Elektrodynamika

Część 3

Pola elektryczne w materii

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

http://zon8.physd.amu.edu.pl/\~tanas

Spis treści

4 Pola elektryczne w materii

4.1 Polaryzacja elektryczna

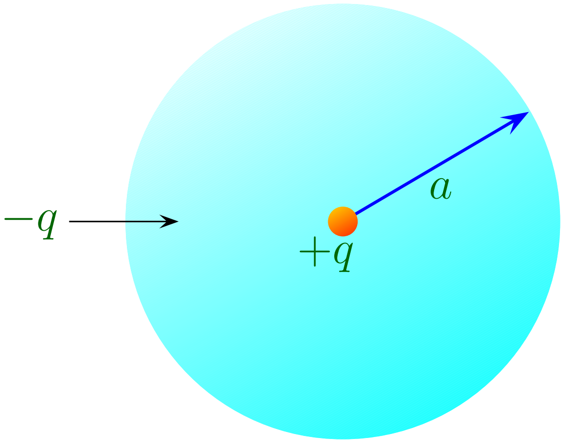
4.1.2 Indukowany moment dipolowy

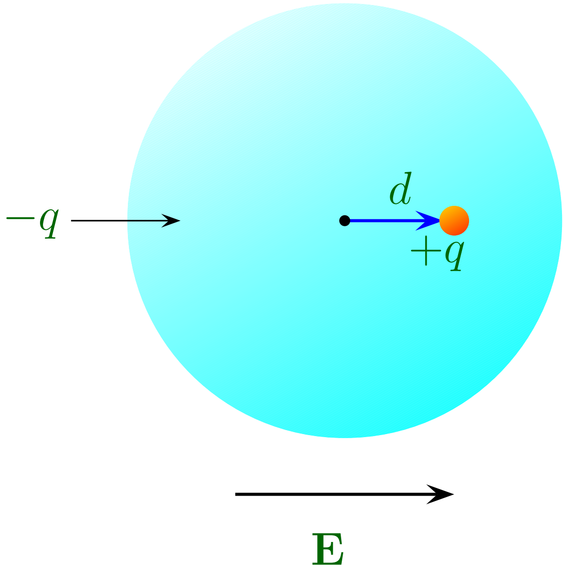
Co się dzieje z atomem jeśli umieścimy go w polu elektrycznym $\boldsymbol{E}$?

$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}$, $\quad \alpha$ — polaryzowalność atomowa

Przykład:

Przyjmijmy, że atom to punktowe jądro ($+q$) otoczone chmurą ładunku w kształcie jednorodnie naładowanej kuli o promieniu a i całkowitym ładunku $-q$. Obliczyć polaryzowalność atomową dla takiego modelu.

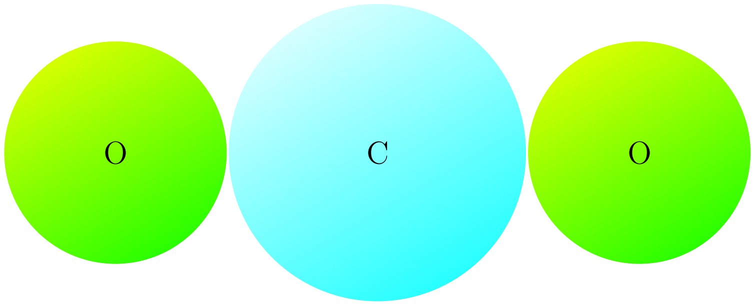




$$E = E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boxed{qd}}{a^3},$$

pole przesuniętych ładunków równoważy pole zewnętrzne

$$p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3)E \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v$$



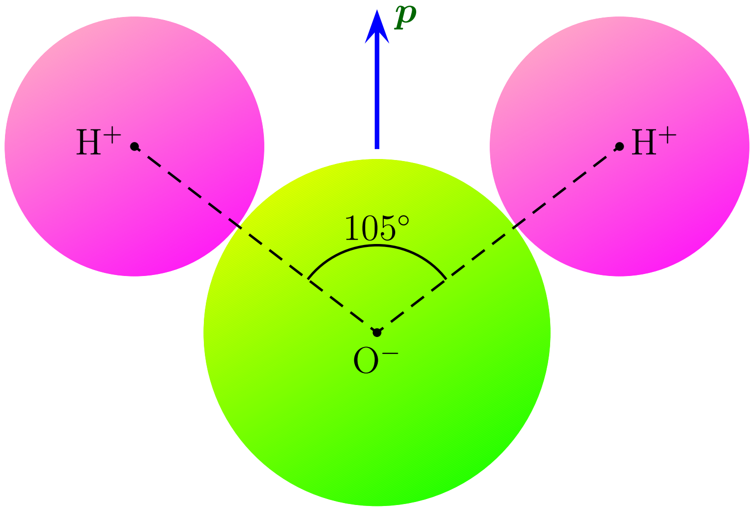
$$\boldsymbol{p} = \alpha_\perp \boldsymbol{E}_\perp + \alpha_\parallel \boldsymbol{E}_\parallel, \quad \text{cząsteczka anizotropowa}$$

