

# Elektrodynamika

Część 1

Elektrostatyka

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Literatura</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Elektrostatyka</b>	<b>4</b>
2.1	Pole elektryczne . . . . .	4
2.2	Dywergencja i rotacja pola elektrostatycznego . . . . .	11
2.3	Potencjał elektryczny . . . . .	28
2.4	Praca i energia w elektrostatyce . . . . .	40
2.5	Przewodniki . . . . .	47

# 1 Literatura

Wykład oparty jest na podręczniku:

D. J. Griffiths, Podstawy elektrodynamiki, PWN, Warszawa, 2001

W prezentacjach używam notacji zgodnej (prawie) z polską wersją tego podręcznika.

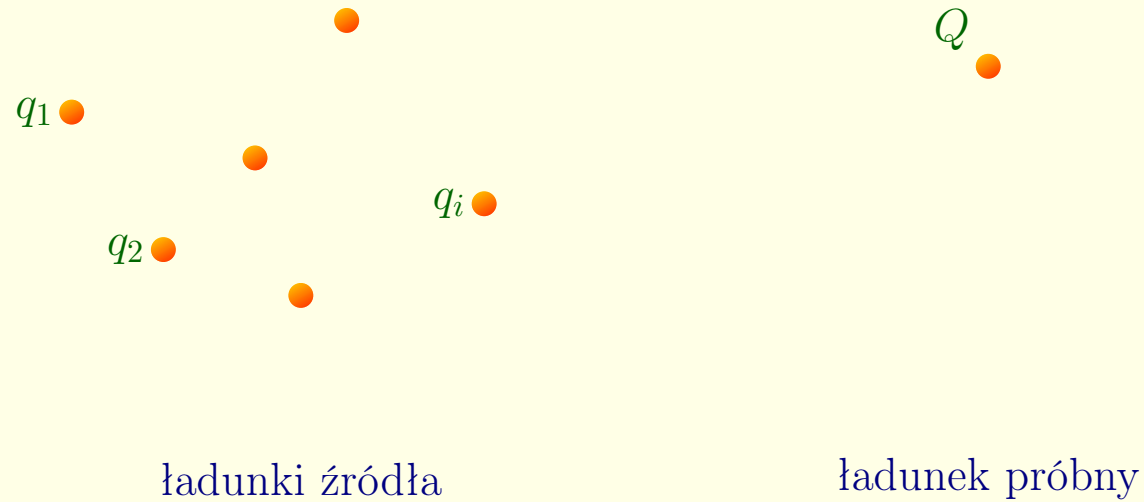
Należy pamiętać, że **tłusta czcionka** oznacza wektor, np. ***E*** oznacza  $\vec{E}$  w pisowni ręcznej.

Prezentacje mogą być wykorzystywane wyłącznie w celach dydaktycznych.

## 2 Elektrostatyka

### 2.1 Pole elektryczne

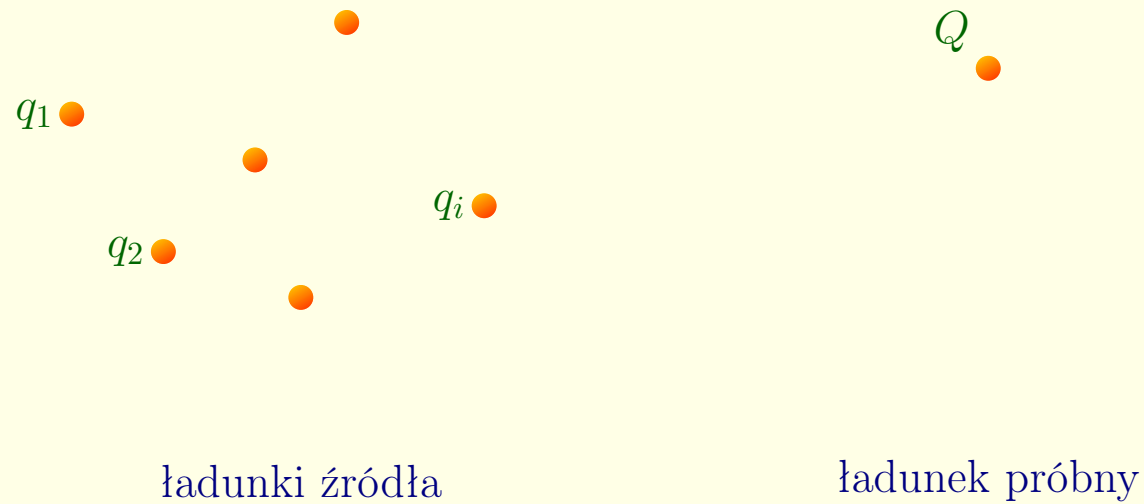
#### 2.1.1 Zasada superpozycji



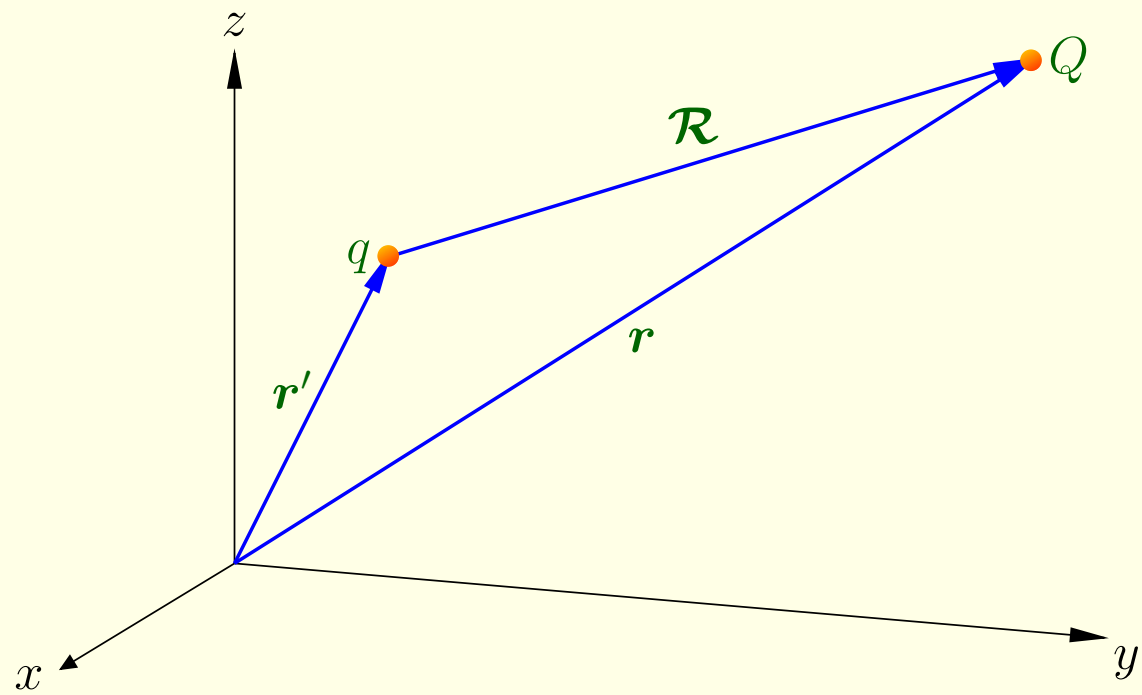
## 2 Elektrostatyka

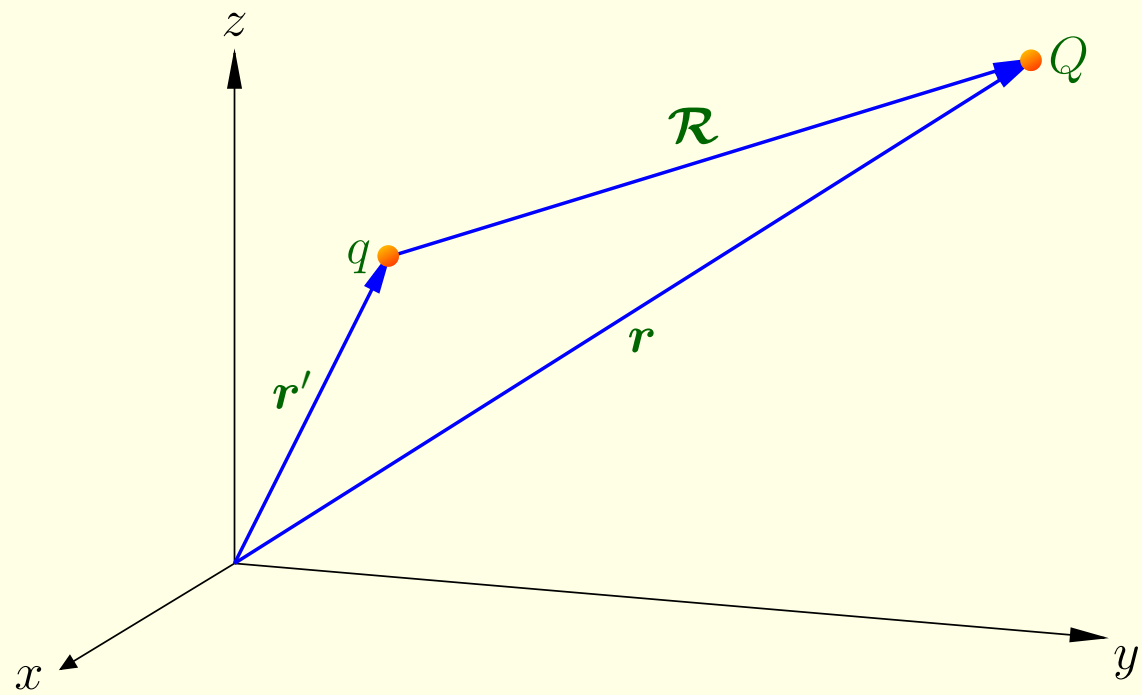
### 2.1 Pole elektryczne

#### 2.1.1 Zasada superpozycji

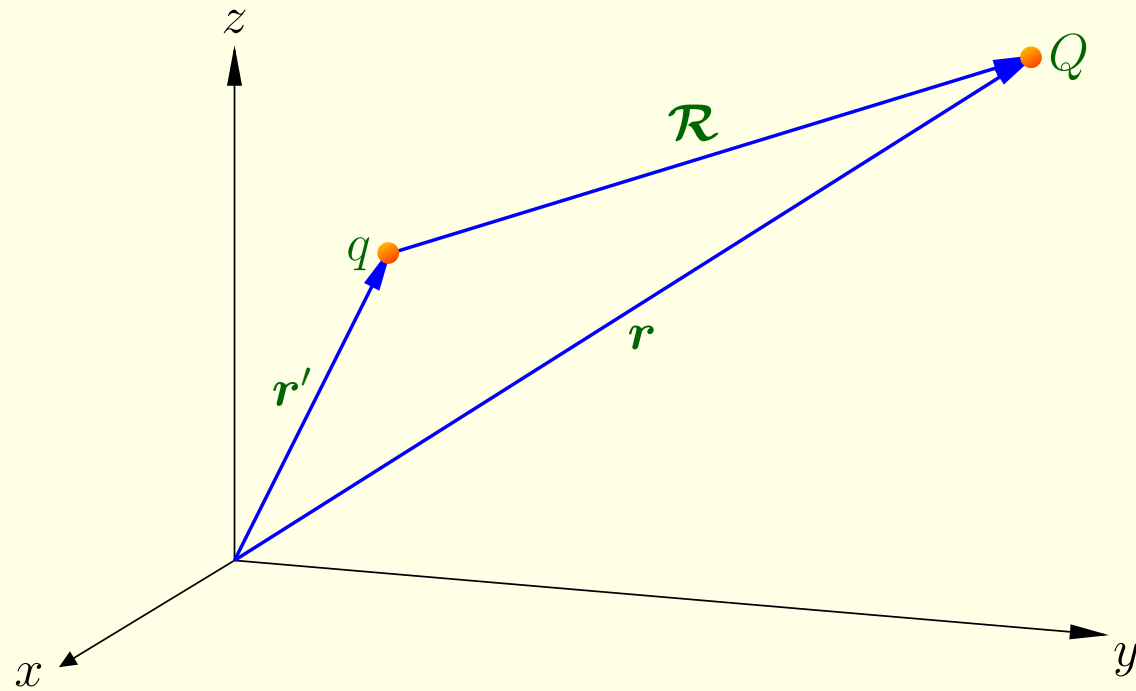


$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$$





$$\mathcal{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$



$$\mathcal{R} = r - r'$$

Jaką siłą  $q$  działa na  $Q$ ?



