

Elektrodynamika

Część 5

Pola magnetyczne w materii

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

6	Pola magnetyczne w materii	3
6.1	Magnetyzacja	3
6.2	Pole namagnesowanego ciała	14
6.3	Natężenie pola magnetycznego H	22
6.4	Ośrodki liniowe i nieliniowe	26

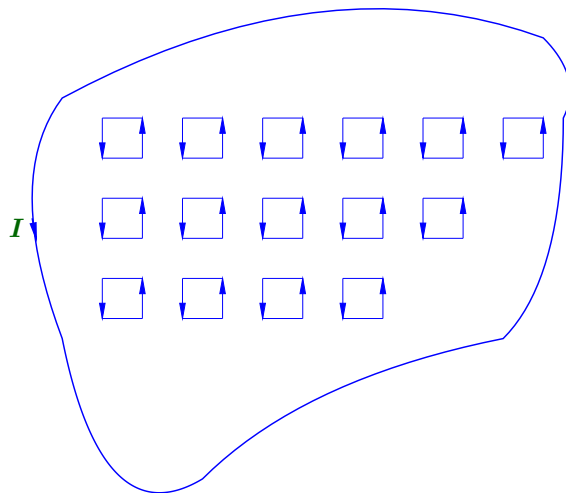
6 Pola magnetyczne w materii

6.1 Magnetyzacja

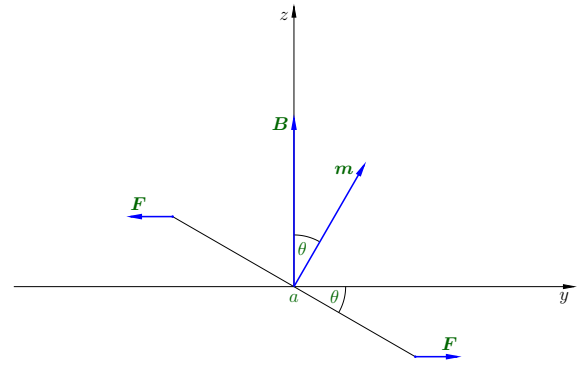
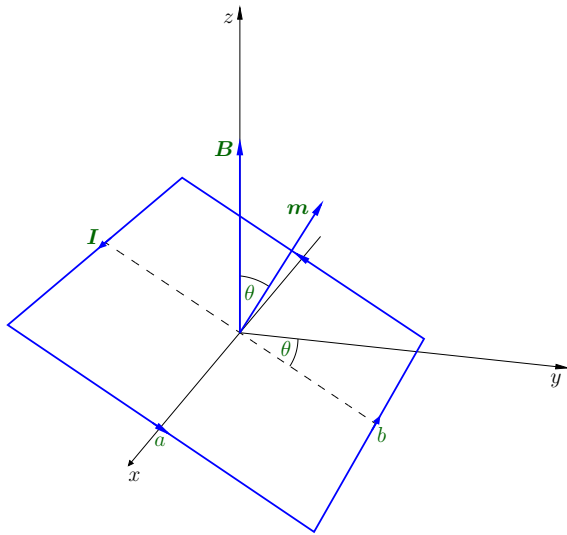
6.1.1 Diamagnetyki, paramagnetyki, ferromagnetyki

- Paramagnetyki — materiały, dla których namagnesowanie M ma ten sam kierunek i zwrot co wektor indukcji B
- Diamagnetyki — materiały, dla których namagnesowanie M ma ten sam kierunek, ale zwrot przeciwny do wektora B
- Ferromagnetyki — materiały, które zachowują namagnesowanie M nawet wtedy, gdy zniknie zewnętrzne pole

6.1.2 Siły i momenty sił działających na dipole magnetyczne



Każdą pętlę z prądem można złożyć z infinitezymalnych prostokątów. Prądy od „wewnętrznych” boków znoszą się wzajemnie.