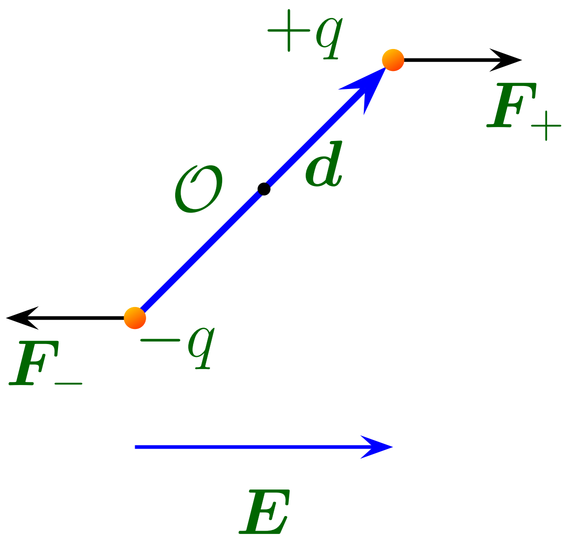
$$\begin{cases} \alpha_\perp = 2 \cdot 10^{-40} \left[\frac{\mathrm{C^2 m}}{\mathrm{N}}\right] \\ \alpha_\parallel = 4.5 \cdot 10^{-40} \left[\frac{\mathrm{C^2 m}}{\mathrm{N}}\right] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned}\right\}, \quad \alpha_{ij}$$

współrzędne **tensora polaryzowalności**

4.1.3 Zmiana orientacji momentów dipolowych cząsteczek polarnych





cząsteczka polarna

$$\boldsymbol{F}_+ = q\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{F}_- \quad \text{siły się równoważą}$$

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{F}_+) + (\boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{F}_-)$$

$$= [(\boldsymbol{d}/2) \times (q\boldsymbol{E})] + [(-\boldsymbol{d}/2) \times (-q\boldsymbol{E})]$$

$$= q\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{E} \quad \textbf{moment siły}$$

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = q(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) = q(\delta \boldsymbol{E})$$ pole niejednorodne

$$\delta \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{d} \cdot \nabla) \boldsymbol{E}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla) \boldsymbol{E}}$$ siła działająca na dipol w polu niejednorodnym

$$\boxed{U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}}$$ energia dipola w polu

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 - 3(\boldsymbol{p}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{p}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})\right]$$ energia oddziaływania dwóch dipoli

4.1.4 Polaryzacja elektryczna

Co się dzieje z dielektrykiem umieszczonym w polu?

Materiał zostaje **spolaryzowany**.

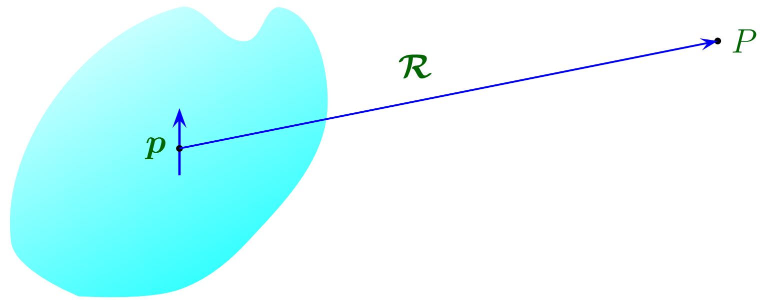
$\boldsymbol{P}$ $\equiv$ *moment dipolowy na jednostkę objętości*

polaryzacja elektryczna

4.2 Pole ciała spolaryzowanego

4.2.1 Ładunki związane

Jakie pole wytwarza spolaryzowane ciało?



$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}\cdot\boldsymbol{p}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{dla pojedynczego dipola}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\mathcal{R}^2}\,\mathrm{d}\tau' \quad \text{dla objętości } \mathcal{V}$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) = \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}\tau',$$

korzystamy z

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \boxed{\boldsymbol{A} \cdot (\nabla f)}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\boldsymbol{P}}{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \boldsymbol{P})\, \mathrm{d}\tau'\right]$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\mathcal{R}} \boxed{\boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}}\, \mathrm{d}a' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathcal{R}} \boxed{(\nabla' \cdot \boldsymbol{P})}\, \mathrm{d}\tau'$$

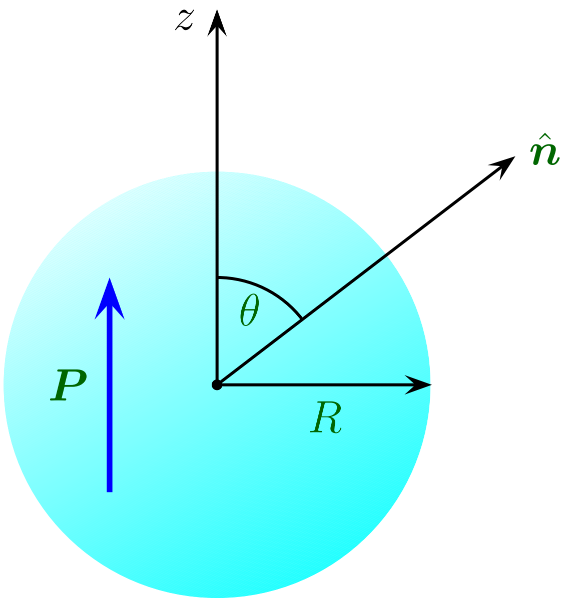
$\boxed{\sigma_{\mathrm{zw}} \equiv \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}}$ gęstość powierzchniowa ładunków związanych

$\boxed{\rho_{\mathrm{zw}} \equiv -\nabla \cdot \boldsymbol{P}}$ gęstość objętościowa ładunków związanych

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_{\mathrm{zw}}}{\mathcal{R}}\, \mathrm{d}a' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{\mathrm{zw}}}{\mathcal{R}}\, \mathrm{d}\tau'$$

Przykład:

Znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez jednorodnie spolaryzowaną kulę o promieniu R.



$$\sigma_{\mathrm{zw}} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = P \cos\theta$$

Szukamy pola wytworzonego przez rozkład powierzchniowy ładunku $P\cos\theta$. To już obliczyliśmy!

