

Elektrodynamika

Część 1

Elektrostatyka

Ryszard Tanaś

Zakład Optyki Nieliniowej, UAM

<http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>

Spis treści

1	Literatura	3
2	Elektrostatyka	4
2.1	Pole elektryczne	4
2.2	Dywergencja i rotacja pola elektrostatycznego	11
2.3	Potencjał elektryczny	28
2.4	Praca i energia w elektrostatyce	40
2.5	Przewodniki	47

1 Literatura

Wykład oparty jest na podręczniku:

D. J. Griffiths, Podstawy elektrodynamiki, PWN, Warszawa, 2001

W prezentacjach używam notacji zgodnej (prawie) z polską wersją tego podręcznika.

Należy pamiętać, że **tłusta czcionka oznacza wektor**,

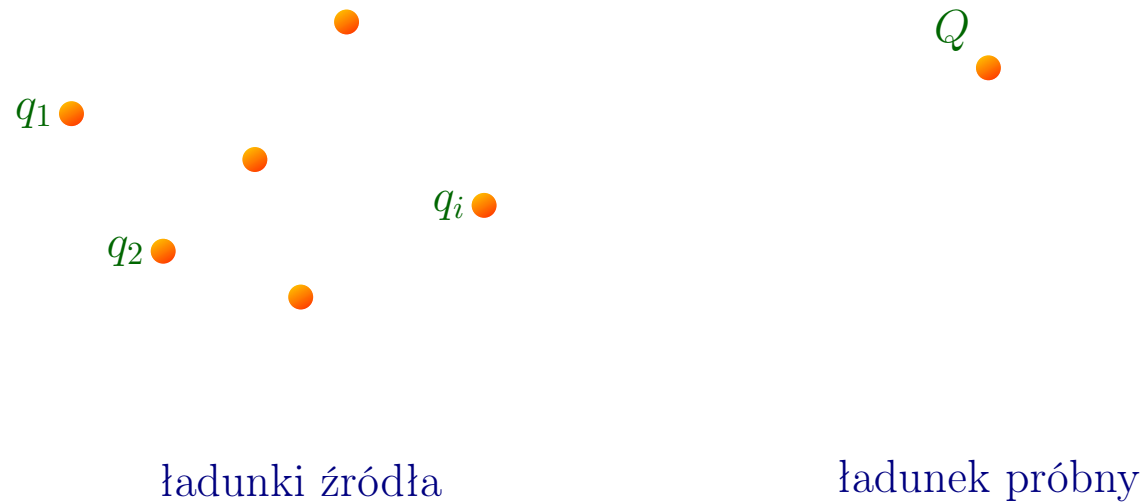
np. **E** oznacza \vec{E} w pisowni ręcznej.

Prezentacje mogą być wykorzystywane wyłącznie w celach dydaktycznych.

