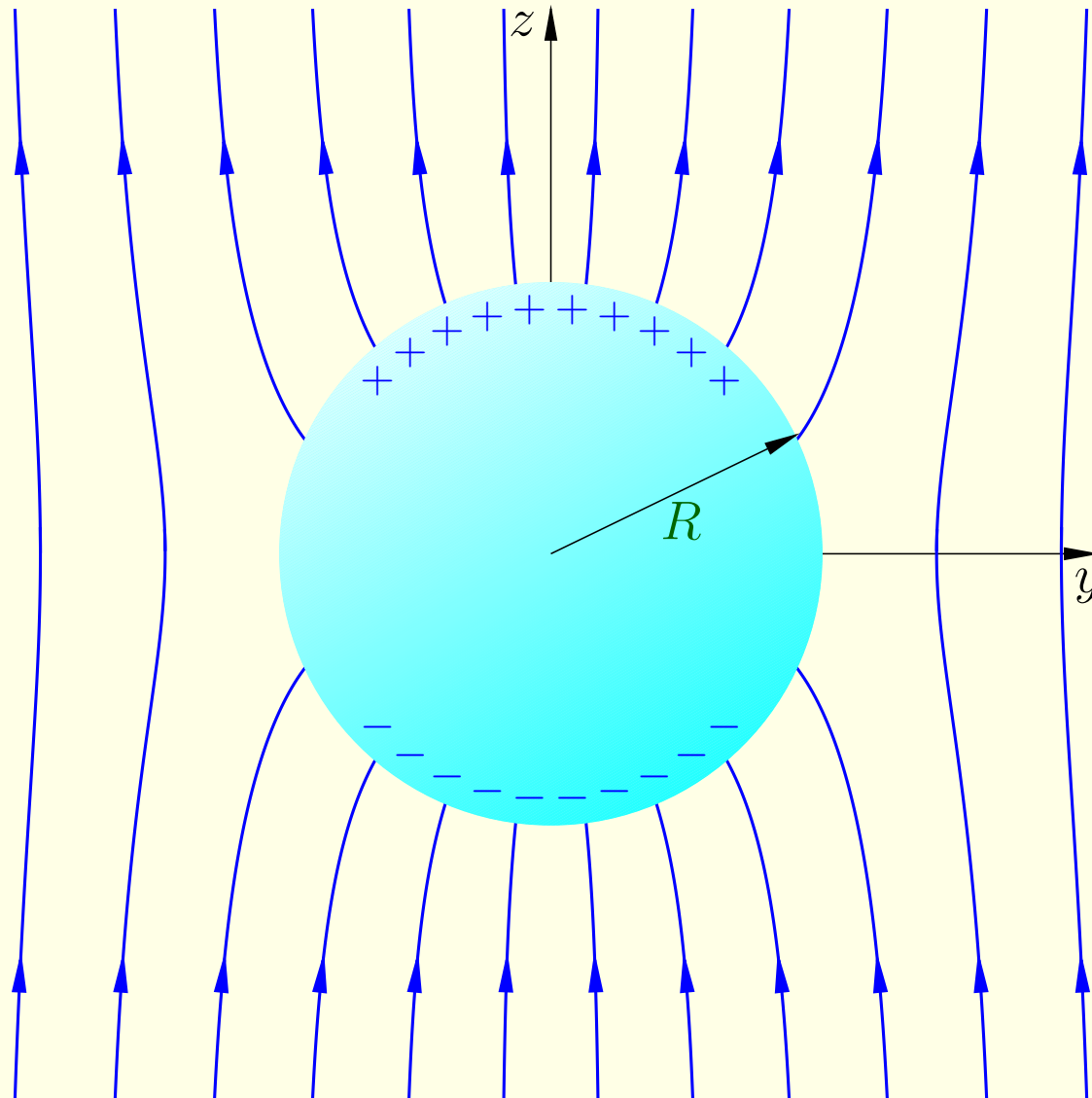
$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

$$\frac{B_{l'}}{R^{l'+1}} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1} \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

Przykład:

Nienaładowaną metalową kulę o promieniu R umieszczono w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$. Znaleźć potencjał i pole na zewnątrz kuli.



W kuli potencjał jest stały, możemy przyjąć $V = 0$. W dużej odległości od kuli pole ma postać $E_0 \hat{z}$, czyli $V \rightarrow -E_0 z$

W kuli potencjał jest stały, możemy przyjąć $V = 0$. W dużej odległości od kuli pole ma postać $E_0 \hat{z}$, czyli $V \rightarrow -E_0 z$

$$\begin{cases} V = 0 & \text{dla } r = R \\ V \rightarrow -E_0 r \cos \theta & \text{dla } r \gg R \end{cases} \quad \text{warunki brzegowe}$$

W kuli potencjał jest stały, możemy przyjąć $V = 0$. W dużej odległości od kuli pole ma postać $E_0 \hat{z}$, czyli $V \rightarrow -E_0 z$

$$\begin{cases} V = 0 & \text{dla } r = R \\ V \rightarrow -E_0 r \cos \theta & \text{dla } r \gg R \end{cases} \quad \text{warunki brzegowe}$$

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1} \quad \text{z pierwszego warunku}$$

W kuli potencjał jest stały, możemy przyjąć $V = 0$. W dużej odległości od kuli pole ma postać $E_0 \hat{z}$, czyli $V \rightarrow -E_0 z$

$$\begin{cases} V = 0 & \text{dla } r = R \\ V \rightarrow -E_0 r \cos \theta & \text{dla } r \gg R \end{cases} \quad \text{warunki brzegowe}$$

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1} \quad \text{z pierwszego warunku}$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

W kuli potencjał jest stały, możemy przyjąć $V = 0$. W dużej odległości od kuli pole ma postać $E_0 \hat{z}$, czyli $V \rightarrow -E_0 z$

$$\begin{cases} V = 0 & \text{dla } r = R \\ V \rightarrow -E_0 r \cos \theta & \text{dla } r \gg R \end{cases} \quad \text{warunki brzegowe}$$

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1} \quad \text{z pierwszego warunku}$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \quad \text{z drugiego warunku dla } r \gg R$$

$$A_1 = -E_0, \quad \text{pozostałe } A_l = 0$$

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla V &= - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \\ &= E_0 \left[\left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \end{aligned}$$

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \\ &= E_0 \left[\left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \end{aligned}$$

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla V &= - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \\ &= E_0 \left[\left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \end{aligned}$$

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

$$\begin{cases} \sigma(\theta) > 0 & \text{dla } 0 < \theta < \pi/2 \\ \sigma(\theta) < 0 & \text{dla } \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

Przykład:

Na powierzchni kulistej powłoki o promieniu R umieszczono ładunek powierzchniowy o gęstości $\sigma_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz powłoki.