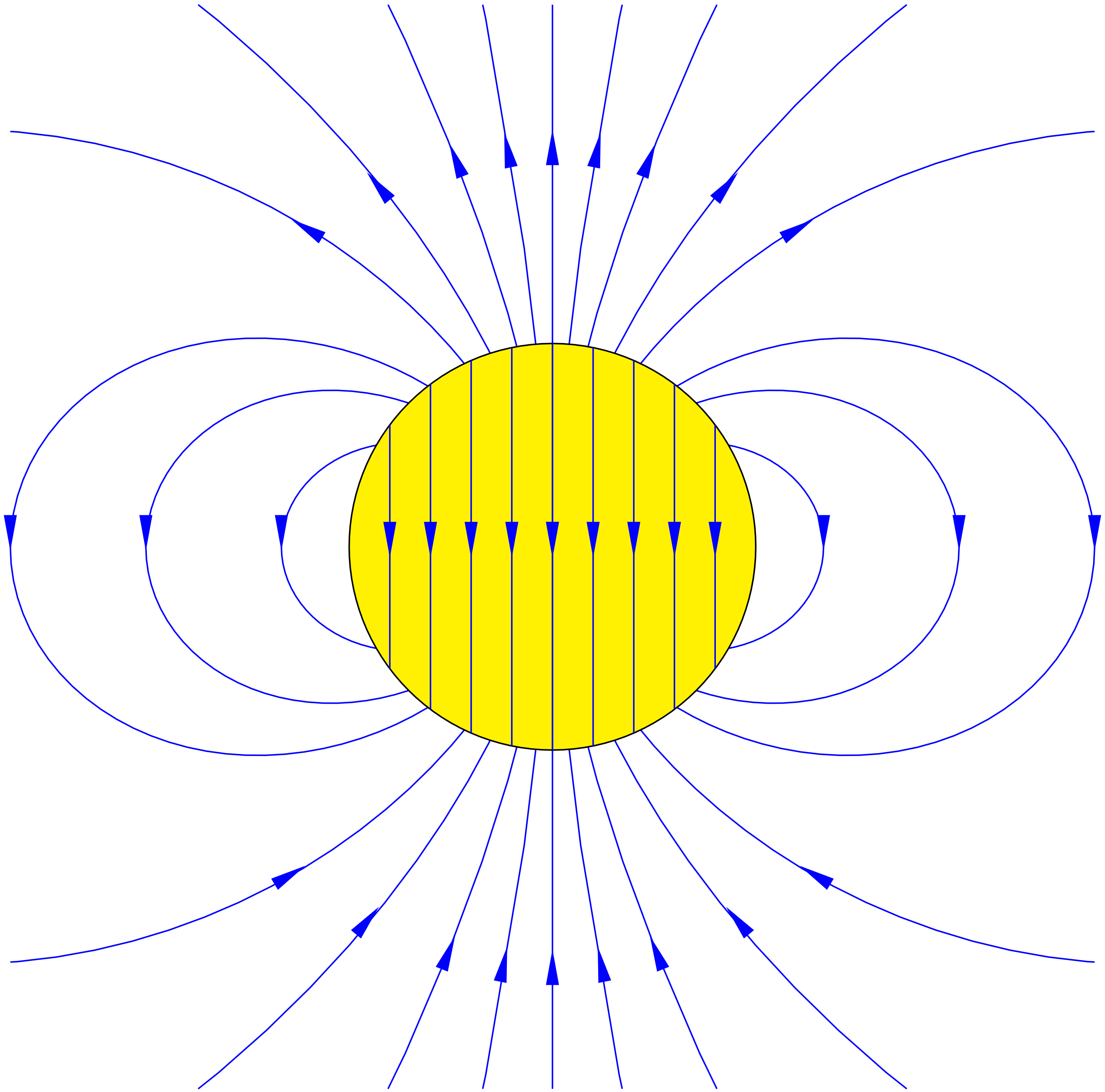
$$V(r,\theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r\cos\theta & \text{dla } r \le R \\ \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta & \text{dla } r \ge R \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P} \quad \text{dla } r < R,$$ **pole jednorodne**

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \text{ dla } r \ge R,$$ **potencjał od dipola umieszczonego w środku kuli**

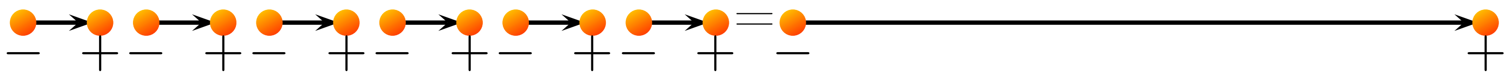
$$\boldsymbol{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \boldsymbol{P},$$ wartość dipola

$$\boldsymbol{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}(2\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$ pole dipola