$\mathbf{N} = aF \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$, moment siły

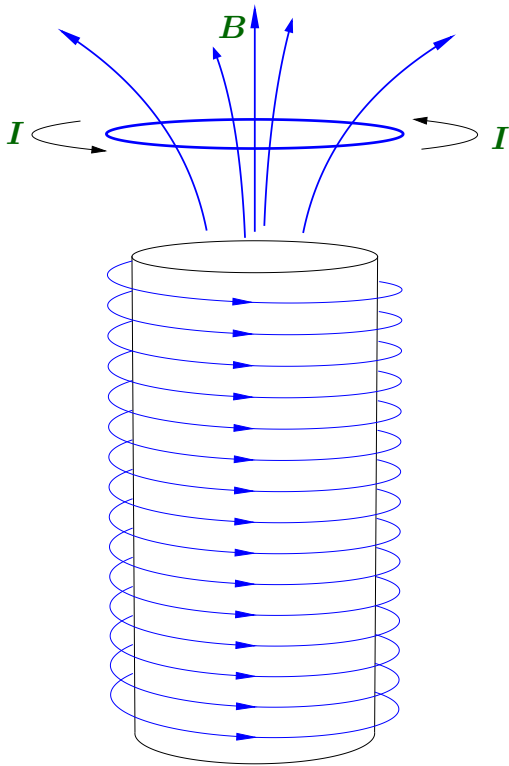
$F = IbB$, wartość siły

$\mathbf{N} = Iab \sin \theta \hat{\mathbf{x}} = mB \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$

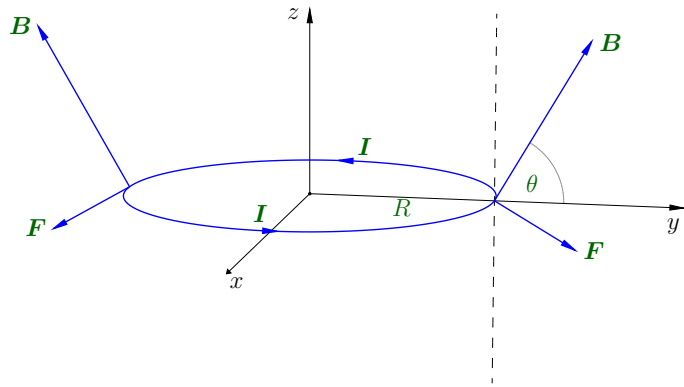
$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = I \oint (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) = I \left(\oint \mathbf{dl} \right) \times \mathbf{B} = 0$$

W polu jednorodnym siła wypadkowa działająca na pętlę z prądem znika



pole niejednorodne



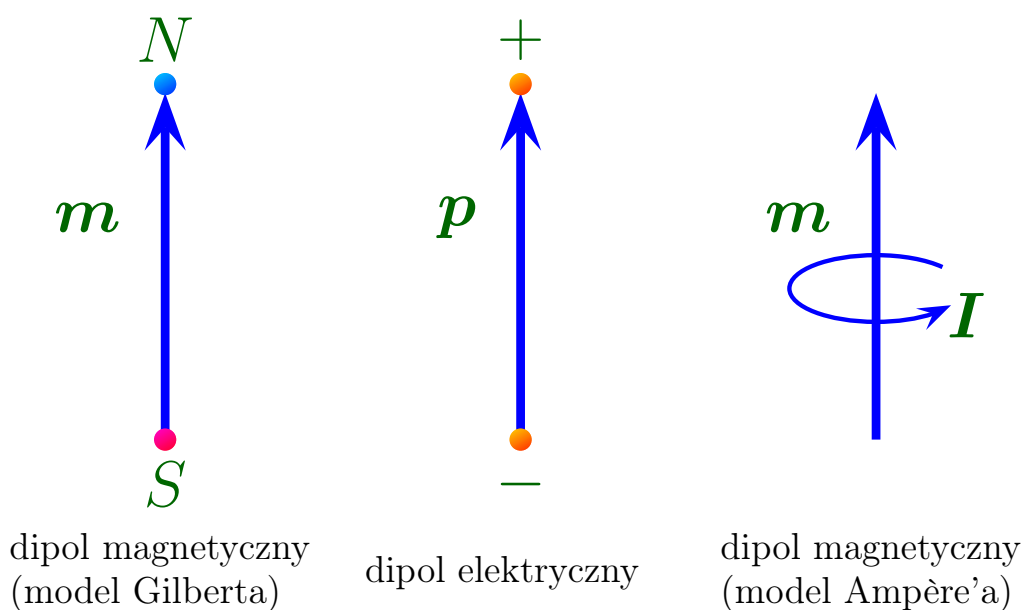
pole ma składową radialną
siła ma składową pionową