Przykład:

Na powierzchni kulistej powłoki o promieniu R umieszczono ładunek powierzchniowy o gęstości $\sigma_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz powłoki.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \text{wewnątrz } (r \leq R)$$

Przykład:

Na powierzchni kulistej powłoki o promieniu R umieszczono ładunek powierzchniowy o gęstości $\sigma_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz powłoki.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \text{wewnątrz } (r \leq R)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{na zewnątrz } (r \geq R)$$

Przykład:

Na powierzchni kulistej powłoki o promieniu R umieszczono ładunek powierzchniowy o gęstości $\sigma_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz powłoki.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \text{wewnątrz } (r \leq R)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{na zewnątrz } (r \geq R)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{potencjał jest ciągły}$$

Przykład:

Na powierzchni kulistej powłoki o promieniu R umieszczono ładunek powierzchniowy o gęstości $\sigma_0(\theta)$. Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz powłoki.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \text{wewnątrz } (r \leq R)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{na zewnątrz } (r \geq R)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad \text{potencjał jest ciągły}$$

$$B_l = A_l R^{2l+1}$$

$$\left(\frac{\partial V_{zew}}{\partial r} - \frac{\partial V_{wew}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta),$$

składowa normalna
pola jest nieciągła

$$\left(\frac{\partial V_{zew}}{\partial r} - \frac{\partial V_{wew}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta),$$

składowa normalna
pola jest nieciągła

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial V_{zew}}{\partial r} - \frac{\partial V_{wew}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta),$$

składowa normalna
pola jest nieciągła

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial V_{zew}}{\partial r} - \frac{\partial V_{wew}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta), \quad \begin{array}{l} \text{składowa normalna} \\ \text{pola jest nieciągła} \end{array}$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^{\pi} \sigma_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

D1a

$$\sigma_0(\theta) = k \cos \theta = kP_1(\cos \theta)$$

Dla

$$\sigma_0(\theta) = k \cos \theta = kP_1(\cos \theta)$$

$$A_1 = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta \, d\theta, \quad \text{pozostałe } A_l = 0$$

Dla

$$\sigma_0(\theta) = k \cos \theta = kP_1(\cos \theta)$$

$$A_1 = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta \, d\theta, \quad \text{pozostałe } A_l = 0$$

$$V(r, \theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} r \cos \theta, \quad \text{wewnątrz } (r \leq R)$$

Dla

$$\sigma_0(\theta) = k \cos \theta = kP_1(\cos \theta)$$

$$A_1 = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta \, d\theta, \quad \text{pozostałe } A_l = 0$$

$$V(r, \theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} r \cos \theta, \quad \text{wewnątrz } (r \leq R)$$

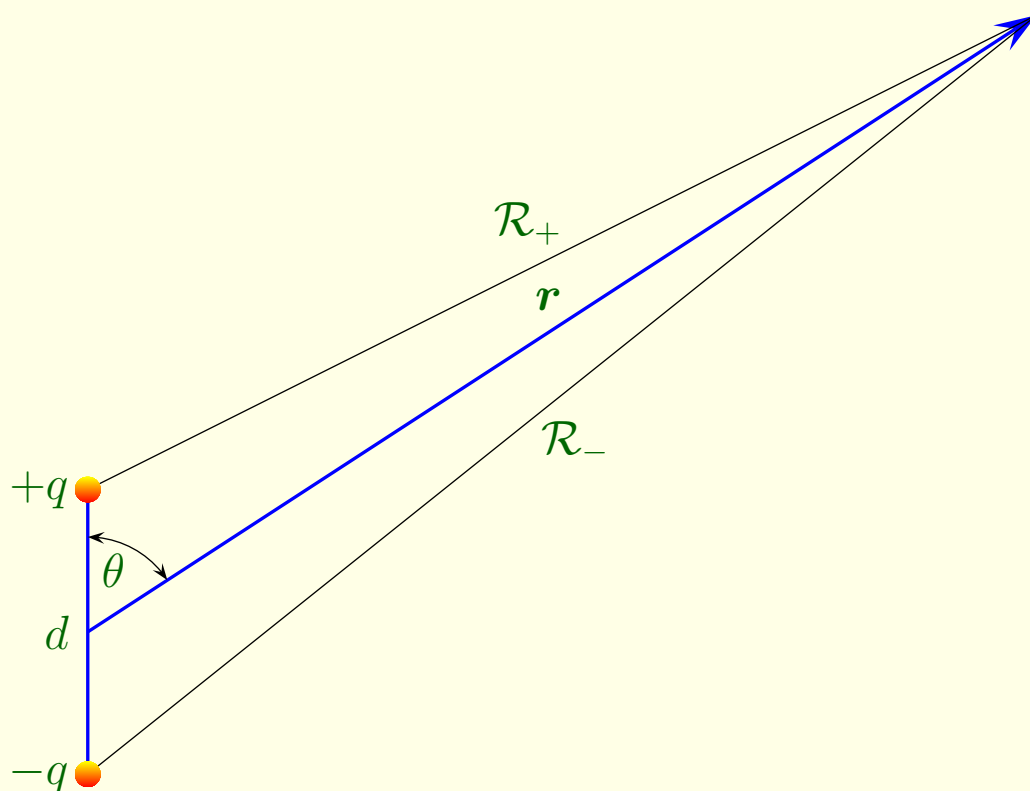
$$V(r, \theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} R^3 \frac{1}{r^2} \cos \theta, \quad \text{na zewnątrz } (r \geq R)$$

3.4 Rozwinięcie multipolowe

3.4.1 Przybliżona postać potencjału na dużych odległościach

Przykład:

Fizyczny **dipol elektryczny** składa się z dwóch ładunków o równej wartości i przeciwnym znaku ($\pm q$), znajdujących się w odległości d . Znaleźć przybliżoną postać potencjału w dużej odległości od tego układu.