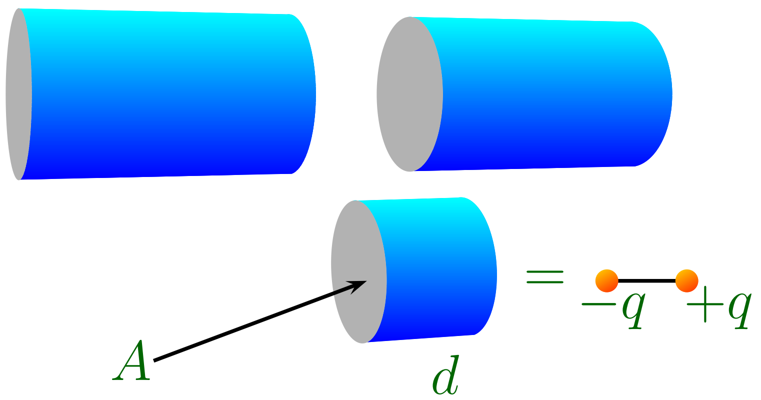


linie pola dla jednorodnie spolaryzowanej kuli

4.2.2 Fizyczna interpretacja ładunków związanych

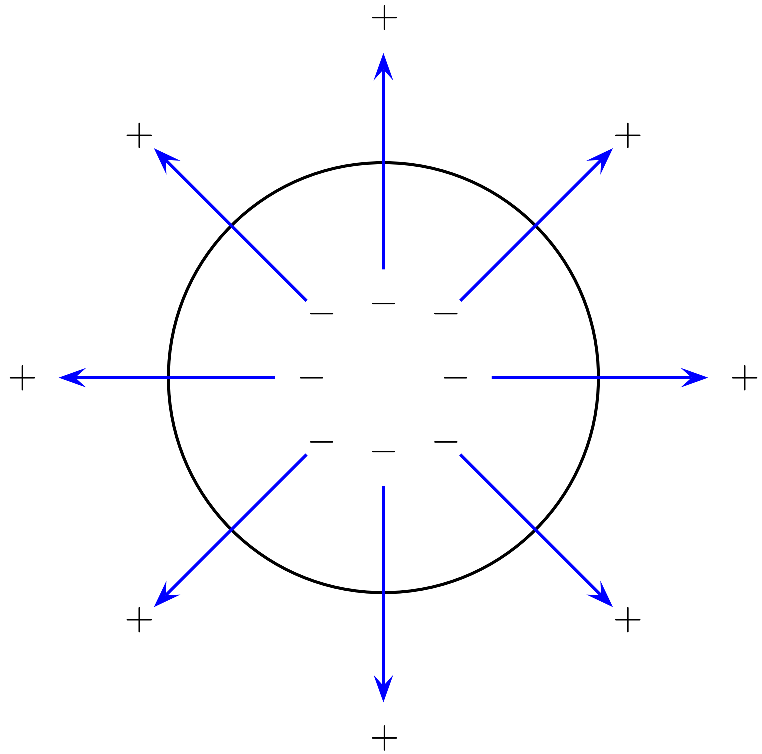


Spolaryzowany walec



$$P(Ad) = (PA)d = qd$$ moment dipolowy wycinka

$$\sigma_{\mathrm{zw}} = \frac{q}{A} = P$$ gęstość powierzchniowa ładunku

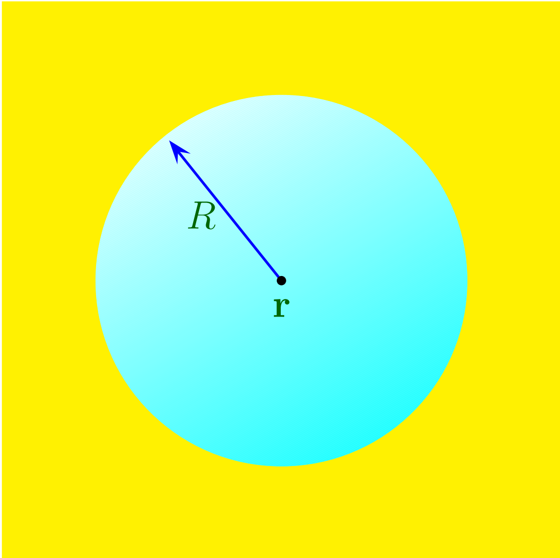


polaryzacja niejednorodna

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \rho_{\text{zw}} \, \mathrm{d}\tau = -\oint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\int\limits_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{P}) \, \mathrm{d}\tau$$

$$\rho_{\text{zw}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

4.2.3 Pole w dielektryku



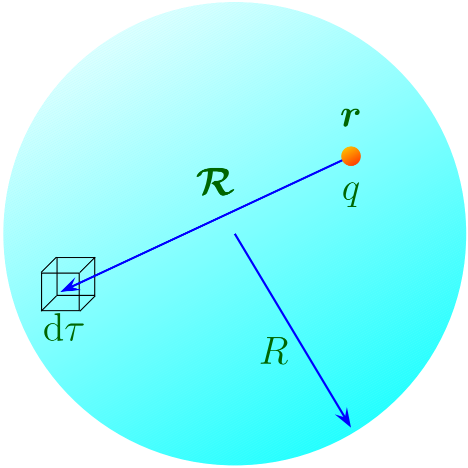
chcemy obliczyć **pole makroskopowe** w punkcie $\boldsymbol{r}$; rozważmy kulę o promieniu R wokół punktu $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{zew}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{wew}}$$