$$F = 2\pi IRB \cos \theta$$

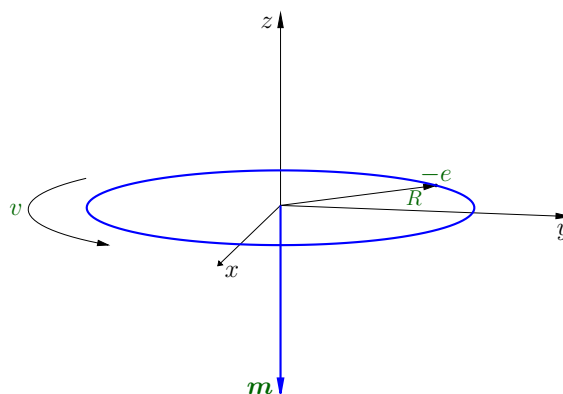
$$F = \nabla(m \cdot B)$$

Siła dla infitezymalnej pętli o momencie dipolowym m umieszczonej w polu magnetycznym o indukcji B .

Modele momentu dipolowego



6.1.3 Wpływ pola magnetycznego na orbity atomowe



$$T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R} \quad \begin{array}{l} \text{ruch elektronu można} \\ \text{potraktować jako prąd stały} \end{array}$$

$$\mathbf{m} = -I\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{2}evR \hat{\mathbf{z}} \quad \text{orbitalny moment dipolowy}$$

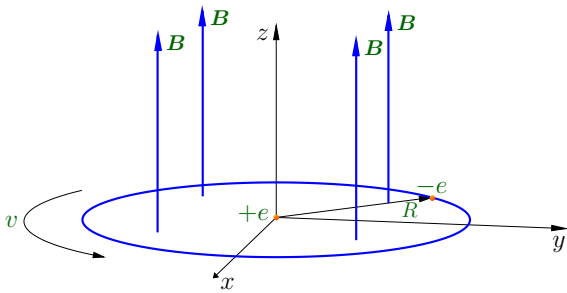
$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{moment siły, mały efekt paramagnetyczny}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = m_e \frac{v^2}{R}$$

w nieobecności pola magnetycznego siła
dośrodkowa pochodzi wyłącznie od ładunków
elektrycznych

$$-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

dotychczasowa siła w polu magnetycznym;
elektron **przyspiesza i zwalnia**



zakładamy, że pole \mathbf{B} jest
prostopadłe do płaszczyzny orbity

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + e\bar{v}B = m_e \frac{\bar{v}^2}{R}$$

nowa wartość prędkości — \bar{v}

$$e\bar{v}B = \frac{m_e}{R}(\bar{v}^2 - v^2) = \frac{m_e}{R}(\bar{v} + v)(\bar{v} - v)$$

$$\delta v = \frac{eRB}{2m_e} \quad \text{elektron przyspiesza}$$

$$\delta \mathbf{m} = -\frac{1}{2}e(\delta v)R \hat{\mathbf{z}} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \mathbf{B} \quad \text{zmiana momentu dipolowego}$$

Zmiana momentu magnetycznego \mathbf{m} ma przeciwny zwrot niż
sama indukcja \mathbf{B} — **diamagnetyzm**

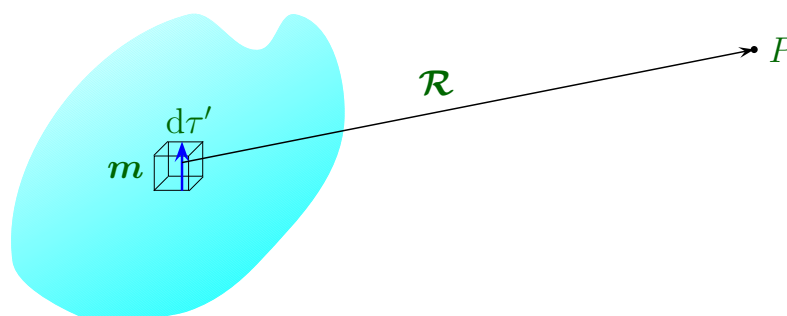
6.1.4 Magnetyzacja

$\mathbf{M} \equiv$ magnetyczny moment dipolowy na jednostkę objętości

\mathbf{M} — magnetyzacja, namagnetyzowanie, polaryzacja magnetyczna

6.2 Pole namagnesowanego ciała

6.2.1 Prądy związane



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad \text{potencjał wektorowy dipola } \mathbf{m}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} d\tau'$$

$$\nabla' \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{\mathcal{R}} \right) \right] d\tau'$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \boxed{\mathbf{A} \times (\nabla f)} \quad \text{pochodne iloczynów}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{\mathcal{R}} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d\tau' - \int \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} \right] d\tau' \right\}$$