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathcal{R}_+} - \frac{q}{\mathcal{R}_-} \right) \quad \text{potencjał od obu ładunków}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathcal{R}_+} - \frac{q}{\mathcal{R}_-} \right) \quad \text{potencjał od obu ładunków}$$

$$\mathcal{R}_\pm^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ze wzoru} \\ \text{cosinusów} \end{array}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathcal{R}_+} - \frac{q}{\mathcal{R}_-} \right) \quad \text{potencjał od obu ładunków}$$

$$\mathcal{R}_\pm^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ze wzoru} \\ \text{cosinusów} \end{array}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_\pm} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad \text{dla } r \gg d$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathcal{R}_+} - \frac{q}{\mathcal{R}_-} \right) \quad \text{potencjał od obu ładunków}$$

$$\mathcal{R}_\pm^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ze wzoru} \\ \text{cosinusów} \end{array}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_\pm} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad \text{dla } r \gg d$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_+} - \frac{1}{\mathcal{R}_-} \approx \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathcal{R}_+} - \frac{q}{\mathcal{R}_-} \right) \quad \text{potencjał od obu ładunków}$$

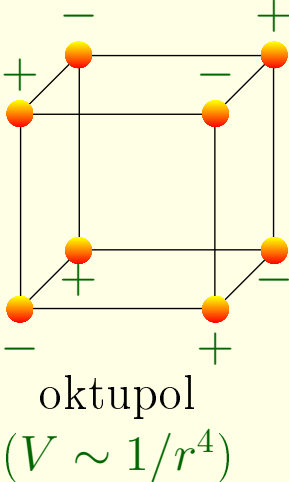
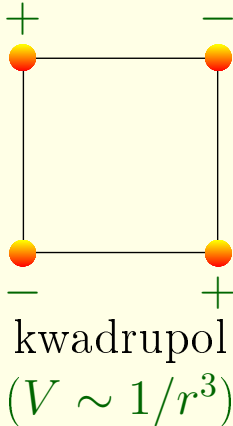
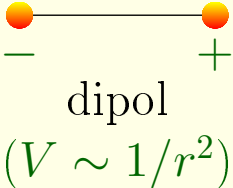
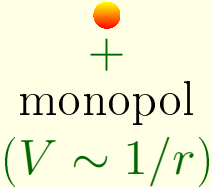
$$\mathcal{R}_\pm^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ze wzoru} \\ \text{cosinusów} \end{array}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_\pm} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad \text{dla } r \gg d$$

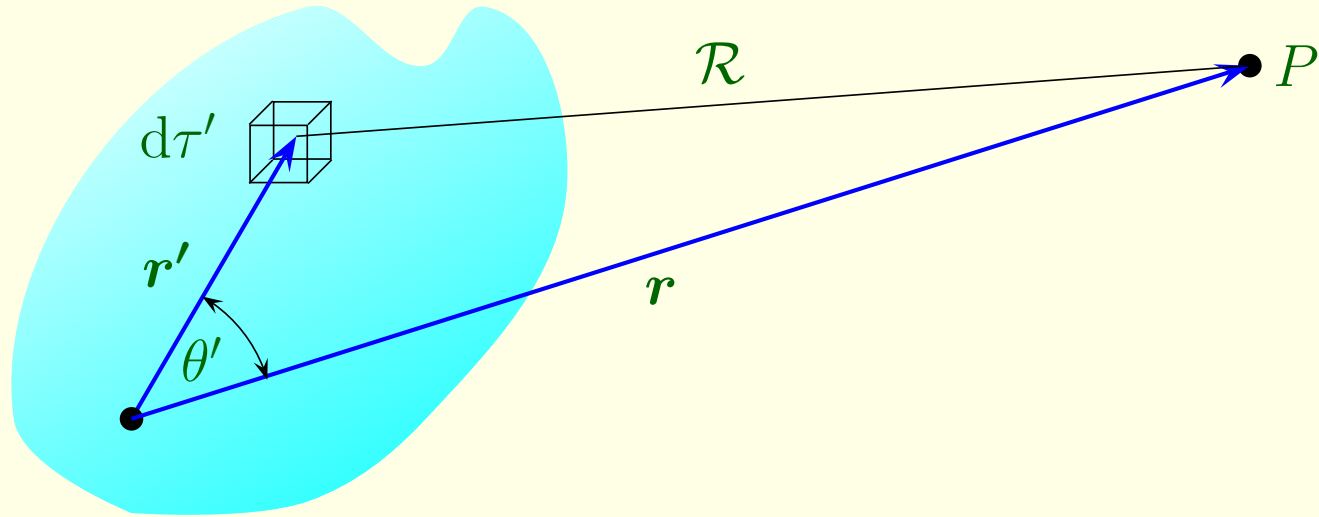
$$\frac{1}{\mathcal{R}_+} - \frac{1}{\mathcal{R}_-} \approx \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$