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{wew}} = ?$. jakie jest pole od ładunków wewnątrz kuli?

$$\boldsymbol{E}_{\text{śred}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{R^3}$$

uśrednione pole od ładunków znajdujących się wewnątrz kuli o promieniu R; $\boldsymbol{p}$ jest całkowitym momentem dipolowym



obliczamy średnie pole od ładunku q umieszczonego w punkcie $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{E}_{\text{śred}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathcal{R}^2}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{\mathcal{R}^2}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}\,\mathrm{d}\tau$$

pole w punkcie $\boldsymbol{r}$ od równomiernie naładowanej kuli, które łatwo policzyć

$\boldsymbol{E}_{\text{śred}} = \boldsymbol{E}_\rho$ jeśli $\rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho\boldsymbol{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\boldsymbol{r}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{R^3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{\text{wew}} = \boldsymbol{E}_{\text{śred}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{R^3}}$$

uśrednione pole od ładunków wewnątrz kuli $\square$

$$V_{\text{zew}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{na zewnątrz kuli}} \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\mathcal{R}^2}\,\mathrm{d}\tau'$$

potencjał od ładunków zewnętrznych

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{wew}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{R^3}, \quad \boldsymbol{p} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{wew}} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P}$$

Uśrednione po dowolnej kuli pole pochodzące od ładunków wewnątrz kuli jest takie samo jak pole w środku jednorodnie spolaryzowanej kuli

Potencjał pola makroskopowego:

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}} \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{\mathcal{R}^2}\,\mathrm{d}\tau'}$$

całka obejmuje całą objętość dielektryka

4.3 Pole indukcji elektrycznej

4.3.1 Prawo Gaussa w obecności dielektryka

$$\rho = \rho_{\mathrm{zw}} + \rho_{\mathrm{sw}} \quad \text{gęstość ładunków związanych i swobodnych}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho = \rho_{\mathrm{zw}} + \rho_{\mathrm{sw}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_{\mathrm{sw}} \quad \text{prawo Gaussa}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\mathrm{sw}}$$

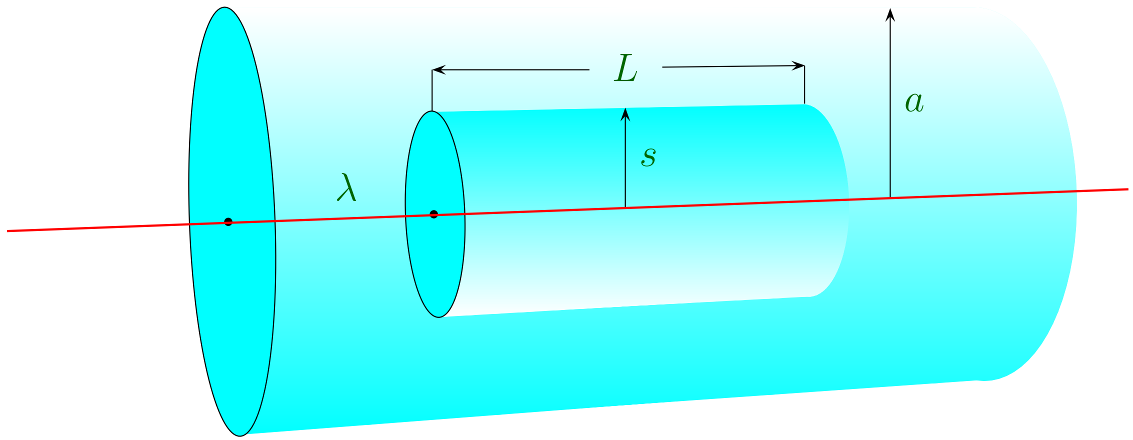
$$\boxed{\boldsymbol{D} \equiv \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}} \quad \textbf{wektor indukcji elektrycznej}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{sw}}} \quad \textbf{prawo Gaussa}$$

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = Q_{\mathsf{sw\ wew}}$$

Przykład:

Długi prosty drut, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ, otoczony jest gumową izolacją. Promień warstwy izolacji wynosi a. Znaleźć indukcję elektryczną w tym układzie.



$D(2\pi s L) = \lambda L$ z prawa Gaussa

$\boldsymbol{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{s}},$ wzór słuszny wewnątrz i na zewnątrz izolacji

$\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{\boldsymbol{s}}$ dla $s > a$ $(\boldsymbol{P} = 0)$

Wewnątrz izolacji nie znamy $\boldsymbol{P}$!