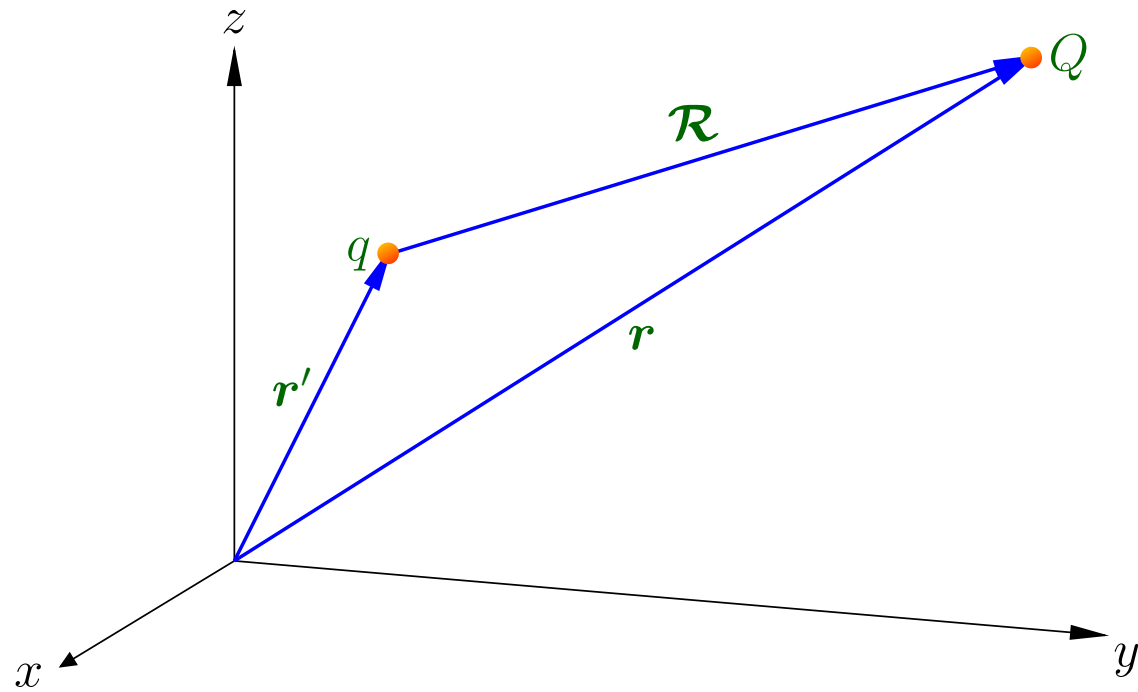
2 Elektrostatyka

2.1 Pole elektryczne

2.1.1 Zasada superpozycji



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$$



$$\mathcal{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

Jaką siłą q działa na Q ?

2.1.2 Prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right]$$

przenikalność elektryczna próżni

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

wersor wskazujący kierunek i
zwrot wektora \mathcal{R}

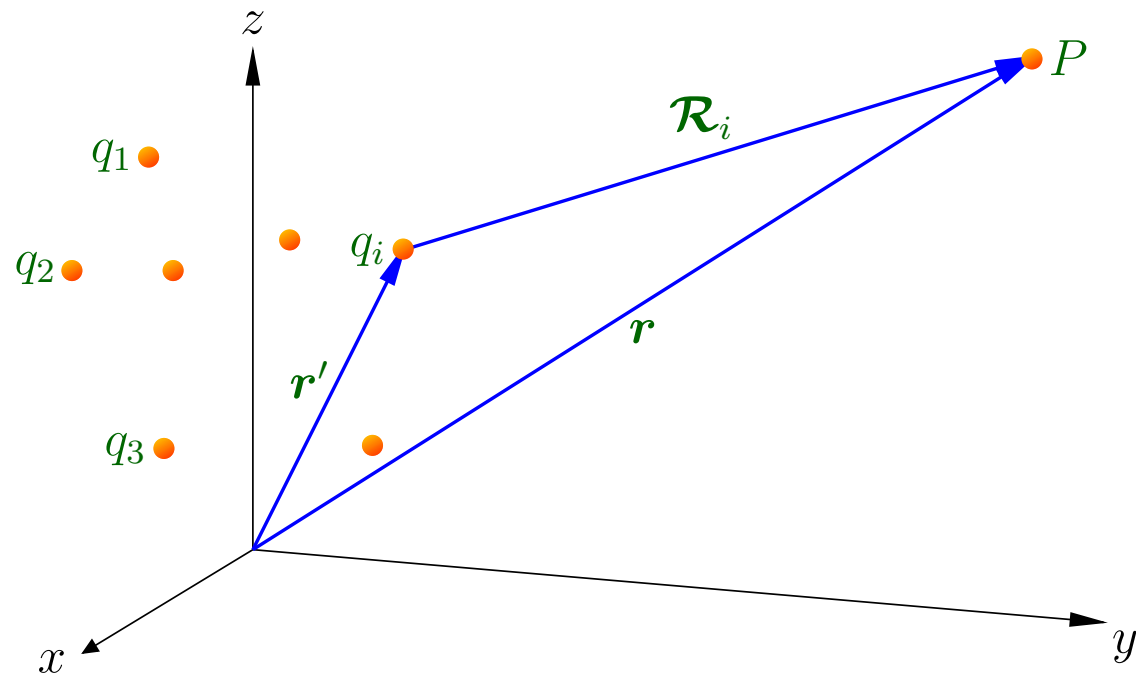
2.1.3 Pole elektryczne

Całkowita siła działająca na Q pochodząca od ładunków q_1, q_2, \dots, q_n odległych od Q o $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \dots \right) \\ &= Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathcal{R}}_1 + \frac{q_2}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathcal{R}}_2 + \frac{q_3}{\mathcal{R}_3^2} \hat{\mathcal{R}}_3 + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = QE}$$