Momenty multipolowe

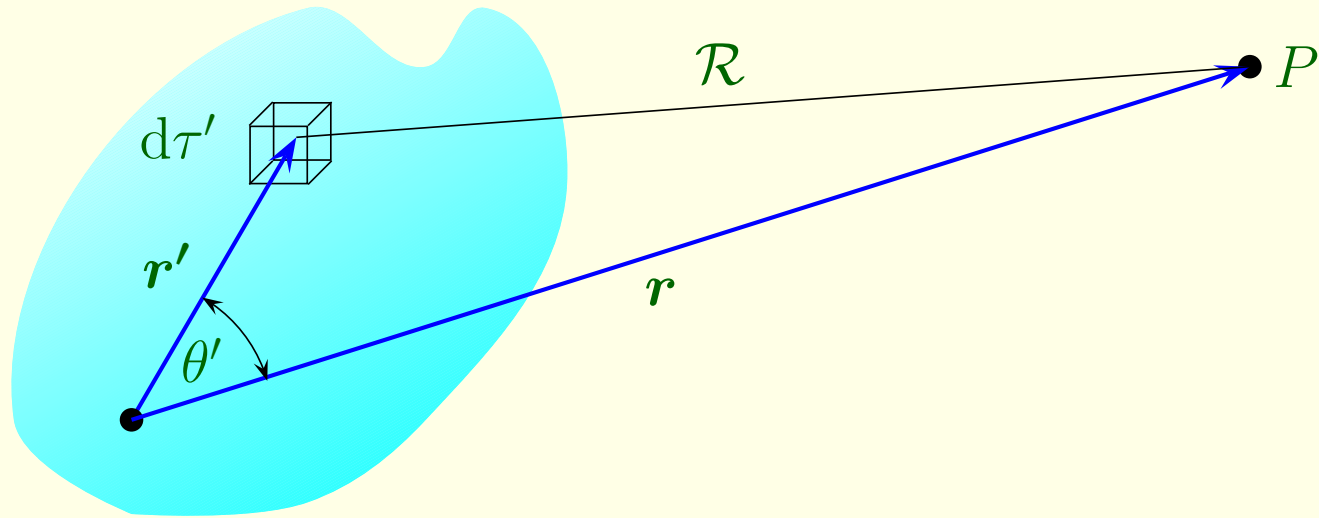


Przypadek ogólny



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

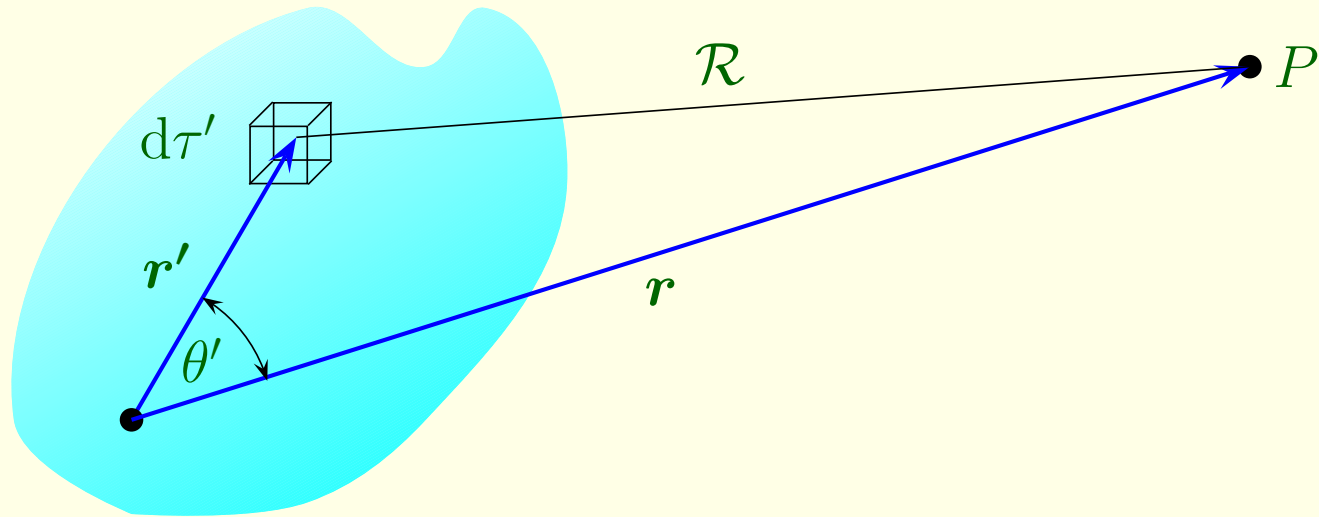
Przypadek ogólny



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\mathcal{R}^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta' = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' \right]$$

Przypadek ogólny



$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\mathcal{R}^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta' = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' \right]$$

$$\mathcal{R} = r\sqrt{1 + \epsilon}, \quad \epsilon = \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right), \quad \epsilon \ll 1 \text{ dla } r'/r \ll 1$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r}(1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^3 + \dots \right]$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{1}{2} \left(3 \cos^2 \theta' - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \frac{1}{2} \left(5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta' \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta' - 1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta') + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta')$$

wzór ogólny

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \dots \right]$$

rozwińcie
multipolowe

3.4.2 Człony monopolowy i dipolowy

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho \, d\tau \quad \text{człon monopolowy}$$

3.4.2 Człony monopolowy i dipolowy

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho \, d\tau \quad \text{człón monopolowy}$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad \text{człón dipolowy}$$

3.4.2 Człony monopolowy i dipolowy

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho \, d\tau \quad \text{człon monopolowy}$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad \text{człon dipolowy}$$

$$r' \cos \theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

3.4.2 Człony monopolowy i dipolowy

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho \, d\tau \quad \text{człón monopolowy}$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad \text{człón dipolowy}$$

$$r' \cos \theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'$$

3.4.2 Człony monopolowy i dipolowy

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho \, d\tau \quad \text{człón monopolowy}$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad \text{człón dipolowy}$$

$$r' \cos \theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'$$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'$$

moment dipolowy

3.4.2 Człony monopolowy i dipolowy

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho \, d\tau \quad \text{człon monopolowy}$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad \text{człon dipolowy}$$

$$r' \cos \theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'$$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'$$