4.3.2 Zwodnicze podobieństwo

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \neq \frac{1}{4\pi}\int \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\rho_{\mathrm{sw}}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau',$$ dla $\boldsymbol{D}$ nie ma „prawa Coulomba”

$$\nabla \times \boldsymbol{D} = \epsilon_0(\nabla \times \boldsymbol{E}) + (\nabla \times \boldsymbol{P}) = \nabla \times \boldsymbol{P}$$

Do wyznaczenia pola wektorowego nie wystarczy znajomość dywergencji. Trzeba jeszcze znać rotację.

$$\nabla \times \boldsymbol{D} \neq 0,$$

$\boldsymbol{D}$ nie jest gradientem skalara,

$\boldsymbol{D}$ nie ma potencjału!

$\boldsymbol{D}$ nie jest wyznaczone wyłącznie przez ładunek swobodny.

4.3.3 Warunki brzegowe

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = Q_{\text{sw wew}}$$

$D^{\perp}_{\text{nad}} - D^{\perp}_{\text{pod}} = \sigma_{\text{sw}}$ skok składowej prostopadłej

$D^{||}_{\text{nad}} - D^{||}_{\text{pod}} = P^{||}_{\text{nad}} - P^{||}_{\text{pod}},$ skok składowej równoległej

W obecności dielektyka te warunki są często bardziej użyteczne niż warunki dla pola.

$$E^{\perp}_{\text{nad}} - E^{\perp}_{\text{pod}} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$$

$$\boldsymbol{E}^{||}_{\text{nad}} - \boldsymbol{E}^{||}_{\text{pod}} = 0$$

4.4 Dielektryki liniowe

4.4.1 Podatność elektryczna i przenikalność elektryczna

$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$ dla niezbyt silnych pól

χ_e jest **podatnością elektryczną** ośrodka

$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E},$ w ośrodkach liniowych

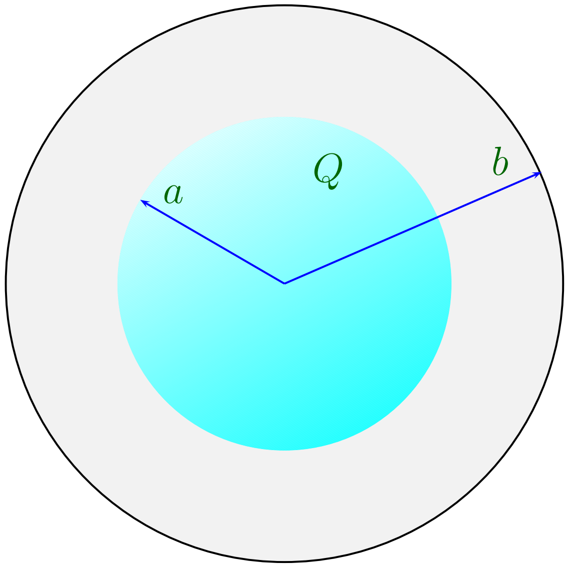
$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E},$ $\boldsymbol{D}$ jest proporcjonalne do $\boldsymbol{E}$

$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ **przenikalność elektryczna** ośrodka

$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0},$ **względna przenikalność elektryczna**

Przykład:

Metalowa kula o promieniu a naładowana została ładunkiem Q. Kula otoczona jest powłoką z dielektryka o przenikalności elektrycznej ϵ; promień powłoki wynosi b. Znaleźć różnicę potencjałów między środkiem kuli i punktem w nieskończoności.



$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \text{dla } r > a \quad \text{ze względu na symetrię sferyczną}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = 0, \quad \text{wewnątrz metalowej kuli}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & \text{dla } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & \text{dla } r > b \end{cases}$$

$$V = -\int\limits_{\infty}^{0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int\limits_{\infty}^{b} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \mathrm{d}r - \int\limits_{b}^{a} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\right) \mathrm{d}r - \int\limits_{a}^{0} (0)\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b}\right)$$

Nie musieliśmy obliczać polaryzacji ani gęstości ładunków związanych!

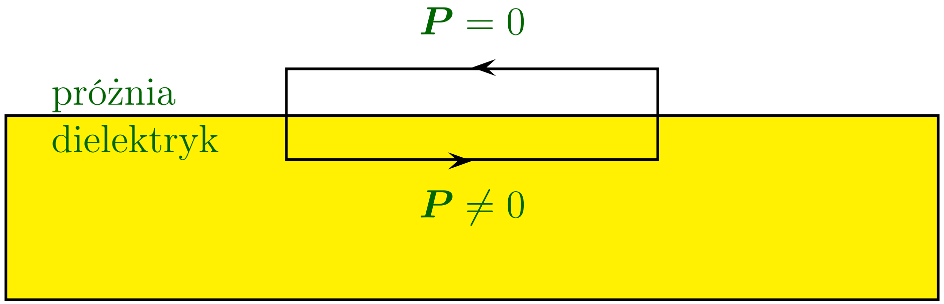
Chociaż w tym przypadku nie jest to trudne.

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\rho_{\text{zw}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0$$

$$\sigma_{\text{zw}} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon b^2} & \text{na powierzchni zewnętrznej} \\ -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon a^2} & \text{na powierzchni wewnętrznej} \end{cases}$$

Znak minus wynika z tego, że wektor $\hat{\boldsymbol{n}}$ jest skierowany na zewnątrz dielektryka ($+\hat{\boldsymbol{r}}$ dla $r = b$ i $-\hat{\boldsymbol{r}}$ dla $r = a$).



