

Elektrodynamika

Część 9

Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

10 Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie	3
10.1 Wprowadzenie potencjałów	3
10.2 Rozkłady ciągłe	9

10 Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie

10.1 Wprowadzenie potencjałów

10.1.1 Potencjały skalarny i wektorowy

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{równania} \\ \text{Maxwella} \end{array}$$

Jakie są pola $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ jeśli znamy $\rho(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$?

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad \text{z prawa Faradaya}$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad \text{z (i)}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad \text{z (iv)}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad \text{tożsamość wektorowa}$$

$$\left(\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

10.1.2 Przekształcenia cechowania

Możemy narzucić dodatkowe warunki na potencjały, które nie zmieniają pól \mathbf{E} i \mathbf{B} .

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}, \quad V' = V + \beta \quad \text{zmieniamy potencjały}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda$$

$$\nabla \beta + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \left(\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{nawias nie zależy} \\ \text{od położenia} \end{array}$$

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t), \quad k(t) \text{ można włączyć do } \lambda$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \\ V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{array} \right\} \text{przekształcenia cechowania}$$

10.1.3 Cechowanie Coulomba i cechowanie Lorentza

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \quad \text{cechowanie Coulomba}$$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad \text{równanie Poissona}$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\mathcal{R}} d\tau \quad \begin{array}{l} \text{rozwiązanie gdy } V = 0 \text{ w} \\ \text{nieskończoności} \end{array}$$

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)}$$

Samo $V(\mathbf{r}, t)$ nie wystarcza do wyznaczenia pola $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$!

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}} \quad \text{cechowanie Lorentza}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Delta V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\boxed{\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square} \quad \text{d'Alembertjan}$$

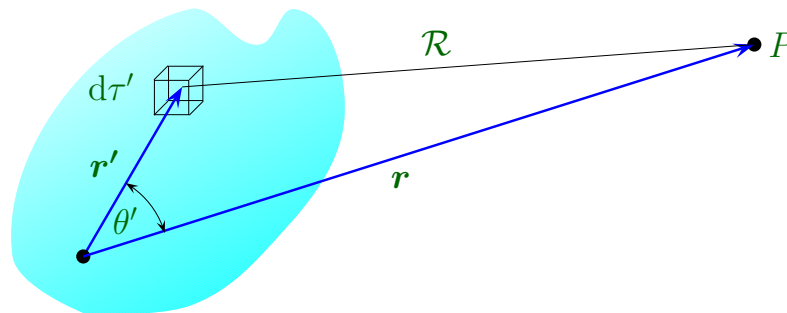
$$(i) \quad \square V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$(ii) \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

niejednorodne
równania falowe

10.2 Rozkłady ciągłe

10.2.1 Potencjały opóźnione



$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{dla pól statycznych}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau'$$

„Wieści” elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła!

$$t_r \equiv t - \frac{\mathcal{R}}{c} \quad \text{czas opóźniony}$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{R}} d\tau'$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{R}} d\tau'$$

potencjały opóźnione

Czy wzory te są poprawne?

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\nabla\rho) \frac{1}{\mathcal{R}} + \rho \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) \right] d\tau'$$

$$\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_{\mathbf{r}} = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla \mathcal{R}$$

$$\nabla \mathcal{R} = \hat{\mathbf{R}}, \quad \nabla \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho} \hat{\mathbf{R}}}{c \mathcal{R}} - \rho \frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} \right] d\tau'$$

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}} \cdot (\nabla \dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}} \right) \right] - \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \right] \right\} d\tau'$$

$$\nabla \dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \nabla \mathcal{R} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}^2}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathcal{R})$$

$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{\mathcal{R}} - 4\pi \rho \delta^3(\mathcal{R}) \right] d\tau' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$$

Potencjał opóźniony spełnia niejednorodne równanie falowe.