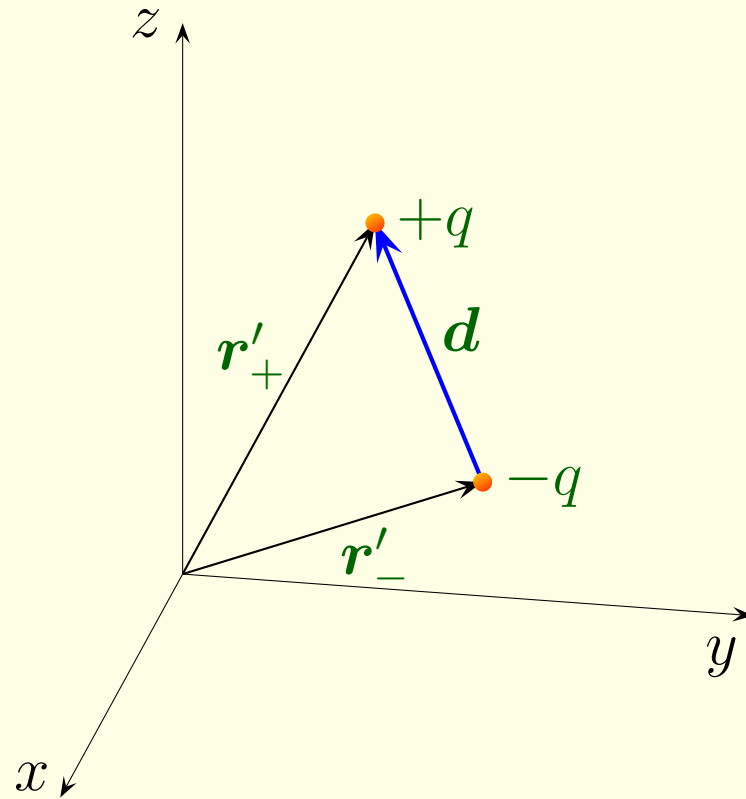
moment dipolowy

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

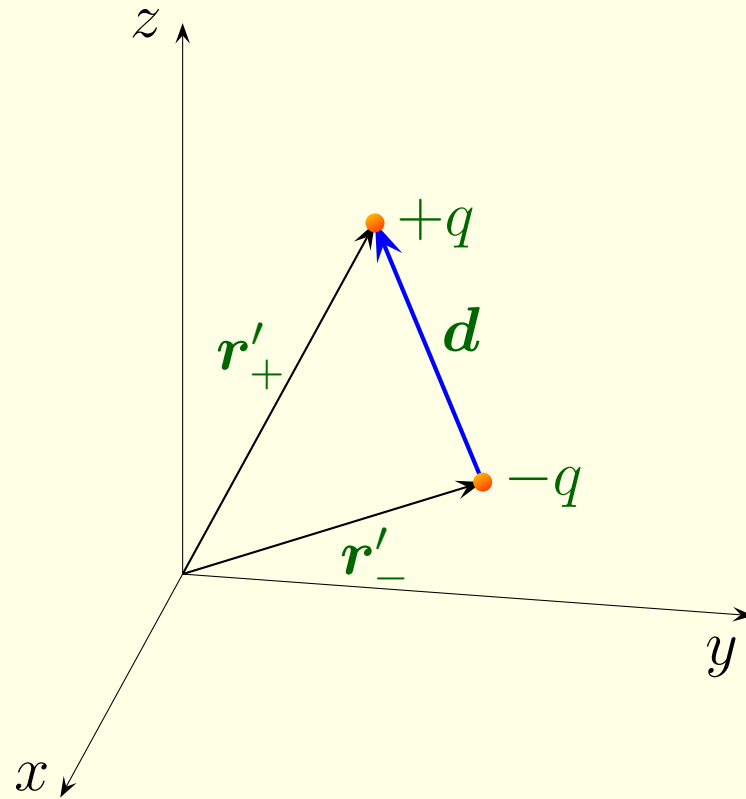
potencjał od dipola

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i$$

moment dipolowy układu ładunków punktowych



$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i \quad \text{moment dipolowy układu ładunków punktowych}$$



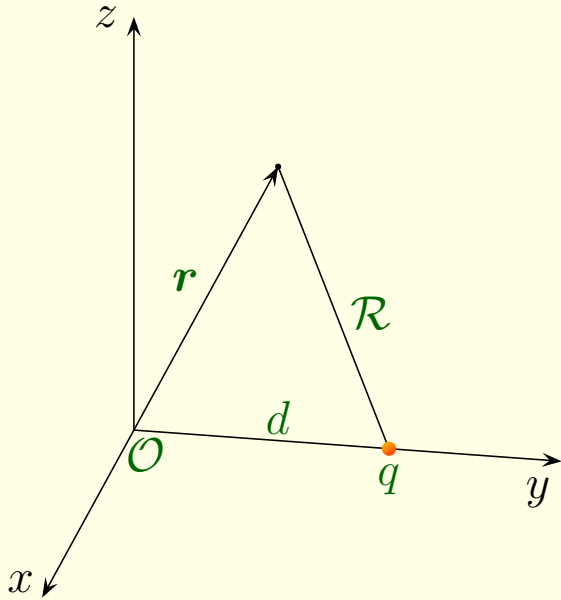
$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}'_+ - q\mathbf{r}'_- = q(\mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}'_-) = q\mathbf{d} \quad \text{dla dipola fizycznego}$$

$$d \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty, \quad qd = p, \quad \text{dipol idealny}$$

$d \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty, \quad qd = p$, dipol idealny

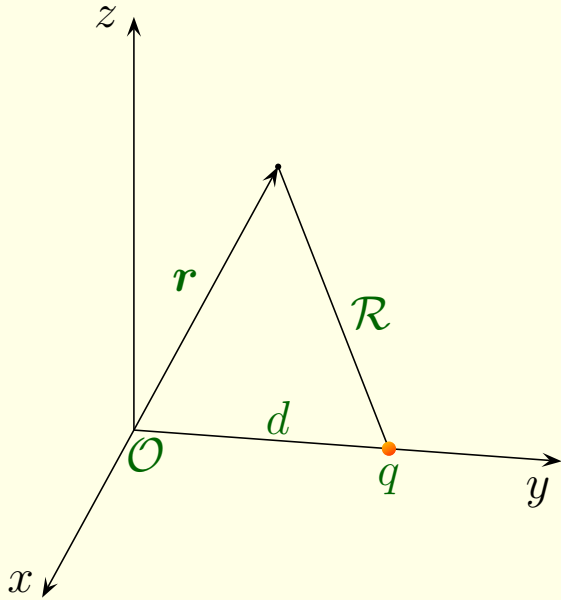
Moment dipolowy jest wektorem.