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \times d\mathbf{a} \quad \text{twierdzenie}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{\mathcal{R}} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{\mathcal{R}} [\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{a}']$$

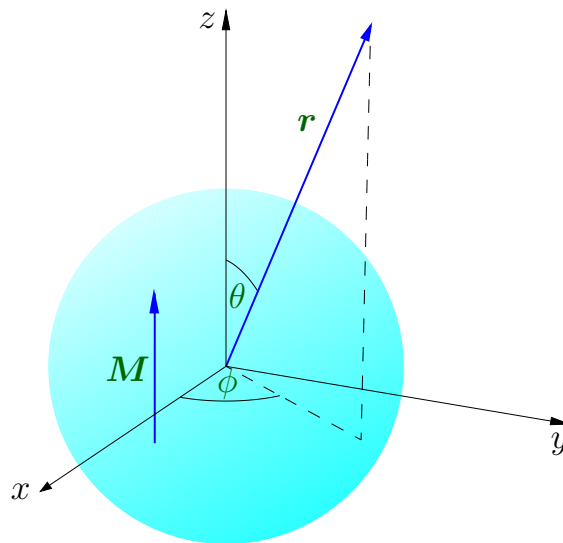
$$\boxed{\mathbf{J}_{\text{zw}} = \nabla \times \mathbf{M}}$$

$$\boxed{\mathbf{K}_{\text{zw}} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}$$

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_{\text{zw}}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{K}_{\text{zw}}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} da'}$$

Przykład:

Znaleźć pole magnetyczne jednorodnie namagnesowanej kuli.



$$\mathbf{J}_{\text{zw}} = \nabla \times \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{K}_{\text{zw}} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{dla obracającej się sfery, patrz wcześniejszy przykład}$$

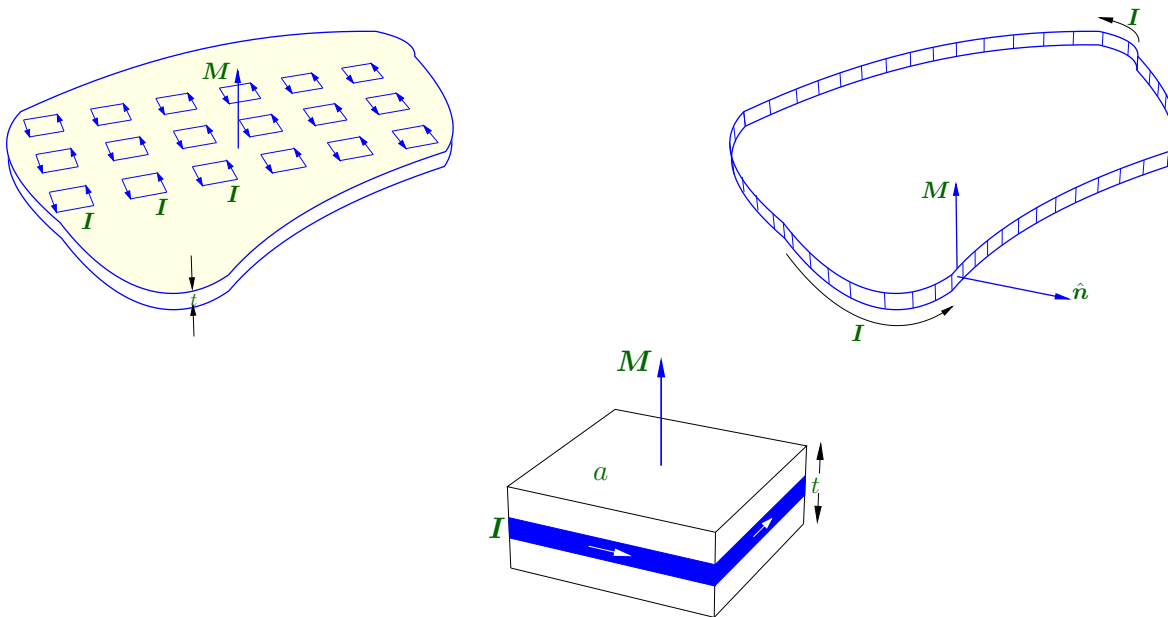
Pole jednorodnie namagnesowanej kuli jest takie samo, jak pole obracającej się jednorodnie naładowanej sfery, po podstawieniu $\sigma R \omega \rightarrow \mathbf{M}$.