## 2.1.2 Prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}$$

## 2.1.2 Prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right]$$

przenikalność elektryczna próżni

## 2.1.2 Prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right]$$

przenikalność elektryczna próżni

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

wersor wskazujący kierunek i  
zwrot wektora  $\mathcal{R}$

## 2.1.3 Pole elektryczne

Całkowita siła działająca na  $Q$  pochodząca od ładunków  $q_1, q_2, \dots, q_n$  odległych od  $Q$  o  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$$

## 2.1.3 Pole elektryczne

Całkowita siła działająca na  $Q$  pochodząca od ładunków  $q_1, q_2, \dots, q_n$  odległych od  $Q$  o  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 Q}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \dots \right)$$

## 2.1.3 Pole elektryczne

Całkowita siła działająca na  $Q$  pochodząca od ładunków  $q_1, q_2, \dots, q_n$  odległych od  $Q$  o  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 Q}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \dots \right) \\ &= Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \frac{q_3}{\mathcal{R}_3^2} \hat{\mathcal{R}}_3 + \dots \right)\end{aligned}$$

## 2.1.3 Pole elektryczne

Całkowita siła działająca na  $Q$  pochodząca od ładunków

$q_1, q_2, \dots, q_n$  odległych od  $Q$  o  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 Q}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathbf{R}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathbf{R}}_2 + \dots \right) \\ &= Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathbf{R}}_1 + \frac{q_2}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathbf{R}}_2 + \frac{q_3}{\mathcal{R}_3^2} \hat{\mathbf{R}}_3 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = QE}$$

## 2.1.3 Pole elektryczne

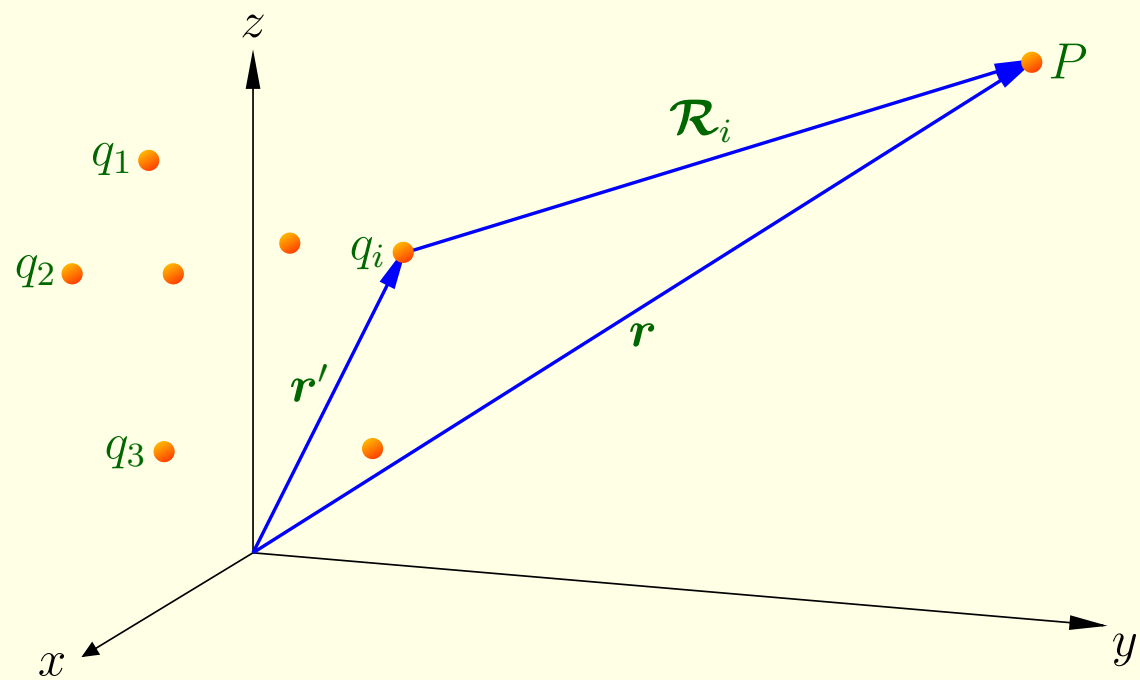
Całkowita siła działająca na  $Q$  pochodząca od ładunków  $q_1, q_2, \dots, q_n$  odległych od  $Q$  o  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 Q}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \dots \right) \\ &= Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \frac{q_3}{\mathcal{R}_3^2} \hat{\mathcal{R}}_3 + \dots \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{E}}$$

$\mathbf{E}$  — natężenie pola elektrycznego





$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathcal{R}}_i$$

## 2.1.4 Ciągłe rozkłady ładunku

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dq$$

$$dq = \begin{cases} \lambda dl' & \text{ładunek liniowy} \\ \sigma da' & \text{ładunek powierzchniowy} \\ \rho d\tau' & \text{ładunek objętościowy} \end{cases}$$

## 2.1.4 Ciągłe rozkłady ładunku

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dq$$

$$dq = \begin{cases} \lambda dl' & \text{ładunek liniowy} \\ \sigma da' & \text{ładunek powierzchniowy} \\ \rho d\tau' & \text{ładunek objętościowy} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dl' \quad \text{pole od ładunku liniowego:}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} da' \quad \text{pole od ładunku powierzchniowego}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} \, da' \quad \text{pole od ładunku powierzchniowego}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} \, d\tau' \quad \text{pole od ładunku objętościowego}$$

## 2.2 Dywergencja i rotacja pola elektrostatycznego

### 2.2.1 Linie pola, strumień i prawo Gaussa

Weźmy pojedynczy ładunek  $q$  umieszczony w początku układu współrzędnych, wtedy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

## 2.2 Dywergencja i rotacja pola elektrostatycznego

### 2.2.1 Linie pola, strumień i prawo Gaussa

Weźmy pojedynczy ładunek  $q$  umieszczony w początku układu współrzędnych, wtedy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Pole jest silne w pobliżu ładunku i w miarę oddalania się od ładunku maleje jak  $1/r^2$ .

## 2.2 Dywergencja i rotacja pola elektrostatycznego

### 2.2.1 Linie pola, strumień i prawo Gaussa

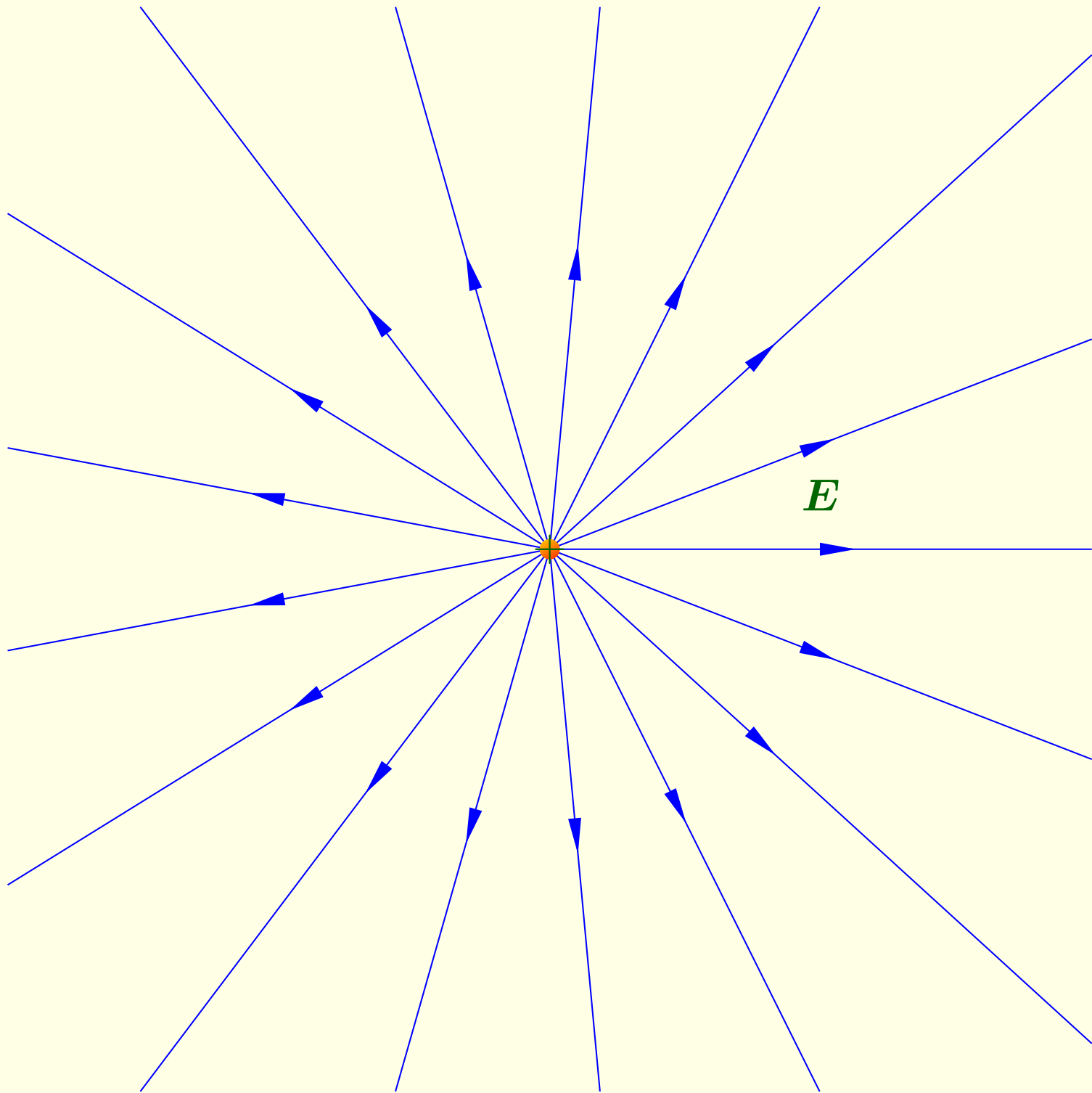
Weźmy pojedynczy ładunek  $q$  umieszczony w początku układu współrzędnych, wtedy

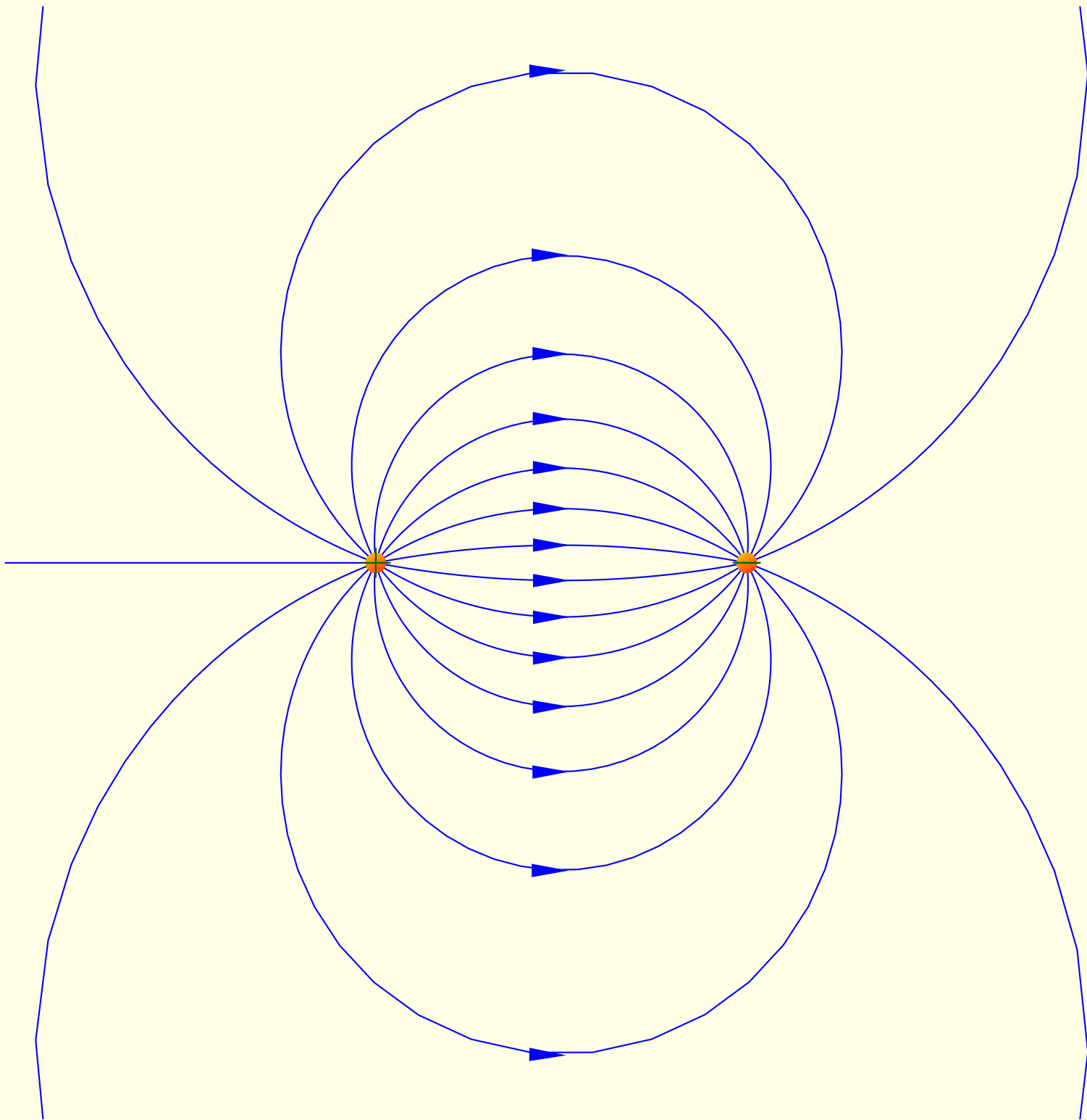
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

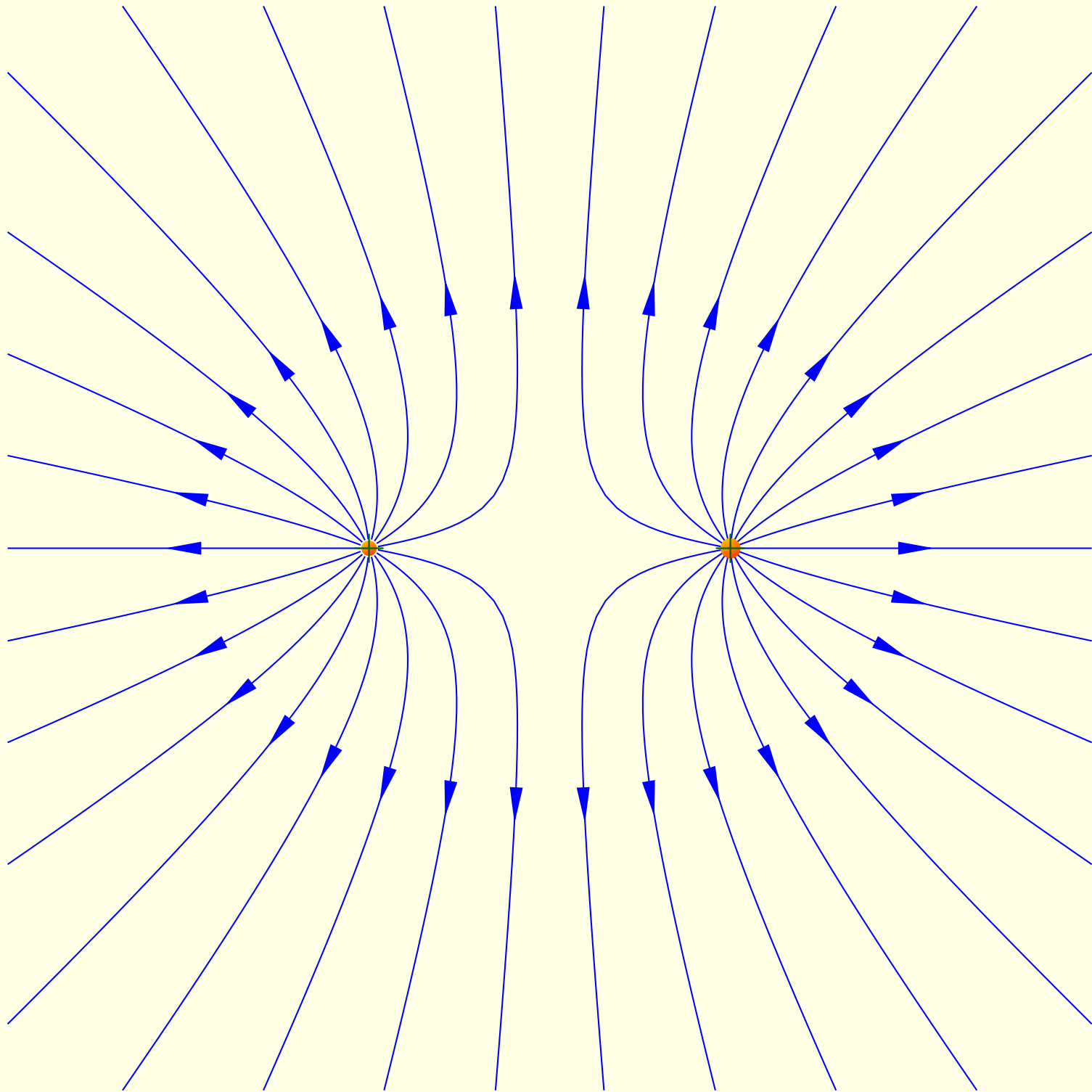
Pole jest silne w pobliżu ładunku i w miarę oddalania się od ładunku maleje jak  $1/r^2$ .