3.4.3 Problem początku układu współrzędnych w rozwinięciu multipolowym

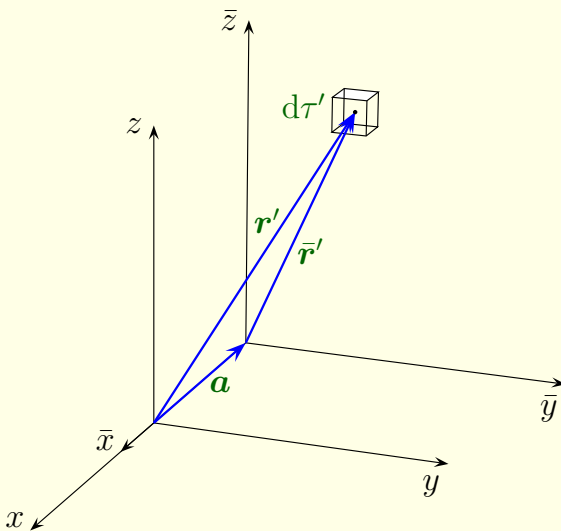


ten ładunek ma moment dipolowy $\mathbf{p} = qd \hat{\mathbf{y}}$;
potencjał $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}}$ rozwinięty względem $1/r$
ma wszystkie potęgi; zmiana początku układu
współrzędnych zmienia postać rozwinięcia
multipolowego; **moment monopolowy** nie zmienia
się

3.4.3 Problem początku układu współrzędnych w rozwinięciu multipolowym

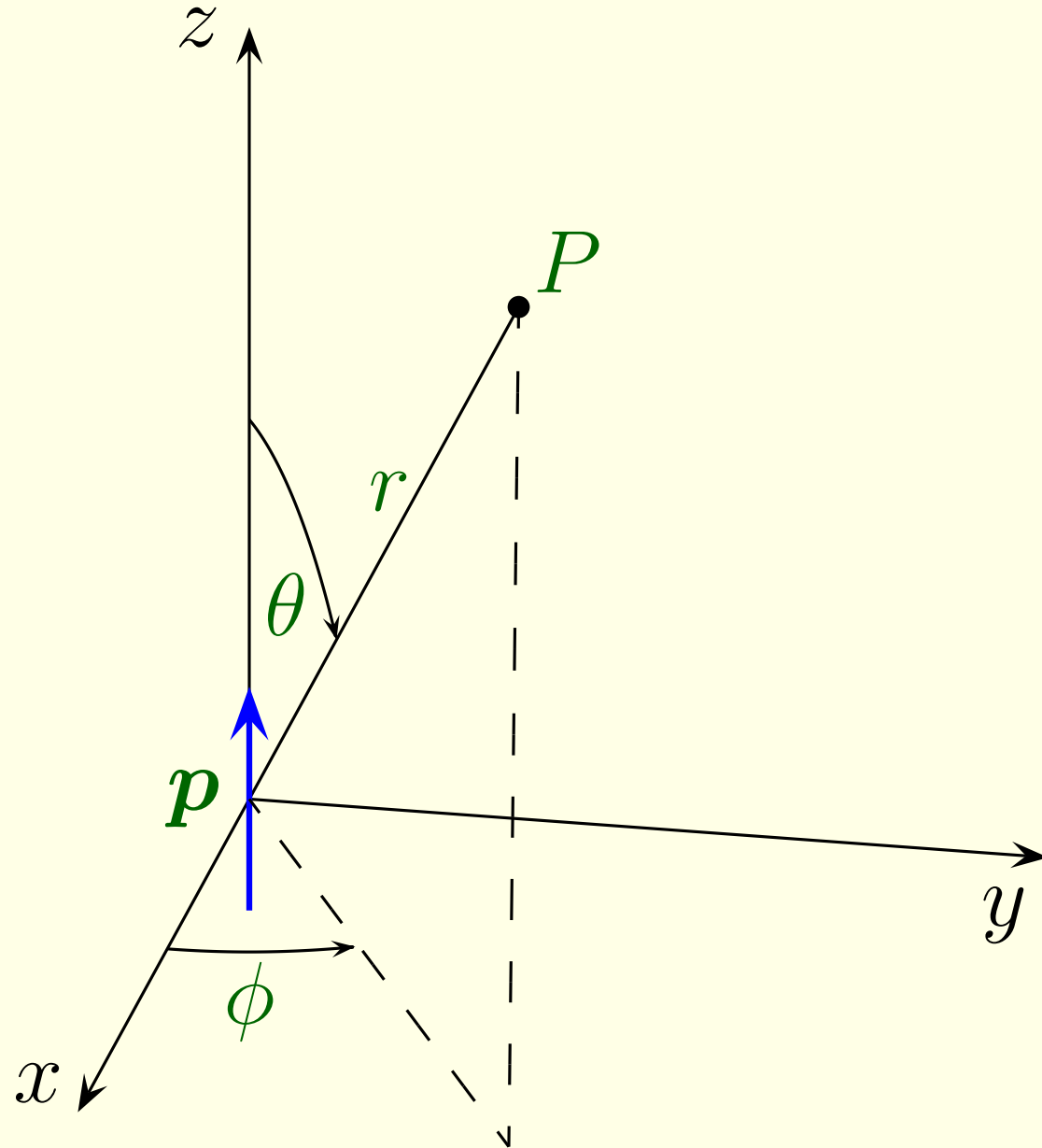


ten ładunek ma moment dipolowy $\mathbf{p} = qd \hat{\mathbf{y}}$;
potencjał $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ rozwinięty względem $1/r$
ma wszystkie potęgi; zmiana początku układu
współrzędnych zmienia postać rozwinięcia
multipolowego; **moment monopolowy** nie zmienia
się