$$\mathbf{B} = \left[\frac{2}{3} \right] \mu_0 \mathbf{M} \quad \text{wewnątrz sfery, pole jednorodne}$$

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M} \quad \text{na zewnątrz sfery, pole dipola } \mathbf{m}$$

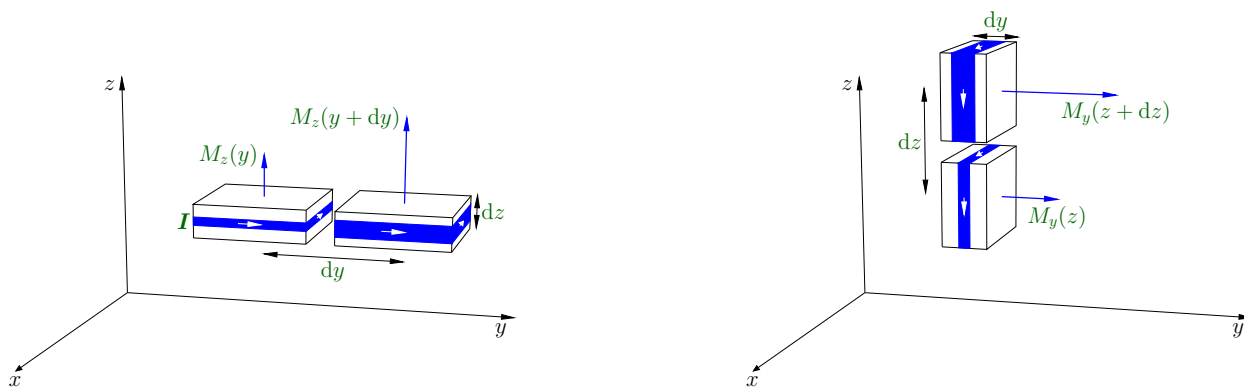
Podobieństwo do pola elektrycznego spolaryzowanej kuli, ale tu mamy $\frac{2}{3}$ zamiast $-\frac{1}{3}$.

6.2.2 Fizyczna interpretacja prądów związanych



$$m = Mat = Ia \Rightarrow I = Mt \Rightarrow K_{zw} = I/t = M$$

$$\mathbf{K}_{zw} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$



magnetyzacja niejednorodna

$$I_x = [M_z(y + dy) - M_z(y)] dz = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

$$(J_{zw})_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} \quad \text{podobnie} \quad (J_{zw})_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$(J_{zw})_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{ogólnie}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{zw} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = 0 \quad \text{równanie ciągłości}$$

6.2.3 Pole magnetyczne w materii

Mówiąc o polu magnetycznym w materii mamy na myśli **pole makroskopowe** (uśrednione po obszarze wytarczająco dużym by zawierał bardzo wiele atomów)

6.3 Natężenie pola magnetycznego \mathbf{H}

6.3.1 Prawo Ampère'a w materiałach magnetycznych

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_{sw}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} = \mathbf{J}_{sw} + (\nabla \times \mathbf{M}))$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{sw}$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sw} \quad \text{prawo Ampère'a}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{sw}c} \quad \text{prawo Ampère'a w postaci całkowej}$$

$I_{\text{sw}c}$ — całkowite natężenie prądu **swobodnego** płynącego przez kontur Ampère'a

6.3.2 Myląca analogia

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0 \quad \text{dywergencja różna od zera}$$

Natężenie pola \mathbf{H} nie musi być zerem, kiedy $\mathbf{J}_{\text{sw}} = 0$

6.3.3 Warunki brzegowe

W języku natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} i gęstości prądów swobodnych:

$$H_{\text{nad}}^{\perp} - H_{\text{pod}}^{\perp} = -(M_{\text{nad}}^{\perp} - M_{\text{pod}}^{\perp})$$

$$\mathbf{H}_{\text{nad}}^{\parallel} - \mathbf{H}_{\text{pod}}^{\parallel} = \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$B_{\text{nad}}^{\perp} - B_{\text{pod}}^{\perp} = 0$$

$$\mathbf{B}_{\text{nad}}^{\parallel} - \mathbf{B}_{\text{pod}}^{\parallel} = \mu_0(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}})$$

6.4 Ośrodki liniowe i nieliniowe

6.4.1 Podatność i przenikalność magnetyczna

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \mathbf{B} \quad (\text{niepoprawnie!})$$

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}} \quad \text{ośrodki liniowe}$$