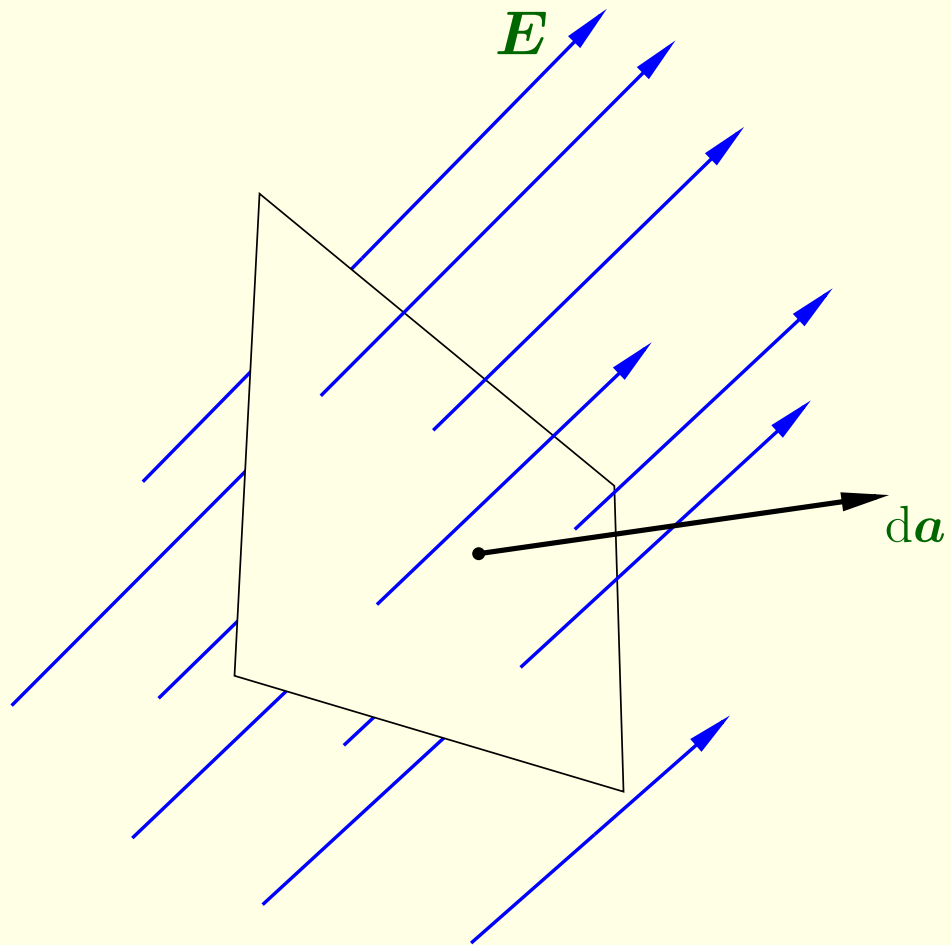
Dla ładunku dodatniego pole skierowane jest od ładunku.











Strumień pola  $\mathbf{E}$  przez powierzchnię  $\mathcal{S}$

$$\Phi_E \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

jest miarą „liczby linii pola” przechodzących przez  $\mathcal{S}$ .

Dla ładunku punktowego  $q$  umieszczonego w początku układu współrzędnych, strumień pola  $\mathbf{E}$  przez sferę o promieniu  $r$  wynosi

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left( r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Dla ładunku punktowego  $q$  umieszczonego w początku układu współrzędnych, strumień pola  $\mathbf{E}$  przez sferę o promieniu  $r$  wynosi

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left( r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Wynik nie zależy od promienia sfery.

Wynik jest taki sam dla dowolnej powierzchni zamkniętej.

# Prawo Gaussa

Strumień pola przez dowolną powierzchnię obejmującą ładunek  $q$  wynosi  $q/\epsilon_0$

# Prawo Gaussa

Strumień pola przez dowolną powierzchnię obejmującą ładunek  $q$  wynosi  $q/\epsilon_0$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$



# Prawo Gaussa

Strumień pola przez dowolną powierzchnię obejmującą ładunek  $q$  wynosi  $q/\epsilon_0$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left( \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} \right)$$

# Prawo Gaussa

Strumień pola przez dowolną powierzchnię obejmującą ładunek  $q$  wynosi  $q/\epsilon_0$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left( \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\epsilon_0} q_i \right)$$

# Prawo Gaussa

Strumień pola przez dowolną powierzchnię obejmującą ładunek  $q$  wynosi  $q/\epsilon_0$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left( \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\epsilon_0} q_i \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}$$

Strumień pola przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy  $Q_{\text{wew}}/\epsilon_0$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

twierdzenie o dywergencji  
(twierdzenie Gaussa)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

twierdzenie o dywergencji  
(twierdzenie Gaussa)

$$Q_{\text{wew}} = \int_V \rho d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

twierdzenie o dywergencji  
(twierdzenie Gaussa)

$$Q_{\text{wew}} = \int_V \rho d\tau$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int_V \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

twierdzenie o dywergencji  
(twierdzenie Gaussa)

$$Q_{\text{wew}} = \int_V \rho d\tau$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int_V \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Prawo Gaussa w postaci różniczkowej

## 2.2.2 Dywergencja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$



## 2.2.2 Dywergencja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

## 2.2.2 Dywergencja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{R})$$

delta Diraca

## 2.2.2 Dywergencja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{R})$$

delta Diraca

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

## 2.2.2 Dywergencja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{cała przestrzeń}} \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{R})$$

delta Diraca

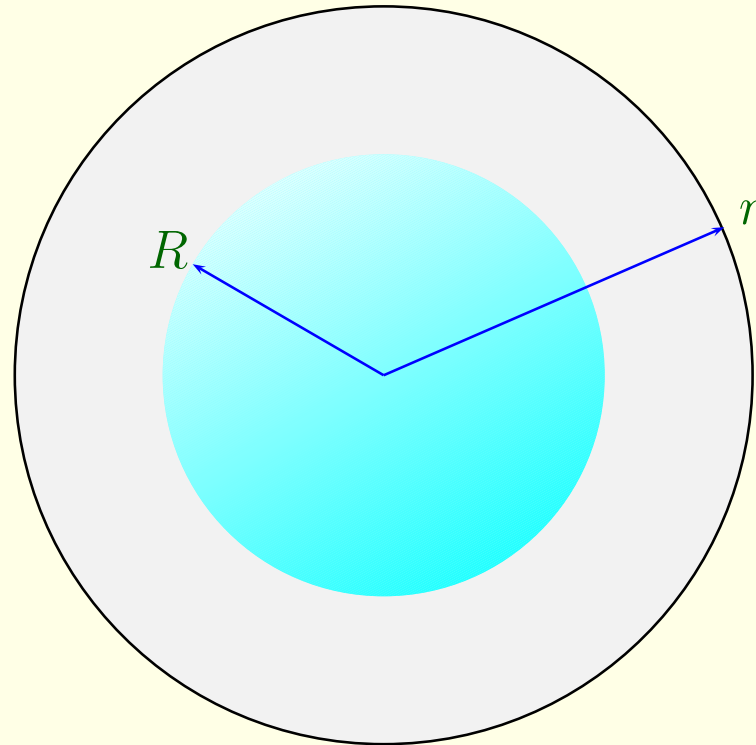
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}$$

## 2.2.3 Zastosowania prawa Gaussa

Przykład:

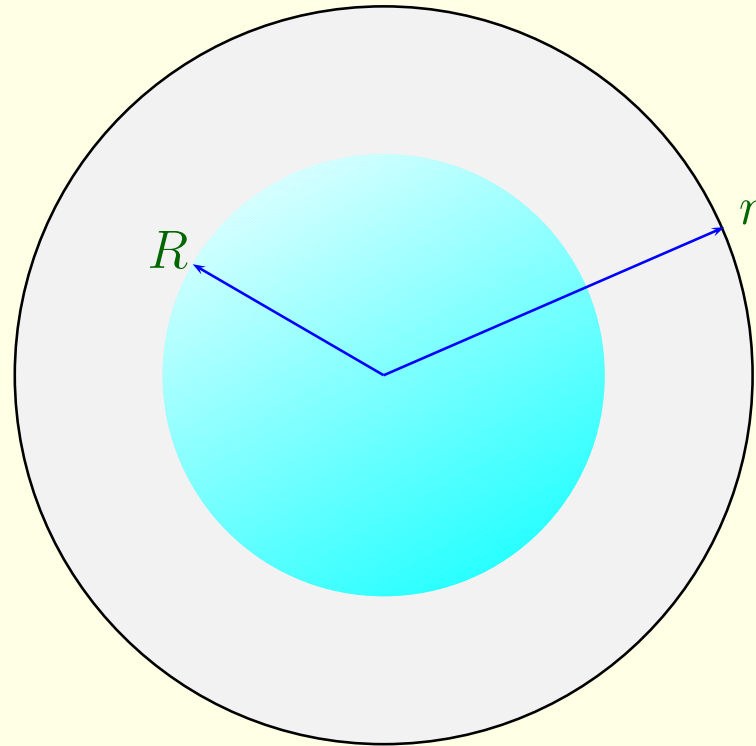
Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$



## 2.2.3 Zastosowania prawa Gaussa

Przykład:

Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$

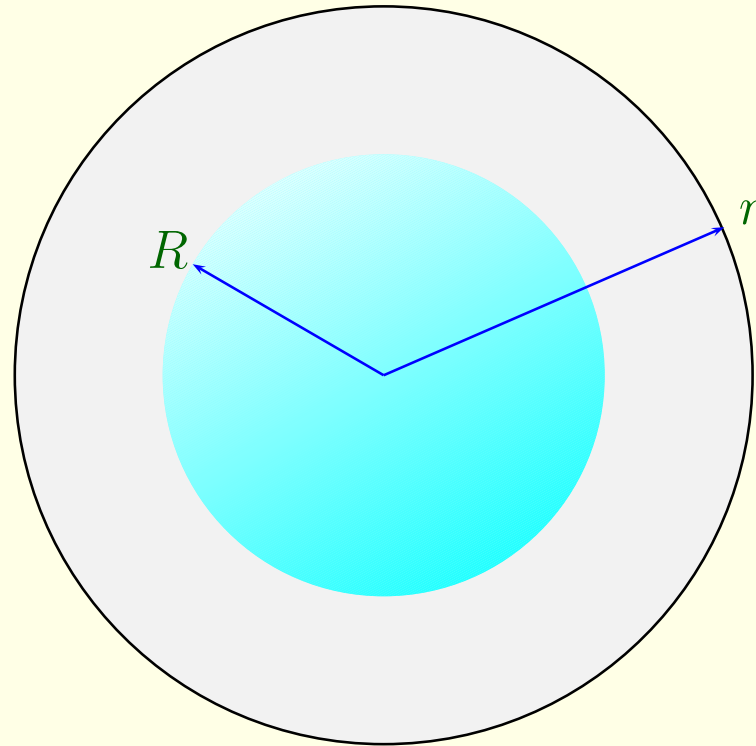


$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}},$$

## 2.2.3 Zastosowania prawa Gaussa

Przykład:

Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}, \quad Q_{\text{wew}} = q$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Pole na zewnątrz sfery jest takie jak od ładunku punktowego umieszczonego w środku kuli.

Prawo Gaussa jest przydatne do obliczania pola w przypadku kiedy układ wykazuje wysoką symetrię.

- Symetria sferyczna
- Symetria osiowa
- Symetria względem płaszczyzny

Prawo Gaussa jest przydatne do obliczania pola w przypadku kiedy układ wykazuje wysoką symetrię.

- Symetria sferyczna
- Symetria osiowa
- Symetria względem płaszczyzny



Prawo Gaussa jest przydatne do obliczania pola w przypadku kiedy układ wykazuje wysoką symetrię.