$\oint \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\neq 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{P}\neq 0,$

$\epsilon_0\chi_e$ różne po obu stronach

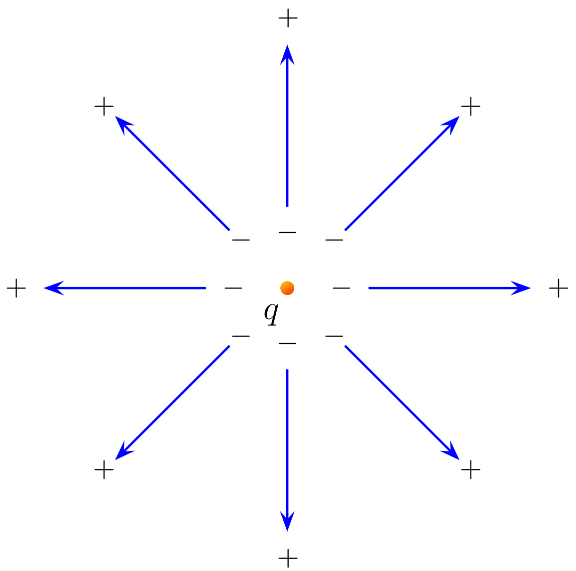
Także dla dielektryków liniowych podobieństwo $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{E}$ jest zwodnicze.

Chyba, że przestrzeń jest całkowicie wypełniona jednorodnym dielektrykiem.

$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{sw}}, \quad \nabla\times\boldsymbol{D}=0,$ znając ρ_{sw} można obliczyć $\boldsymbol{D}$

$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}_{\text{próżni}},$ $\boldsymbol{E}_{\text{próżni}}$ jest natężeniem pola elektrycznego jakie dany rozkład ładunków wytworzyłby w próżni

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{D}=\frac{1}{\epsilon_r}\boldsymbol{E}_{\text{próżni}}$$ pole w dielektryku jest redukowane o ϵ_r



ładunek swobodny q umieszczony w dużym kawałku dielektryka jest ekranowany przez ładunki związane

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$ we wzorze występuje ϵ a nie ϵ_0

$$P_x = \epsilon_0\left(\chi_{exx}E_x + \chi_{exy}E_y + \chi_{exz}E_z\right)$$
$$P_y = \epsilon_0\left(\chi_{eyx}E_x + \chi_{eyy}E_y + \chi_{eyz}E_z\right)$$
$$P_z = \epsilon_0\left(\chi_{ezx}E_x + \chi_{ezy}E_y + \chi_{ezz}E_z\right)$$

dla kryształów **tensor podatności elektrycznej**

4.4.2 Zagadnienia brzegowe w obecności dielektryków liniowych

$$\rho_{\mathrm{zw}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \chi_e \frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon} \right)$$

$$= -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_{\mathrm{sw}}$$

W jednorodnym dielektryku liniowym gęstość ładunku związanego ρ_{zw} jest proporcjonalna do gęstości ładunku swobodnego ρ_{sw}.

Jeśli w dielektryku nie ma ładunków swobodnych $\rho_{\mathrm{sw}} = 0$, to nieznikająca gęstość ładunku może wystąpić jedynie na powierzchni.

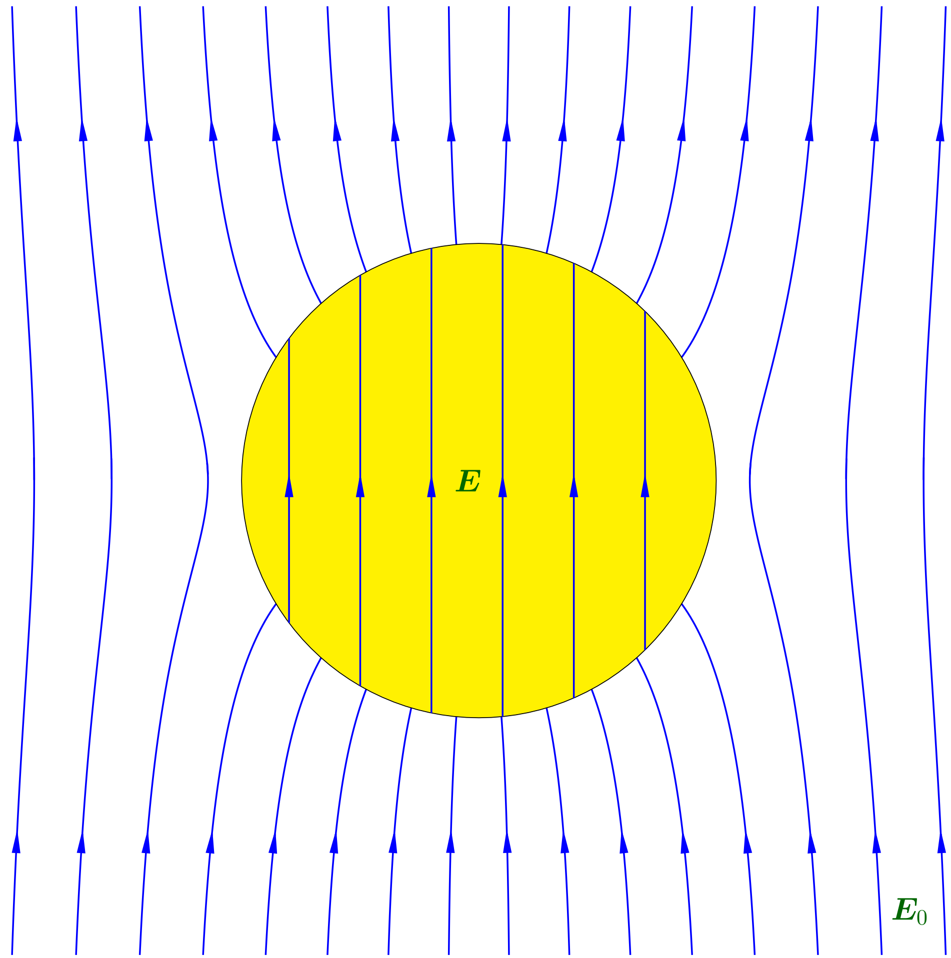
$$\epsilon_{\mathrm{nad}} E^{\perp}_{\mathrm{nad}} - \epsilon_{\mathrm{pod}} E^{\perp}_{\mathrm{pod}} = \sigma_{\mathrm{sw}}, \quad \text{warunek brzegowy}$$