$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}} &= \int \bar{\mathbf{r}}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \int (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \\ &= \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' - \mathbf{a} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau' \\ &= \mathbf{p} - Q\mathbf{a}\end{aligned}$$

3.4.4 Natężenie pola elektrycznego dipola



$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = - \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) V$$

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = - \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$V_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = - \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) V$$

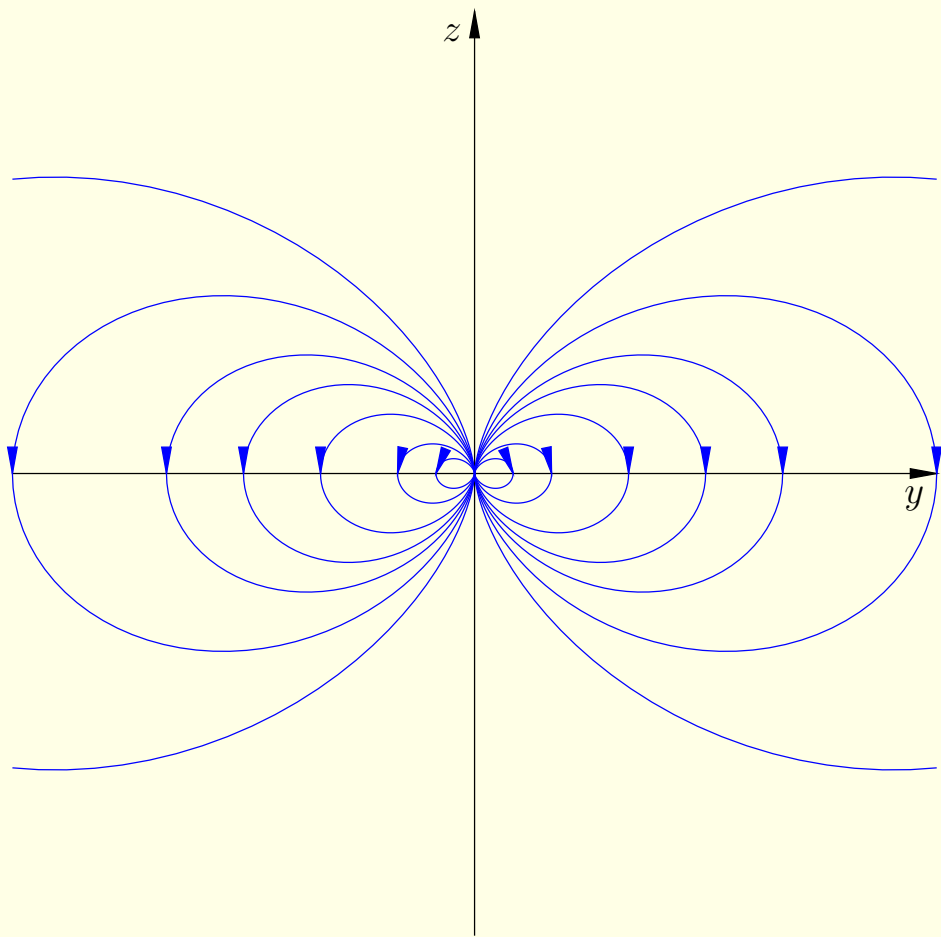
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

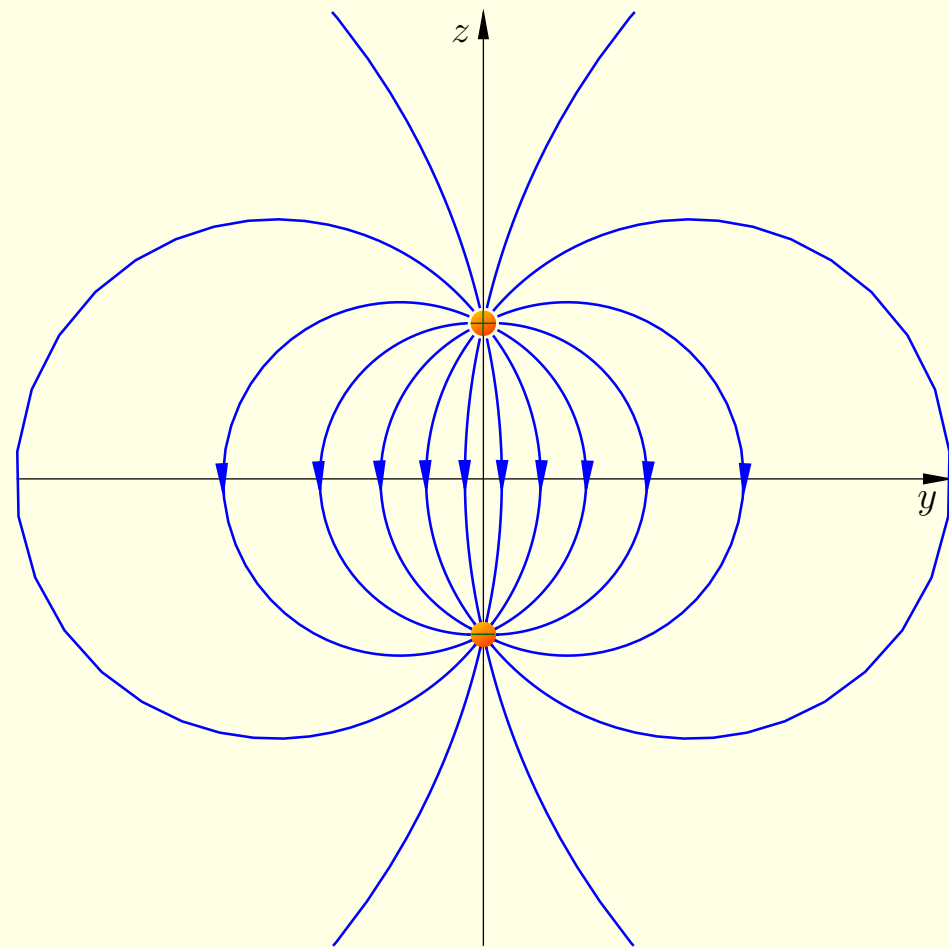
$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \left(2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