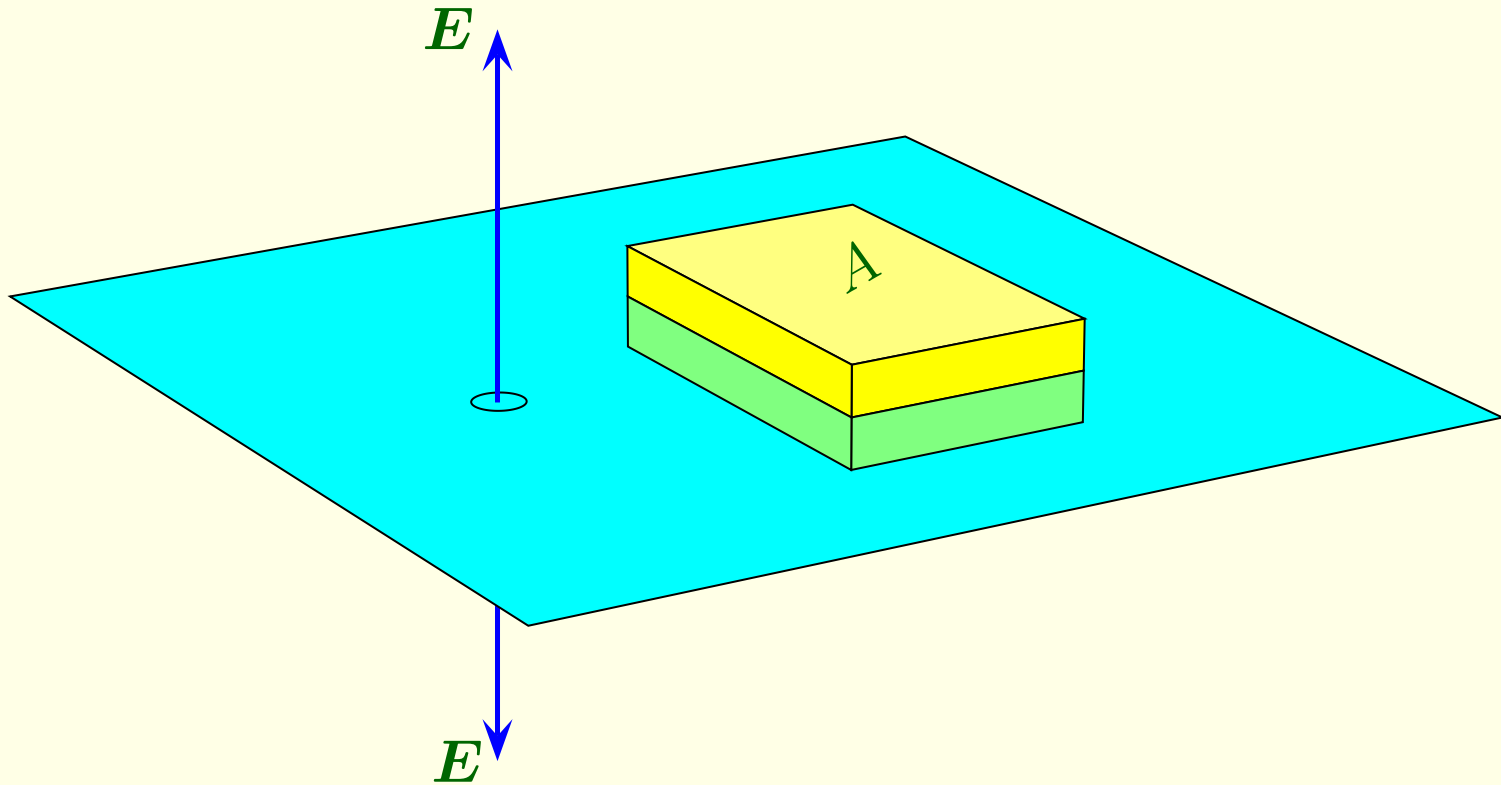
- Symetria sferyczna
- Symetria osiowa
- Symetria względem płaszczyzny

Prawo Gaussa jest przydatne do obliczania pola w przypadku kiedy układ wykazuje wysoką symetrię.

- Symetria sferyczna
- Symetria osiowa
- Symetria względem płaszczyzny

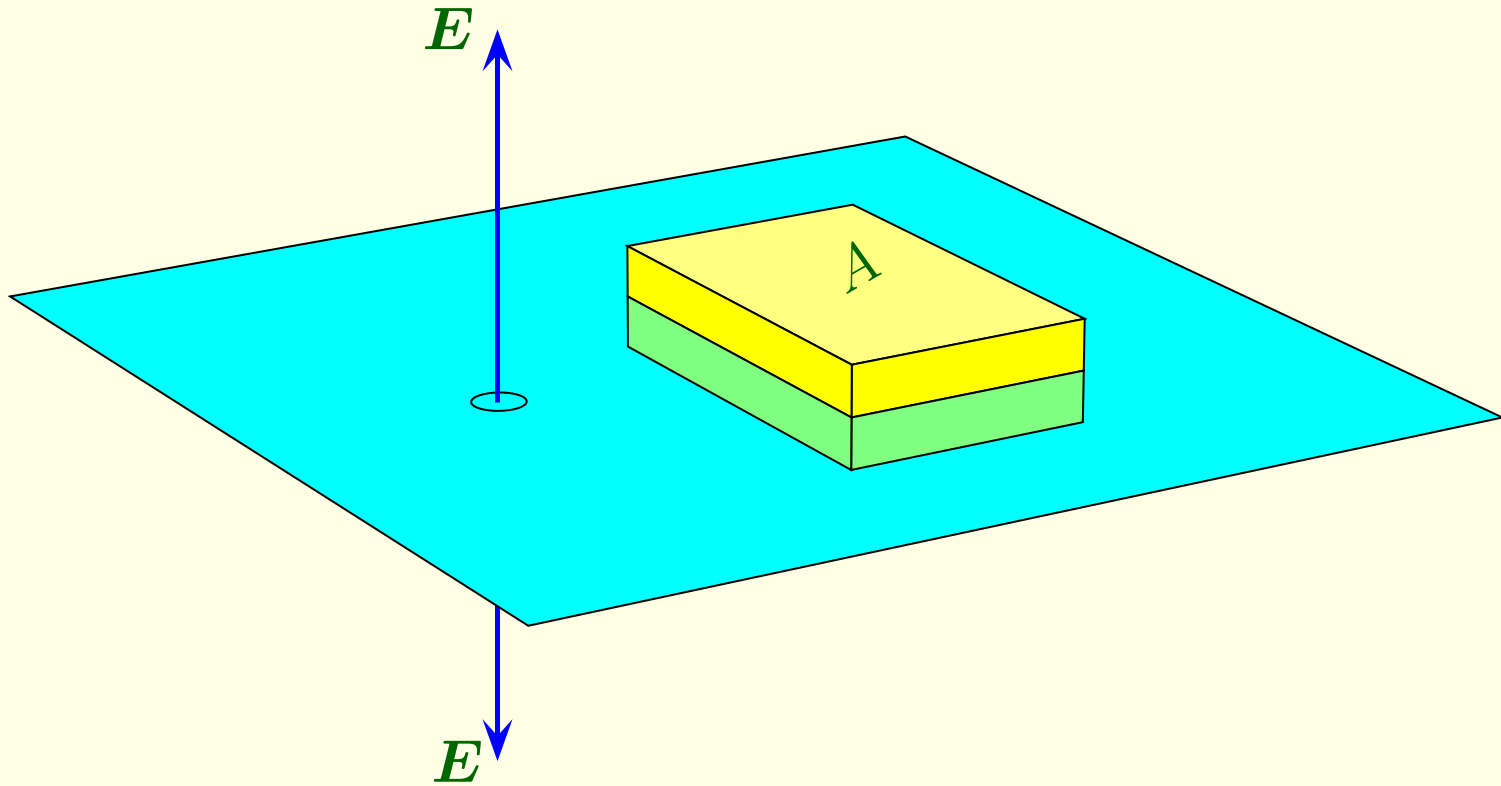
Przykład:

Dana jest nieskończona płaszczyzna naładowana ze stałą gęstością powierzchniową  $\sigma$ . Znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez tę płaszczyznę.



Przykład:

Dana jest nieskończona płaszczyzna naładowana ze stałą gęstością powierzchniową  $\sigma$ . Znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez tę płaszczyznę.



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}$$

od górnej i dolnej powierzchni pudełka mamy

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2A|\mathbf{E}|$$

od górnej i dolnej powierzchni pudełka mamy

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2A|\mathbf{E}|$$

boki pudełka nic nie wnoszą, więc

$$2A|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

od górnej i dolnej powierzchni pudełka mamy

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2A|\mathbf{E}|$$

boki pudełka nic nie wnoszą, więc

$$2A|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

stąd

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$\hat{\mathbf{n}}$  jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni

---

## 2.2.4 Rotacja $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

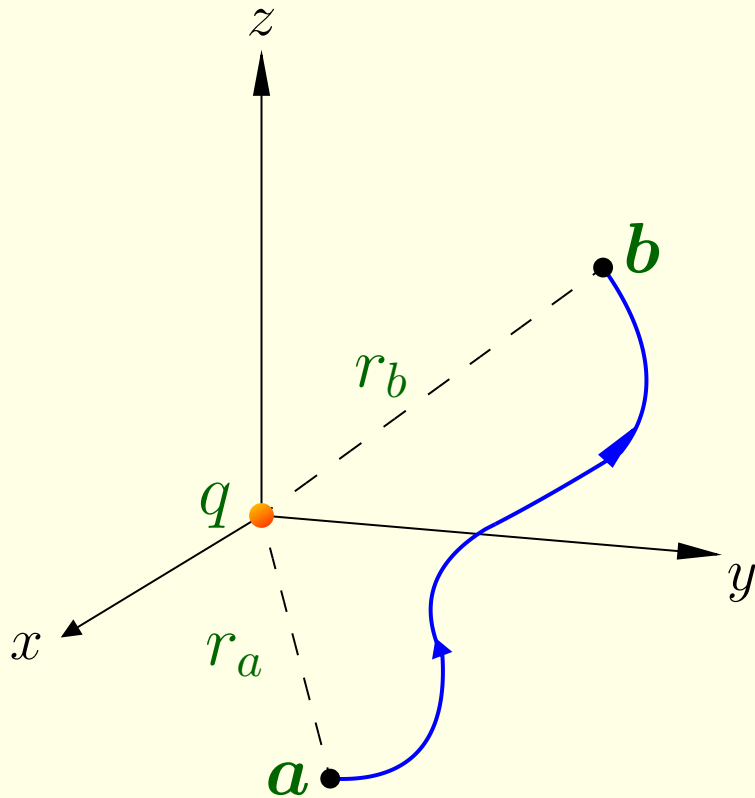
dla ładunku punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych



## 2.2.4 Rotacja E

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

dla ładunku punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych

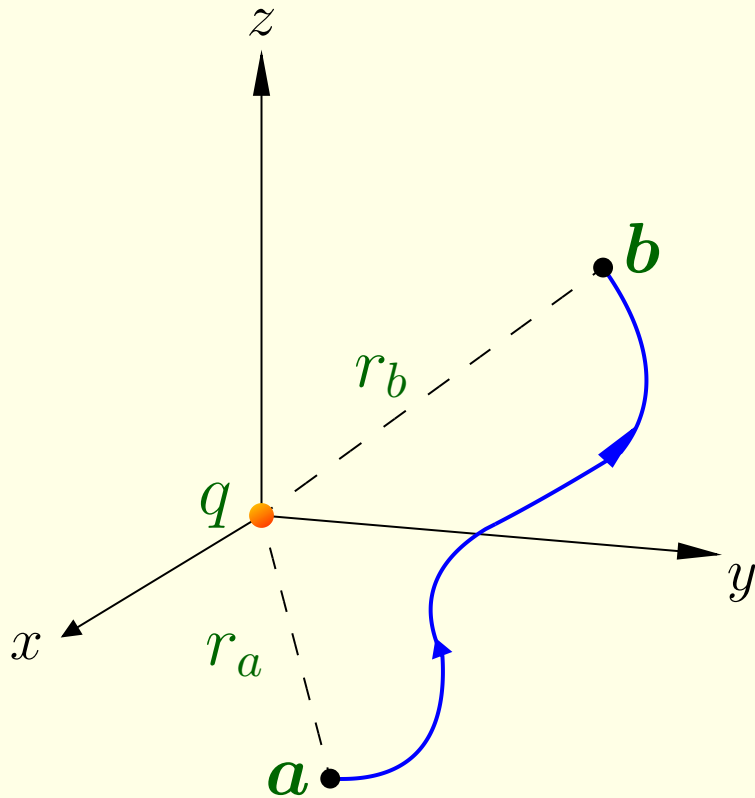


obliczmy całkę krzywoliniową  $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

## 2.2.4 Rotacja E

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

dla ładunku punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych



obliczmy całkę krzywoliniową  $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{we współrzędnych sferycznych}$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

całka po krzywej zamkniętej  
jest równa zero ( $r_a = r_b$ )



$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

całka po krzywej zamkniętej  
jest równa zero ( $r_a = r_b$ )

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

twierdzenie Stokesa

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

całka po krzywej zamkniętej  
jest równa zero ( $r_a = r_b$ )

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

twierdzenie Stokesa

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

z twierdzenia Stokesa

Dla wielu ładunków

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

Dla wielu ładunków

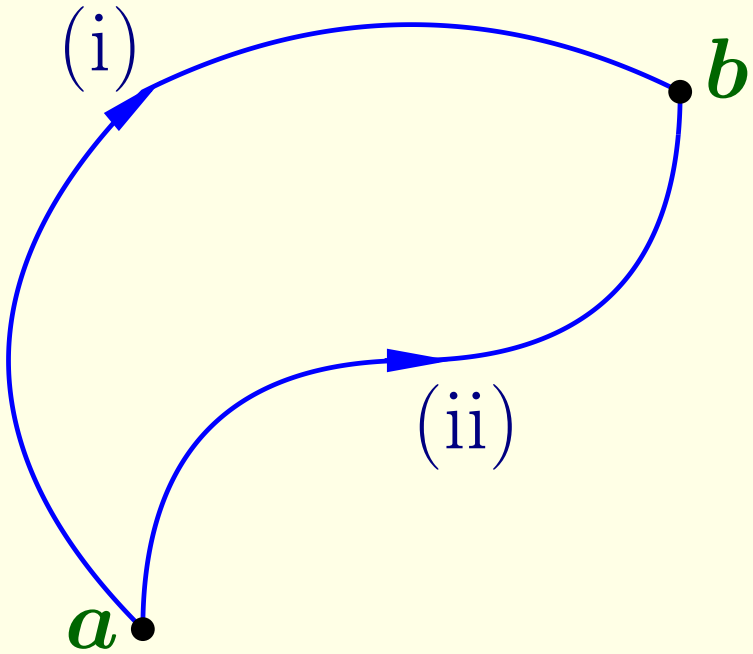
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) \\ &= (\nabla \times \mathbf{E}_1) + (\nabla \times \mathbf{E}_2) + \dots = 0\end{aligned}$$

Słuszne dla dowolnego statycznego układu ładunków

## 2.3 Potencjał elektryczny

### 2.3.1 Wstępne uwagi o potencjale

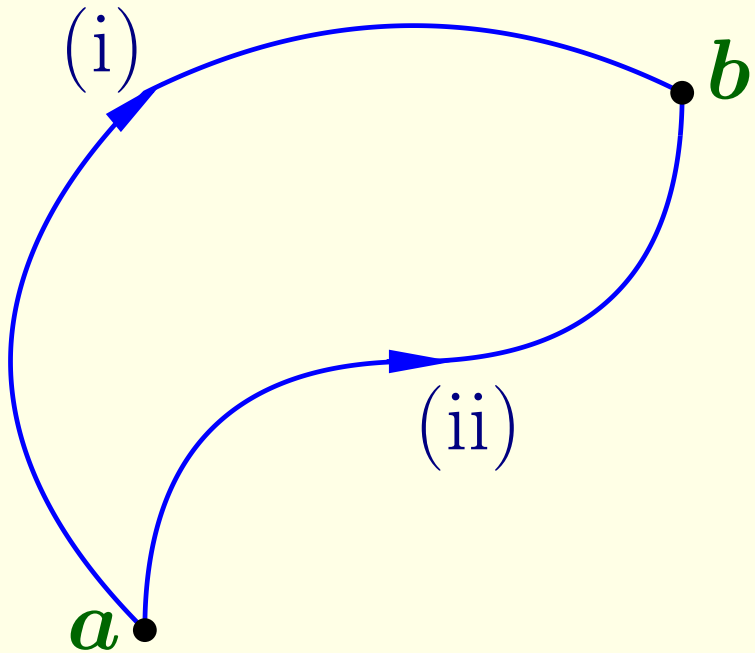


$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0;$$

całka od punktu  $a$  do punktu  $b$  nie zależy od drogi całkowania.