$$\epsilon_{\mathrm{nad}}\frac{\partial V_{\mathrm{nad}}}{\partial n} - \epsilon_{\mathrm{pod}}\frac{\partial V_{\mathrm{pod}}}{\partial n} = -\sigma_{\mathrm{sw}}, \quad \text{w języku potencjału}$$

$$V_{\mathrm{nad}} = V_{\mathrm{pod}}, \quad \text{potencjał jest ciągły}$$

Przykład:

Kula wykonana z jednorodnego dielektryka liniowego została umieszczona w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\boldsymbol{E}_0$. Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz kuli.



Należy rozwiązać równanie Laplace'a przy następujących warunkach brzegowych:

(i) $V_{\mathrm{wew}} = V_{\mathrm{zew}}$ gdy $r = R$

(ii) $\epsilon \frac{\partial V_{\mathrm{wew}}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{\mathrm{zew}}}{\partial r}$ gdy $r = R$ (nie ma ładunków swobodnych)

(iii) $V_{\mathrm{zew}} \rightarrow -E_0 r \cos\theta$ gdy $r \gg R$

$$V_{\mathrm{wew}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$V_{\mathrm{zew}}(r,\theta) = -E_0 r \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = -E_0 R\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta), \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{cases} A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -E_0\cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta), \qquad \text{(ii)}$$

$$\begin{cases} \epsilon_r l A_l = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}, & \text{dla } l \neq 1 \\ \epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}, & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_l = B_l = 0 & \text{dla } l \neq 1 \\ A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r+2} E_0, \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0, & \text{dla } l = 1 \end{cases}$$

$$V_{\mathrm{wew}}(r,\theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r\cos\theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{wew}} = \frac{3}{\epsilon_r + 2}\boldsymbol{E}_0,$$ pole wewnątrz kuli jest jednorodne

$$V_{\mathrm{zew}}(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\frac{R^3}{r^2}E_0\cos\theta$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{zew}} = \boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$ pole $\boldsymbol{E}_0$ plus pole dipola

$$p = 4\pi\epsilon_0\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}R^3 E_0,$$ moment dipolowy kuli

---

4.4.3 Energia w układach z dielektrykami

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 \, \mathrm{d}\tau,$$ energia zmagazynowana w polu

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int \epsilon_r E^2 \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau,$$ w układach z dielektrykami

$$\delta W = \int (\delta\rho_{\mathrm{sw}}) V \, \mathrm{d}\tau,$$ do dielektryka wprowadzamy ładunki swobodne

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{sw}} \quad \Rightarrow \quad \delta\rho_{\mathrm{sw}} = \nabla\cdot(\delta\boldsymbol{D})$$

$$\delta W = \int [\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{D})] V \, \mathrm{d}\tau$$

$$\nabla\cdot[(\delta\boldsymbol{D})V] = [\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{D})]V + \delta\boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)$$

$$\delta W = \int \nabla \cdot [(\delta \boldsymbol{D}) V] \, \mathrm{d}\tau + \int (\delta \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau$$

$$\int \nabla \cdot [(\delta \boldsymbol{D}) V] \, \mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{S}} (\delta \boldsymbol{D}) V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$$

całkujemy po całej przestrzeni

$$\delta W = \int (\delta \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau$$

$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E},$ dla dielektryków liniowych

$$\frac{1}{2} \delta (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2} \delta (\epsilon E^2) = \epsilon (\delta \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{E} = (\delta \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\delta W = \delta \left(\frac{1}{2} \int \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau \right)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau}$$

Energia układu to praca konieczna do utworzenia danego układu.

Dwa sposoby „tworzenia układu”:

(i) Wprowadzamy małymi porcjami **ładunki swobodne i związane** i umieszczamy je w ich położeniach

$$W = W_{\mathrm{sw}} + W_{\mathrm{zw}}$$

(ii) Wprowadzamy małymi porcjami **ładunki swobodne** pozwalając dielektrykowi dostosować się do ich obecności

$$W_{\text{całk}} = W_{\mathrm{sw}} + W_{\mathrm{zw}} + W_{\text{sprężynek}}$$