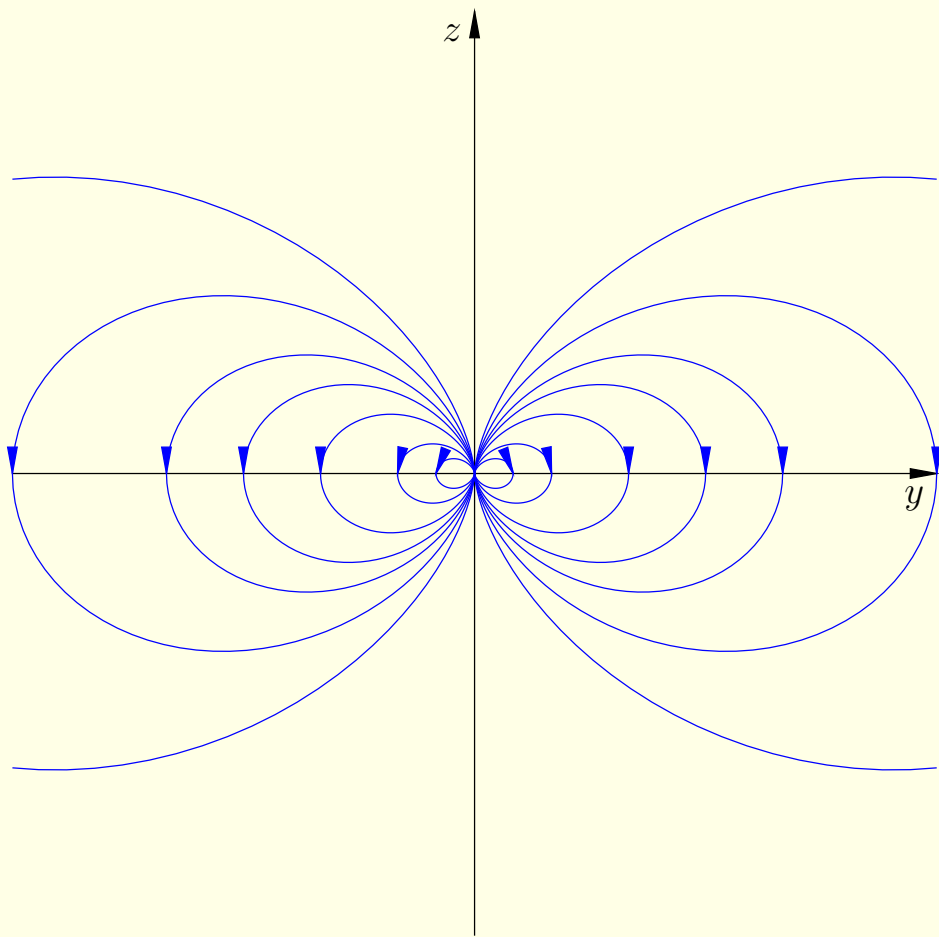
w wybranym układzie
współrzędnych



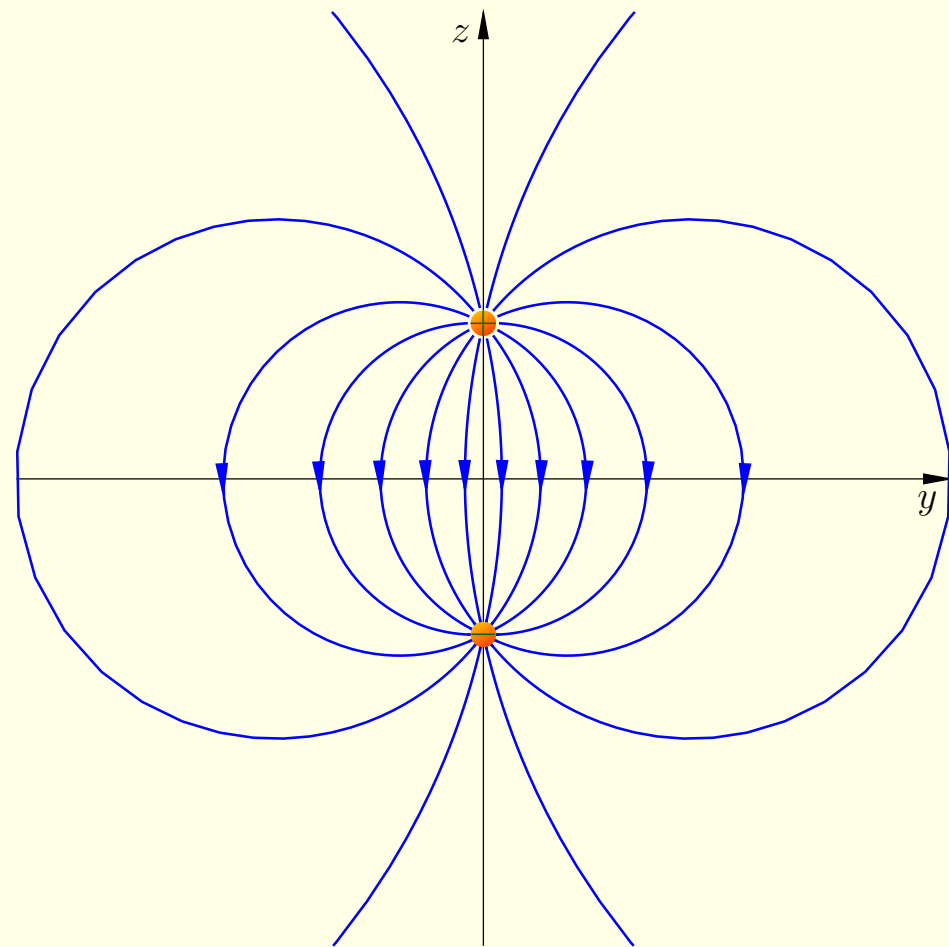
pole „idealnego” dipola



pole dipola fizycznego



pole „idealnego” dipola



pole dipola fizycznego

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]$$

pole dipola w dowolnym układzie współrzędnych