## 2.3 Potencjał elektryczny

### 2.3.1 Wstępne uwagi o potencjale



$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0;$$

całka od punktu  $a$  do punktu  $b$  nie zależy od drogi całkowania.

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

definiujemy funkcję  $V(\mathbf{r})$ ;  
 $\mathcal{O}$  jest punktem odniesienia.

Funkcję tę nazywamy **potencjałem elektrycznym**.

# Różnica potencjałów

# Różnica potencjałów

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})$$



## Różnica potencjałów

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

## Różnica potencjałów

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

## Różnica potencjałów

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

## Różnica potencjałów

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l}$$

twierdzenie dla gradientów

## Różnica potencjałów

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

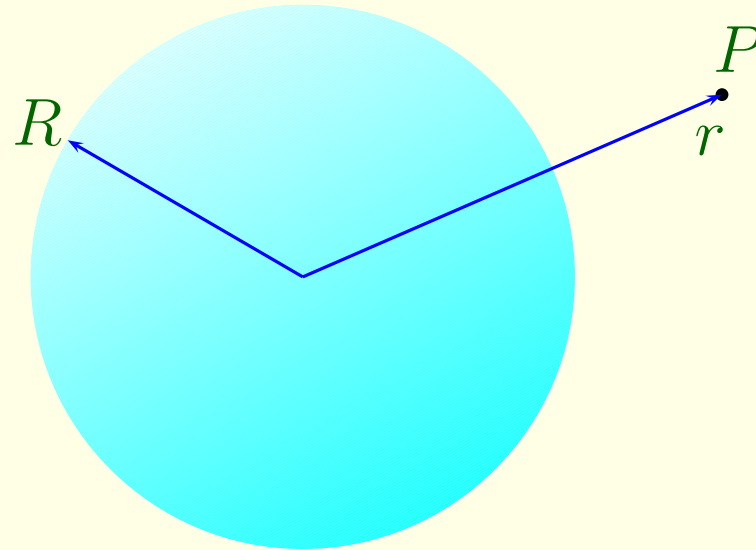
$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l}$$

twierdzenie dla gradientów

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

Przykład:

Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz cienkiej kulistej powłoki o promieniu  $R$ , naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową. Za punkt odniesienia przyjąć punkt w nieskończoności.



Z prawa Gaussa, pole na zewnątrz kuli ( $r > R$ ) wynosi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Wewnątrz kuli ( $r < R$ ) pole  $\mathbf{E} = 0$

Dla ( $r > R$ )

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\mathcal{O}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



D1a ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\mathcal{O}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr'$$

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^r$$

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Dla ( $r < R$ )

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\mathcal{O}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Dla ( $r < R$ )

$$V(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (0) dr'$$

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Dla ( $r < R$ )

$$V(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (0) dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^R + 0$$

Dla ( $r > R$ )

$$V(r) = - \int_{\mathcal{O}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Dla ( $r < R$ )

$$V(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (0) dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^R + 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

---

## 2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$



## 2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

## 2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\Delta V$$

## 2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\Delta V$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

równanie Poissona

## 2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\Delta V$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

równanie Poissona

$$\Delta V = 0$$

równanie Laplace'a

## 2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\Delta V$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

równanie Poissona

$$\Delta V = 0$$

równanie Laplace'a

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla V) = 0 \quad \text{tożsamość wektorowa}$$

### 2.3.3 Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

potencjał ładunku znajdującego się  
w początku układu współrzędnych

## 2.3.3 Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{potencjał ładunku znajdującego się w początku układu współrzędnych}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}} \quad \text{ogólnie, ładunek w punkcie } \mathbf{r}'$$

## 2.3.3 Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \begin{array}{l} \text{potencjał ładunku znajdującego się} \\ \text{w początku układu współrzędnych} \end{array}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}} \quad \text{ogólnie, ładunek w punkcie } \mathbf{r}'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i} \quad \text{dla wielu ładunków}$$



## 2.3.3 Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{potencjał ładunku znajdującego się w początku układu współrzędnych}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}} \quad \text{ogólnie, ładunek w punkcie } \mathbf{r}'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i} \quad \text{dla wielu ładunków}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} dq \quad \text{dla rozkładu ciągłego}$$

## 2.3.3 Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{potencjał ładunku znajdującego się w początku układu współrzędnych}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}} \quad \text{ogólnie, ładunek w punkcie } \mathbf{r}'$$

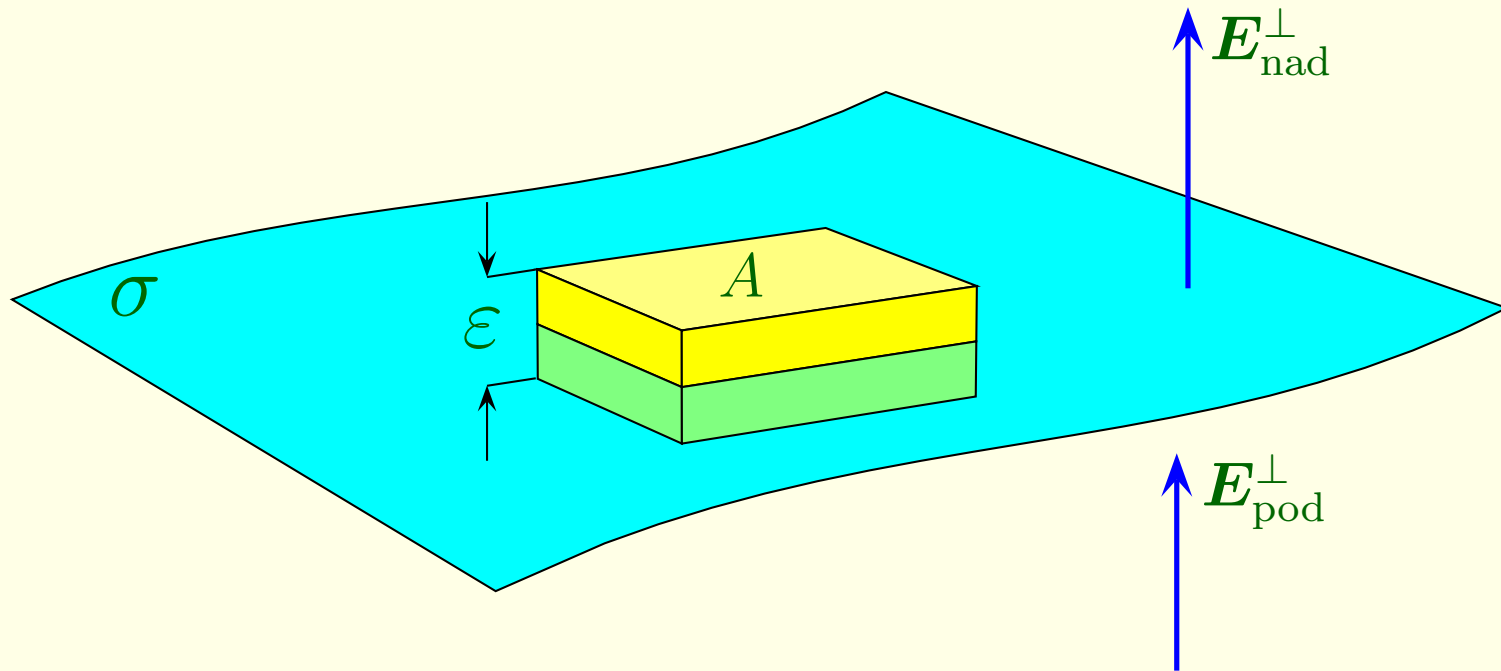
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i} \quad \text{dla wielu ładunków}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} dq \quad \text{dla rozkładu ciągłego}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau'$$

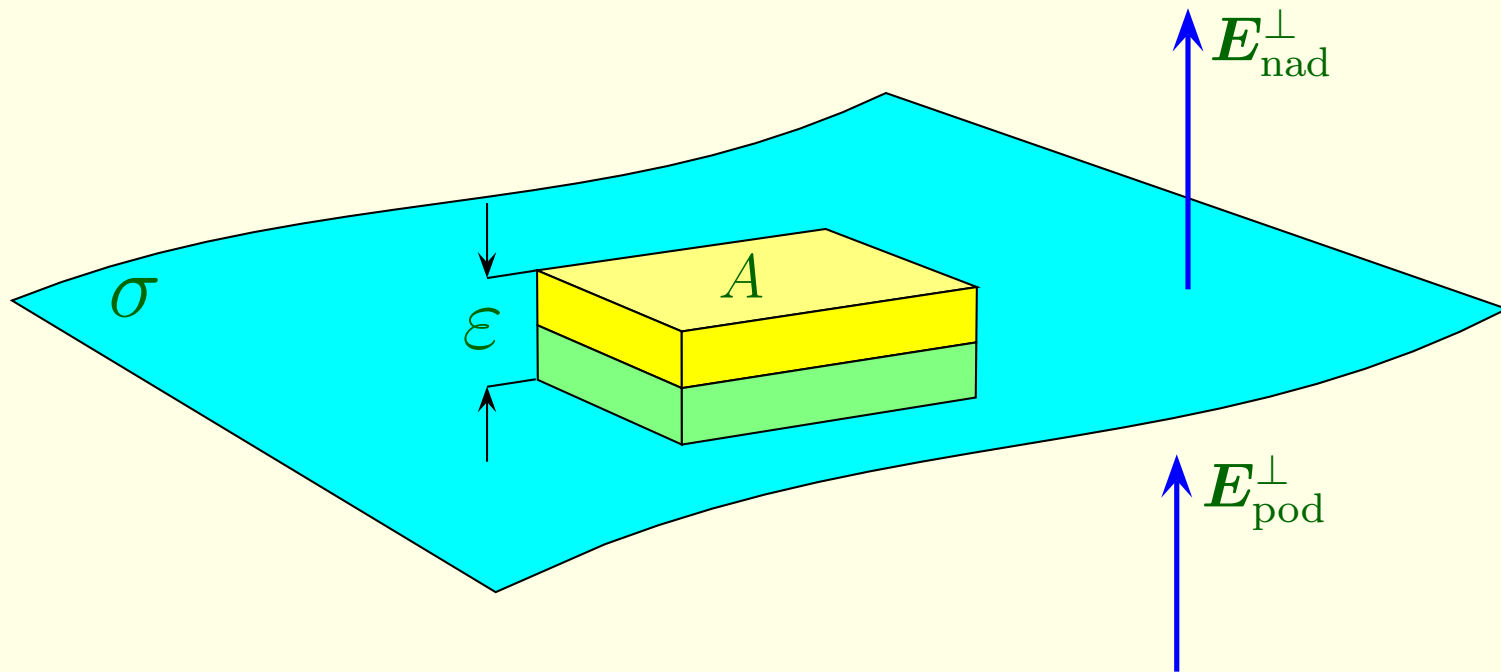
## 2.3.4 Warunki brzegowe w elektrostatyce

Rozważmy cienne pudełko Gaussa:



## 2.3.4 Warunki brzegowe w elektrostatyce

Rozważmy cienne pudełko Gaussa:



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad \text{prawo Gaussa}$$

Z prawa Gaussa, dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mamy

$$(E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp})A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

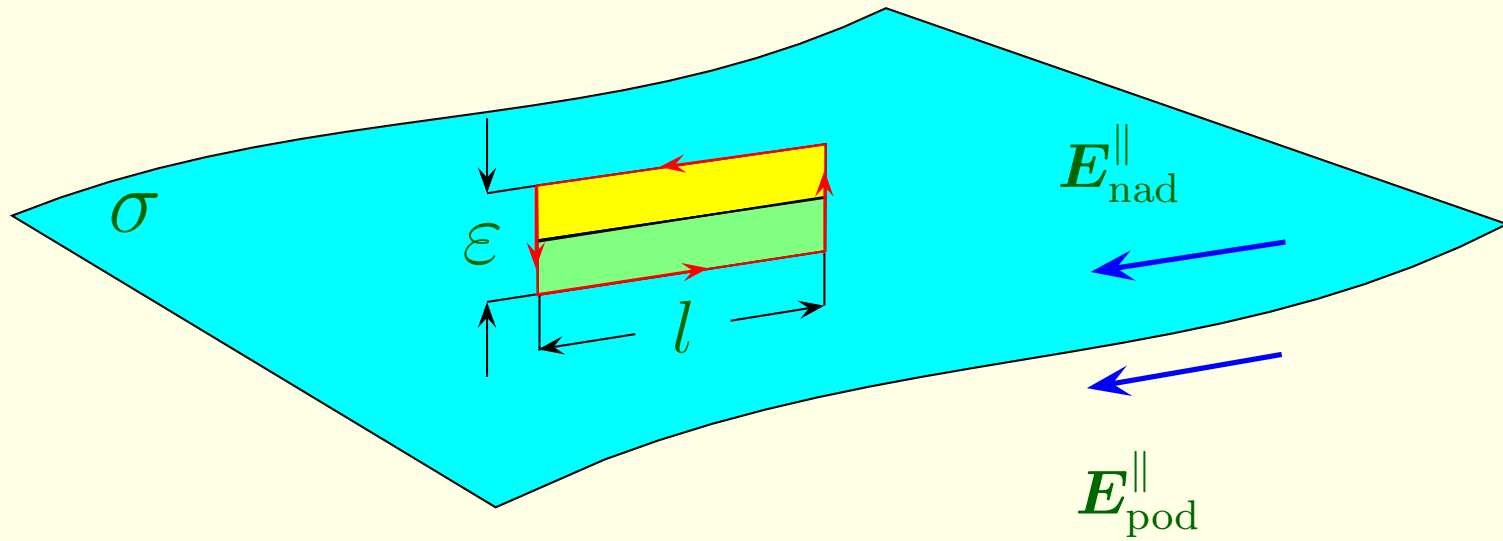
Z prawa Gaussa, dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mamy

$$(E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp})A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