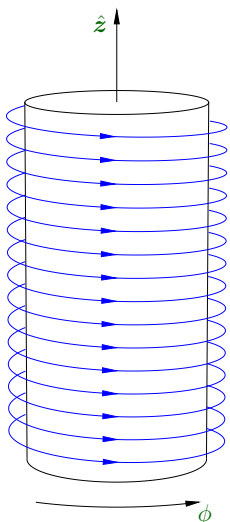
χ_m — **podatność magnetyczna**, dodatnia dla paramagnetyków, ujemna dla diamagnetyków; typowe wartości są rzędu 10^{-5}

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m) \quad \text{przenikalność magnetyczna}$$

Przykład:

Nieskończenie długi solenoid (o n zwojach na jednostkę długości, przez który płynie prąd o natężeniu I) wypełniony jest substancją liniową o podatności χ_m . Znaleźć indukcję pola we wnętrzu solenoidu.

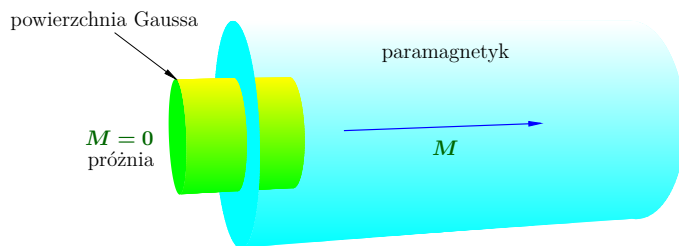


Nie możemy wprost obliczyć \mathbf{B} , bo nie znamy prądów związanych, ale ze względu na symetrię możemy obliczyć \mathbf{H} ze znajomości prądów swobodnych

$$\mathbf{H} = nI \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)nI \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{K}_{zw} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \chi_m(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = \chi_m nI \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



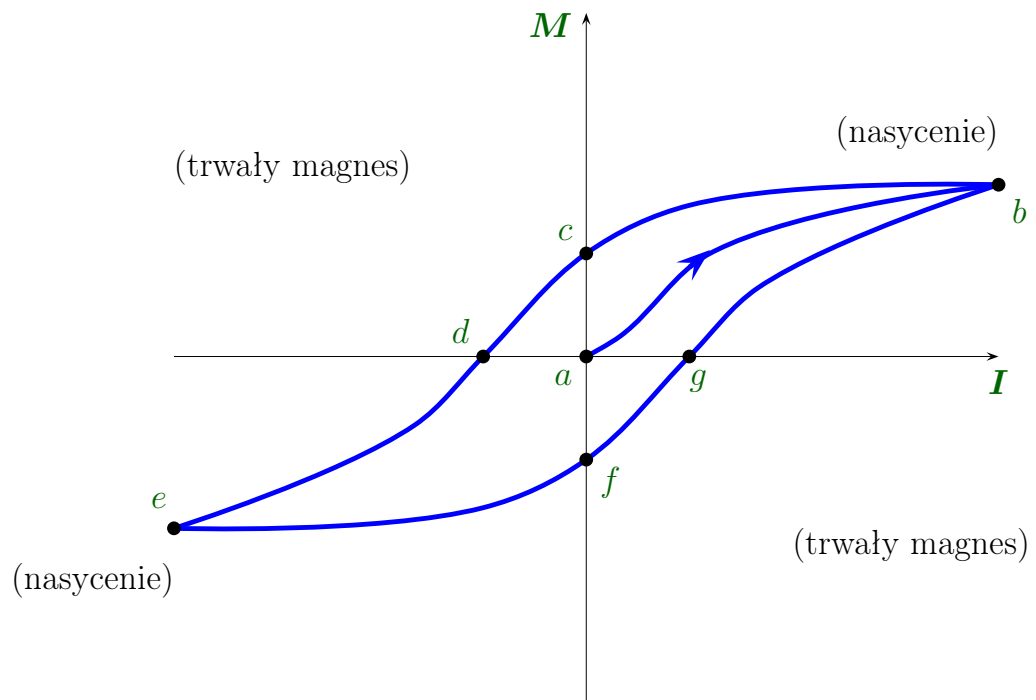
$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{a} \neq 0 \quad \text{dla powierzchni Gaussa}$$

$\nabla \cdot \mathbf{M}$ nie może zniknąć wszędzie wewnątrz powierzchni Gaussa

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{J}_{sw}$$

Jeśli prąd swobodny nie płynie w objętości próbki, prąd związany płynie jedynie na powierzchni.

6.4.2 Ferromagnetyzm



Pętla histerezy