$$E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$$

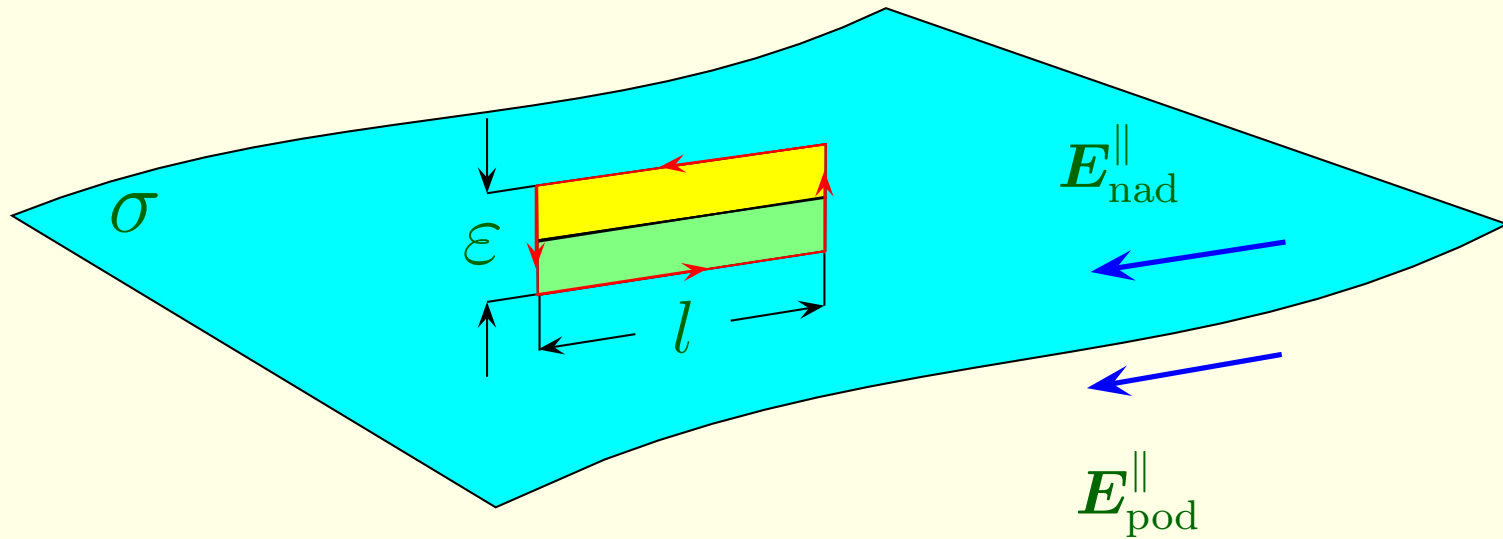
Składowa normalna wektora natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  ma na powierzchni granicznej nieciągłość o wartości  $\sigma/\epsilon_0$

Rozważmy ramkę:



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \text{ albo } \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{pole statyczne}$$

Rozważmy ramkę:

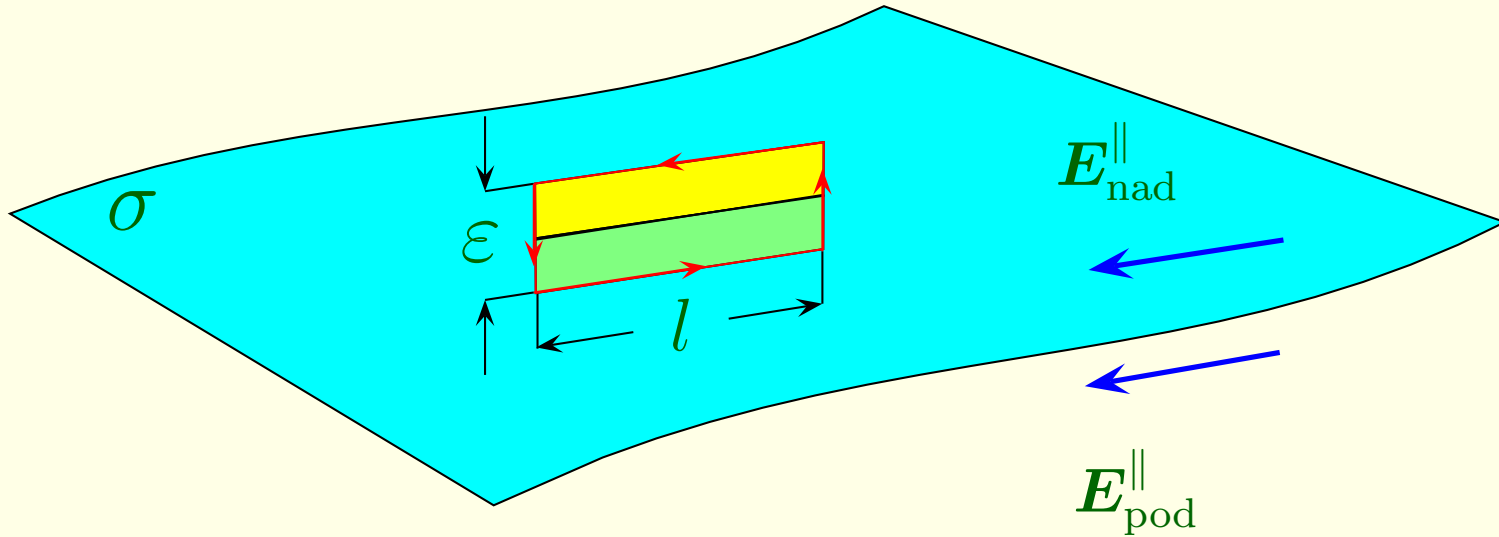


$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , albo  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  pole statyczne

$$(E_{\text{nad}}^{\parallel} - E_{\text{pod}}^{\parallel})l = 0 \quad \text{przy } \varepsilon \rightarrow 0$$



Rozważmy ramkę:



$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , albo  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  pole statyczne

$(E_{\text{nad}}^{\parallel} - E_{\text{pod}}^{\parallel})l = 0$  przy  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$E_{\text{nad}}^{\parallel} = E_{\text{pod}}^{\parallel}$$

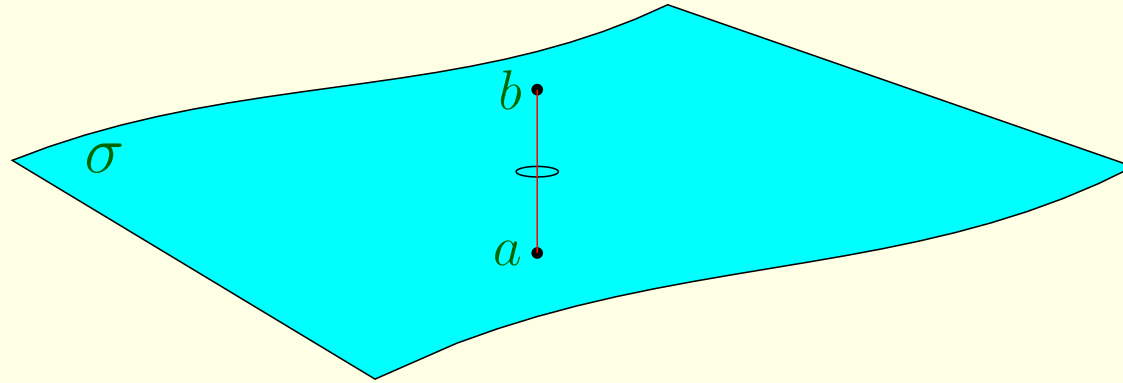
Składowa styczna pola  $\mathbf{E}$  jest zawsze ciągła.

Obydwa warunki można zapisać jednym wzorem

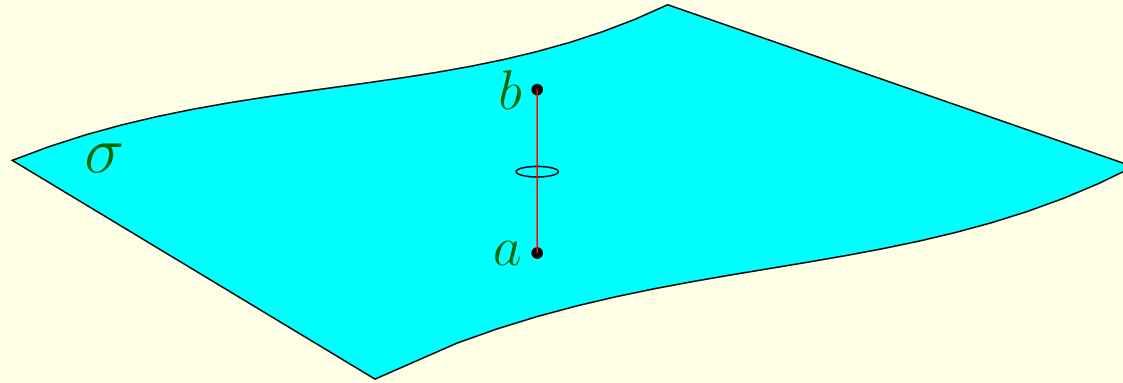
$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$\hat{\mathbf{n}}$  jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni skierowanym od „dołu” do „góry”.

Jak zachowuje się potencjał?



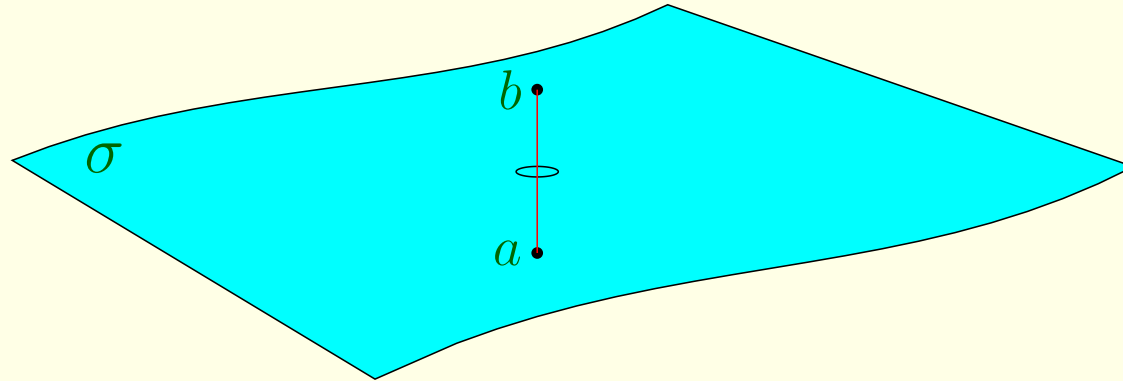
Jak zachowuje się potencjał?



$$V_{\text{nad}} - V_{\text{pod}} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{dla } |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \rightarrow 0$$

Potencjał jest ciągły na powierzchni.

Jak zachowuje się potencjał?



$$V_{\text{nad}} - V_{\text{pod}} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{dla } |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \rightarrow 0$$

Potencjał jest ciągły na powierzchni.

Ponieważ  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , to gradient potencjału jest nieciągły.

$$\nabla V_{\text{nad}} - \nabla V_{\text{pod}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\frac{\partial V_{\text{nad}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{pod}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

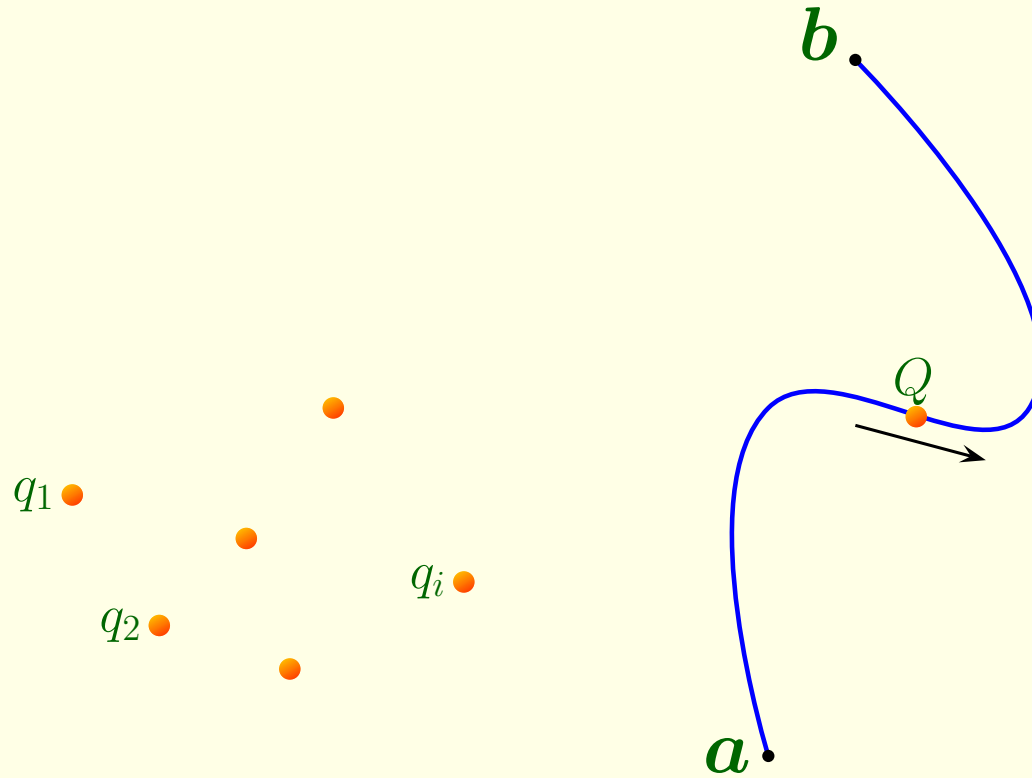
$$\frac{\partial V_{\text{nad}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{pod}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

poходna normalna

## 2.4 Praca i energia w elektrostatyce

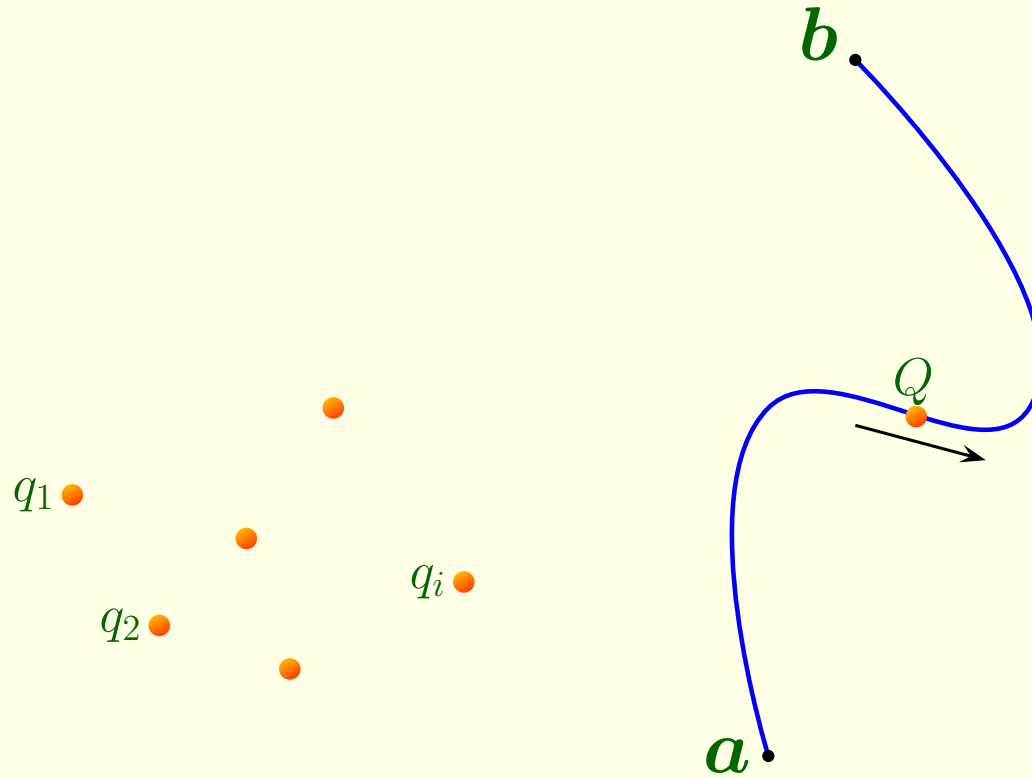
### 2.4.1 Praca wykonana przy przesunięciu ładunku





## 2.4 Praca i energia w elektrostatyce

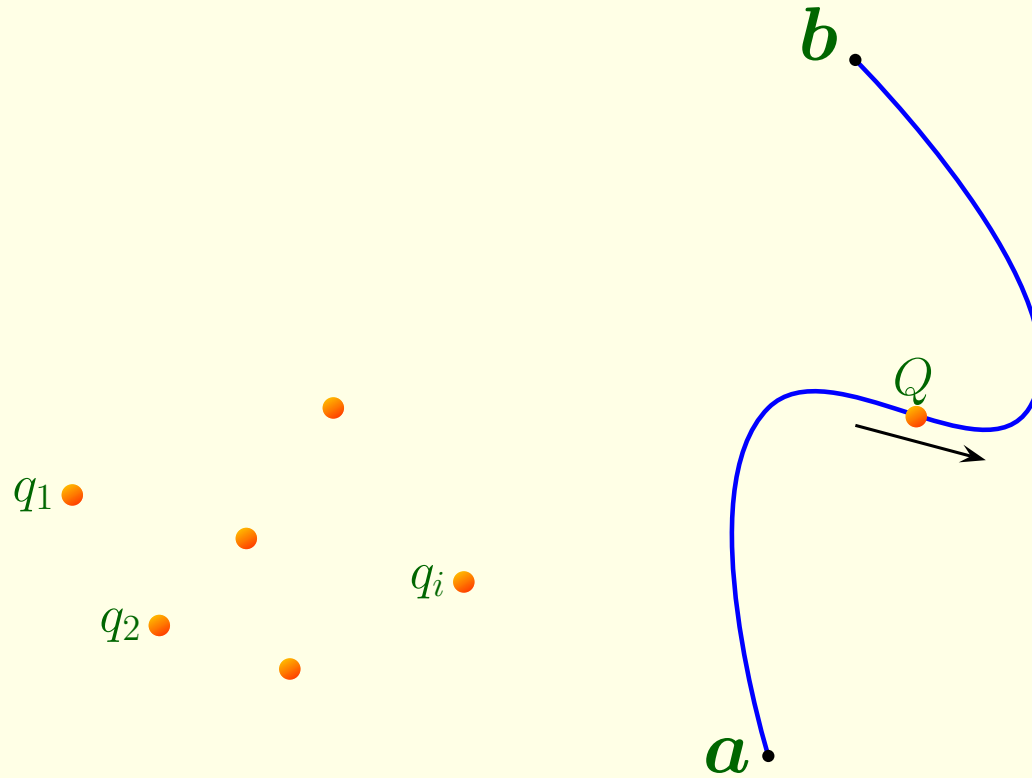
### 2.4.1 Praca wykonana przy przesunięciu ładunku



$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

## 2.4 Praca i energia w elektrostatyce

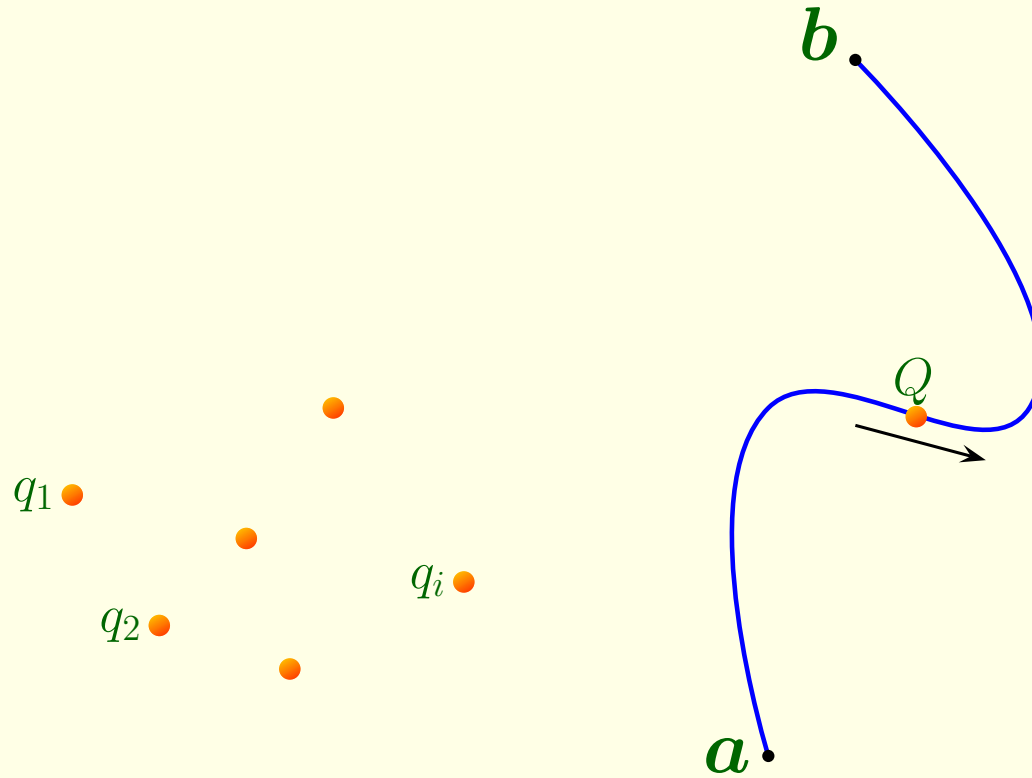
### 2.4.1 Praca wykonana przy przesunięciu ładunku



$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

## 2.4 Praca i energia w elektrostatyce

### 2.4.1 Praca wykonana przy przesunięciu ładunku



$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q [V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})]$$

Wynik nie zależy od drogi.

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \frac{W}{Q}$$

Wynik nie zależy od drogi.

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \frac{W}{Q}$$

Różnica potencjałów między punktami  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  jest równa pracy przypadającej na jednostkę ładunku, koniecznej do przesunięcia ładunku od  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$ .

Wynik nie zależy od drogi.

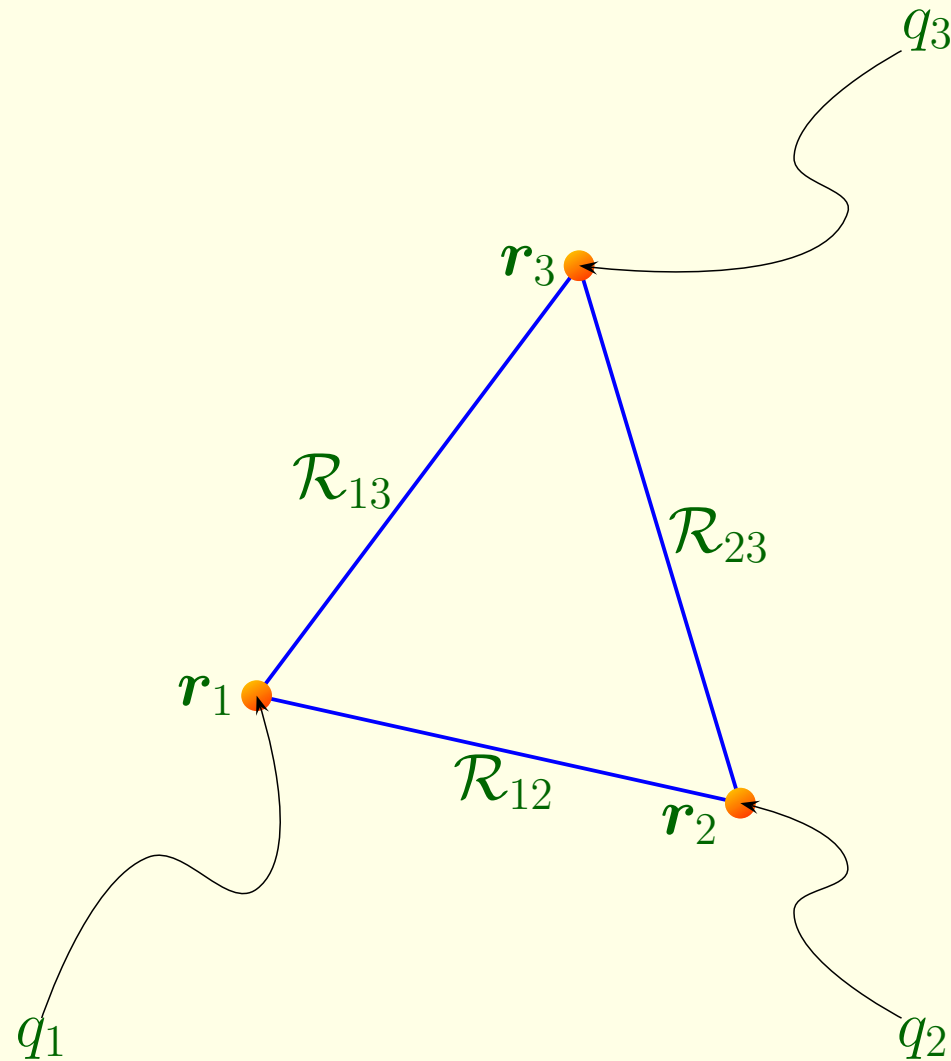
$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \frac{W}{Q}$$

Różnica potencjałów między punktami  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  jest równa pracy przypadającej na jednostkę ładunku, koniecznej do przesunięcia ładunku od  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$ .

$$W = Q [V(\mathbf{r}) - V(\infty)] = QV(\mathbf{r})$$

## 2.4.2 Energia układu ładunków punktowych

Przenosimy kolejne ładunki  $q_1, q_2, \dots$  z nieskończoności do punktów  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$



Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków



Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}} \right)$$

## Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}} \right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

## Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}} \right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

## Całkowita praca

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

## Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}} \right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left( \frac{q_1}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

## Całkowita praca

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{\mathcal{R}_{12}} + \frac{q_1 q_3}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2 q_3}{\mathcal{R}_{23}} + \frac{q_1 q_4}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2 q_4}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3 q_4}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{R_{ij}}, \quad n \text{ ładunków}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}}, \quad n \text{ ładunków}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}} \quad \begin{array}{l} \text{sumujemy podwójnie i} \\ \text{dzielimy przez dwa} \end{array}$$



$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}}, \quad n \text{ ładunków}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}} \quad \begin{array}{l} \text{sumujemy podwójnie i} \\ \text{dzielimy przez dwa} \end{array}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\mathcal{R}_{ij}} \right) \quad \text{potencjał}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}}, \quad n \text{ ładunków}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}} \quad \begin{array}{l} \text{sumujemy podwójnie i} \\ \text{dzielimy przez dwa} \end{array}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\mathcal{R}_{ij}} \right) \quad \text{potencjał}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{r}_i)$$

## 2.4.3 Energia ciągłego rozkładu ładunków

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau$$

## 2.4.3 Energia ciągłego rozkładu ładunków

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \text{z prawa Gaussa}$$

## 2.4.3 Energia ciągłego rozkładu ładunków

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V \, d\tau$$

## 2.4.3 Energia ciągłego rozkładu ładunków

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V \, d\tau$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ - \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) \, d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right] \quad \begin{array}{l} \text{całkujemy} \\ \text{przez części} \end{array}$$

## 2.4.3 Energia ciągłego rozkładu ładunków

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V \, d\tau$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ - \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) \, d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right] \quad \begin{array}{l} \text{całkujemy} \\ \text{przez części} \end{array}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \int_{\mathcal{V}} E^2 \, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} E^2 d\tau$$

Energia pola



$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} E^2 d\tau$$

Energia pola

Przykład:

Znaleźć energię jednorodnie naładowanej powierzchniowo powłoki kulistej o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$ .

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da,$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} E^2 d\tau$$

Energia pola

Przykład:

Znaleźć energię jednorodnie naładowanej powierzchniowo powłoki kulistej o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$ .

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} E^2 d\tau$$

Energia pola

Przykład:

Znaleźć energię jednorodnie naładowanej powierzchniowo powłoki kulistej o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$ .

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma da$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} E^2 d\tau$$

Energia pola

Przykład:

Znaleźć energię jednorodnie naładowanej powierzchniowo powłoki kulistej o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $q$ .

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q^2}{R}$$

---

## 2.5 Przewodniki

### 2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika  $E = 0$
- Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$
- Nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole  $E$  jest prostopadłe do powierzchni

## 2.5 Przewodniki

### 2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika  $\mathbf{E} = 0$
- Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$
- Nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole  $\mathbf{E}$  jest prostopadłe do powierzchni

## 2.5 Przewodniki

### 2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika  $E = 0$
- Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$
- nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole  $E$  jest prostopadłe do powierzchni

## 2.5 Przewodniki

### 2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika  $E = 0$
- Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$
- nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole  $E$  jest prostopadłe do powierzchni



## 2.5 Przewodniki

### 2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika  $E = 0$
- Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$
- Nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole  $E$  jest prostopadłe do powierzchni

## 2.5 Przewodniki

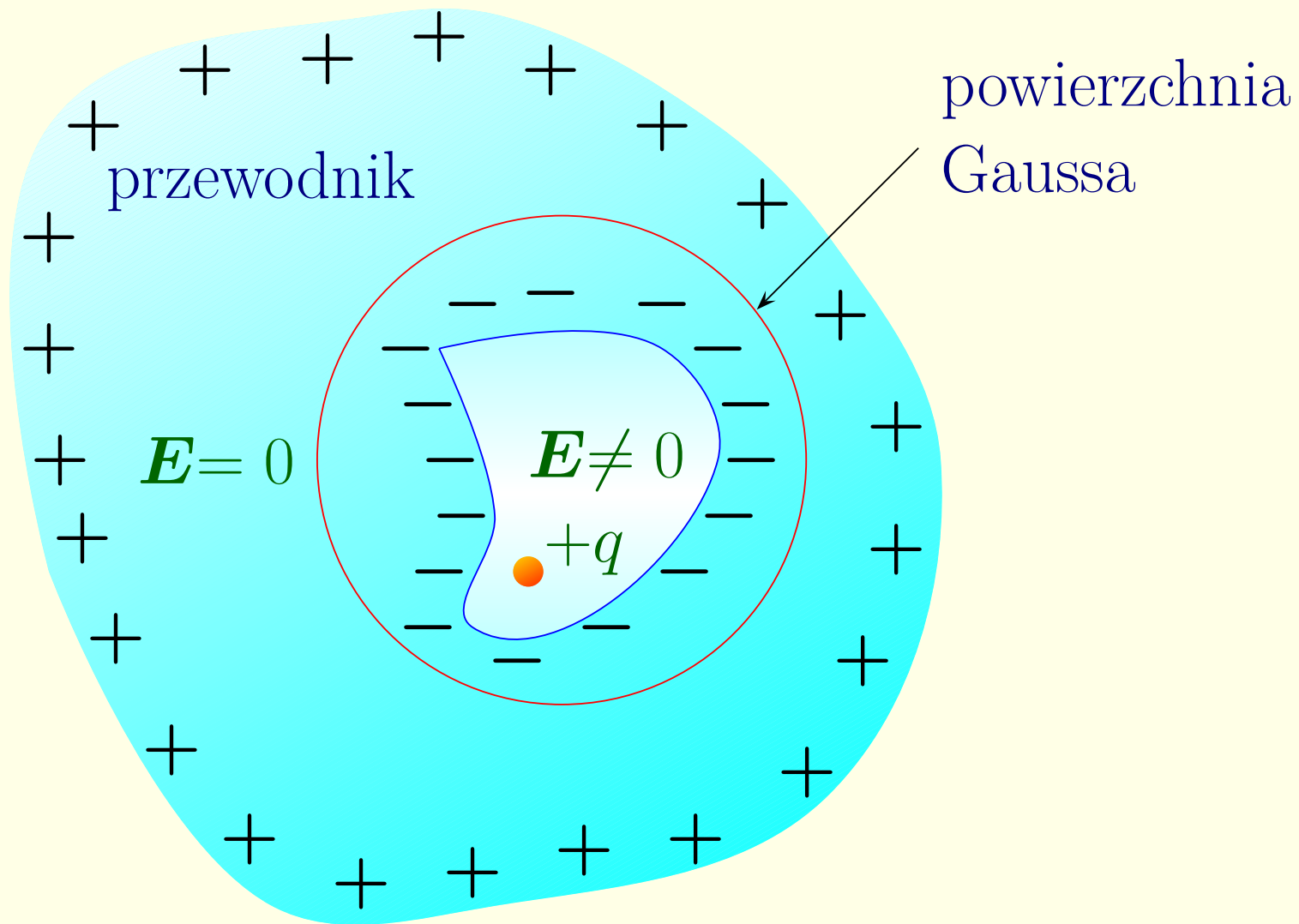
### 2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika  $E = 0$
- Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$
- Nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole  $E$  jest prostopadłe do powierzchni

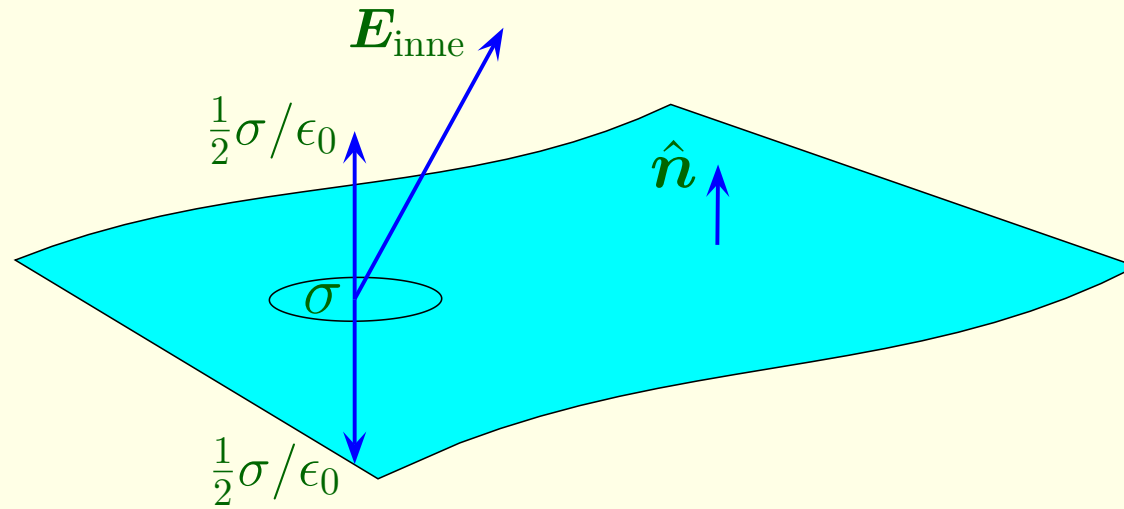
## 2.5.2 Ładunki indukowane

$+q$

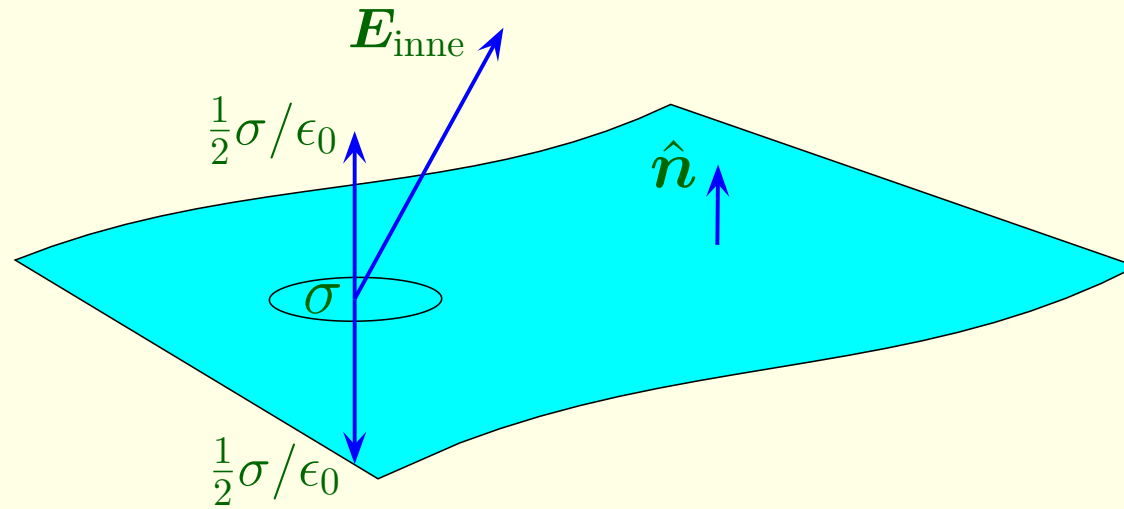




## 2.5.3 Ładunki powierzchniowe i siła działająca na przewodnik

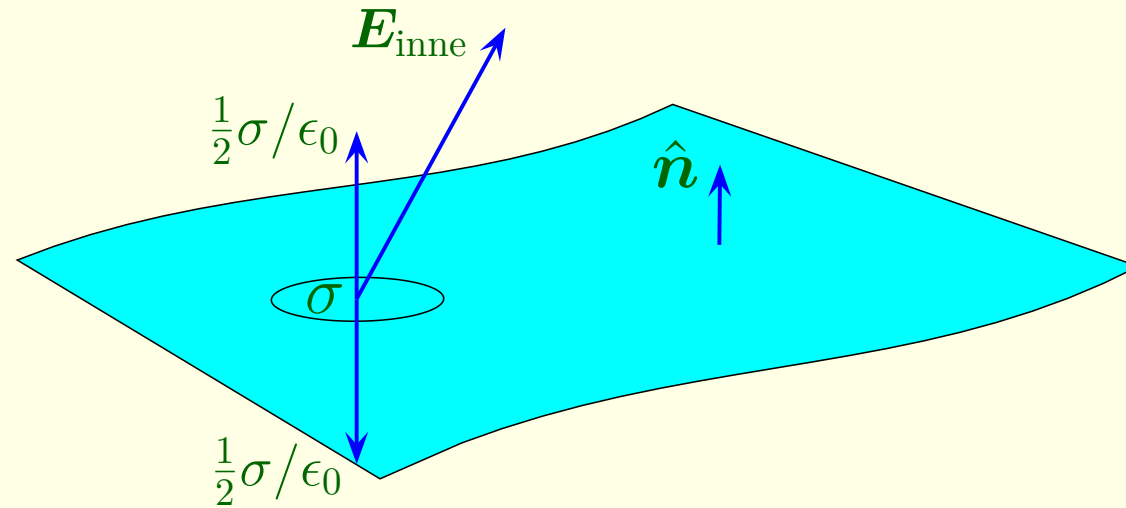


## 2.5.3 Ładunki powierzchniowe i siła działająca na przewodnik



$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

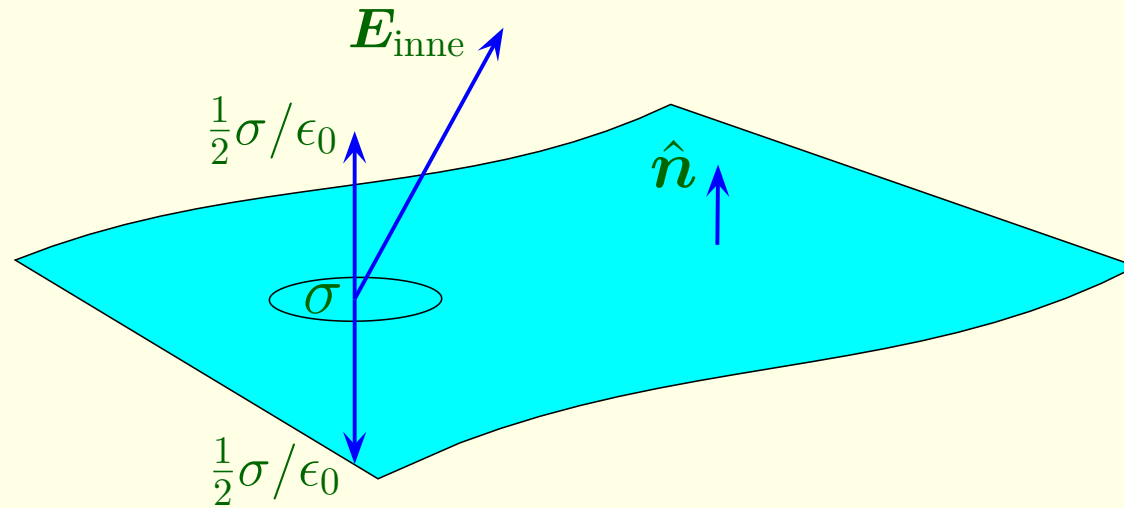
## 2.5.3 Ładunki powierzchniowe i siła działająca na przewodnik



$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad \text{tuż przy powierzchni przewodnika } (\mathbf{E}_{\text{pod}} = 0)$$

## 2.5.3 Ładunki powierzchniowe i siła działająca na przewodnik



$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad \text{tuż przy powierzchni przewodnika } (\mathbf{E}_{\text{pod}} = 0)$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$



$f = \sigma E$  siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}$  siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{E} = ?$ , jakie pole?  $\mathbf{E}_{\text{nad}}, \mathbf{E}_{\text{pod}}, \dots$

$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}$  siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{E} = ?$ , jakie pole?  $\mathbf{E}_{\text{nad}}, \mathbf{E}_{\text{pod}}, \dots$

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}})$$

$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}$  siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{E} = ?$ , jakie pole?  $\mathbf{E}_{\text{nad}}, \mathbf{E}_{\text{pod}}, \dots$

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{element}} + \mathbf{E}_{\text{inne}}$$

$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}$  siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{E} = ?$ , jakie pole?  $\mathbf{E}_{\text{nad}}, \mathbf{E}_{\text{pod}}, \dots$

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{element}} + \mathbf{E}_{\text{inne}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{nad}} = \mathbf{E}_{\text{inne}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{pod}} = \mathbf{E}_{\text{inne}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}$  siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{E} = ?$ , jakie pole?  $\mathbf{E}_{\text{nad}}, \mathbf{E}_{\text{pod}}, \dots$

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{element}} + \mathbf{E}_{\text{inne}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{nad}} = \mathbf{E}_{\text{inne}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{pod}} = \mathbf{E}_{\text{inne}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{inne}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}}) = \mathbf{E}_{\text{średnie}}$$

Poprzednia argumentacja ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{średnie}}$ ) obowiązuje także dla ładunków powierzchniowych w przewodniku

$\mathbf{E} = 0$ , wewnątrz przewodnika

$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$ , na zewnątrz przewodnika

Poprzednia argumentacja ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{średnie}}$ ) obowiązuje także dla ładunków powierzchniowych w przewodniku

$\mathbf{E} = 0$ , wewnątrz przewodnika

$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$ , na zewnątrz przewodnika

$$\mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} + 0 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$



Poprzednia argumentacja ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{średnie}}$ ) obowiązuje także dla ładunków powierzchniowych w przewodniku

$$\mathbf{E} = 0, \quad \text{wewnątrz przewodnika}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{na zewnątrz przewodnika}$$

$$\mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} + 0 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{f} = \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{siła na jednostkę powierzchni}$$

Poprzednia argumentacja ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{średnie}}$ ) obowiązuje także dla ładunków powierzchniowych w przewodniku

$$\mathbf{E} = 0, \quad \text{wewnątrz przewodnika}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{na zewnątrz przewodnika}$$

$$\mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} + 0 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{f} = \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{siła na jednostkę powierzchni}$$

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \text{ciśnienie elektrostatyczne}$$

Poprzednia argumentacja ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{średnie}}$ ) obowiązuje także dla ładunków powierzchniowych w przewodniku

$$\mathbf{E} = 0, \quad \text{wewnątrz przewodnika}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{na zewnątrz przewodnika}$$

$$\mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} + 0 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{f} = \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{siła na jednostkę powierzchni}$$

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \text{ciśnienie elektrostatyczne}$$

Przewodnik jest wciągany w pole elektryczne.