E — natężenie pola elektrycznego



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathcal{R}}_i$$

2.1.4 Ciągłe rozkłady ładunku

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dq$$

$$dq = \begin{cases} \lambda dl' & \text{ładunek liniowy} \\ \sigma da' & \text{ładunek powierzchniowy} \\ \rho d\tau' & \text{ładunek objętościowy} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dl' \quad \text{pole od ładunku liniowego:}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} \, da' \quad \text{pole od ładunku powierzchniowego}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} \, d\tau' \quad \text{pole od ładunku objętościowego}$$

2.2 Dywergencja i rotacja pola elektrostatycznego

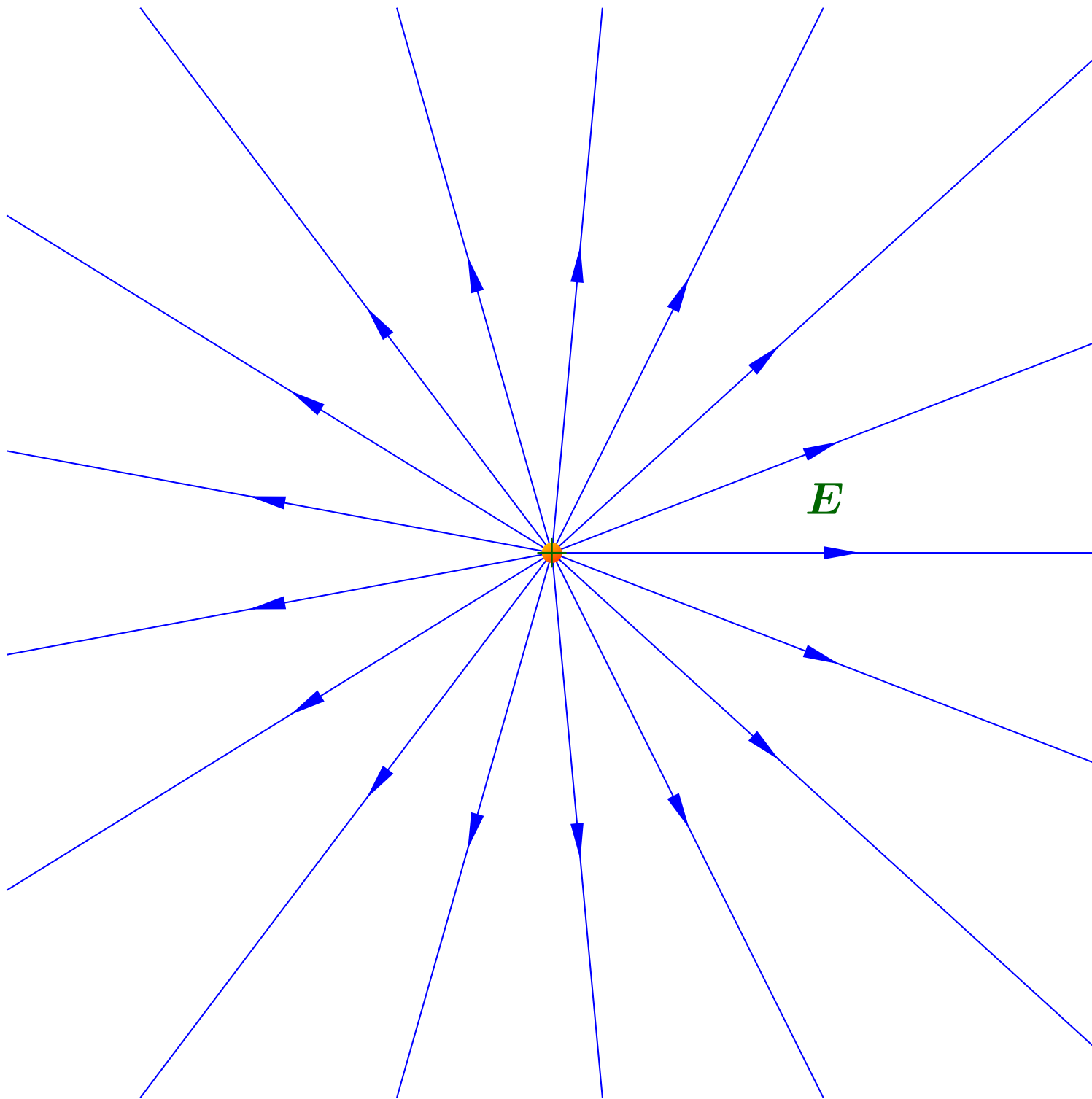
2.2.1 Linie pola, strumień i prawo Gaussa

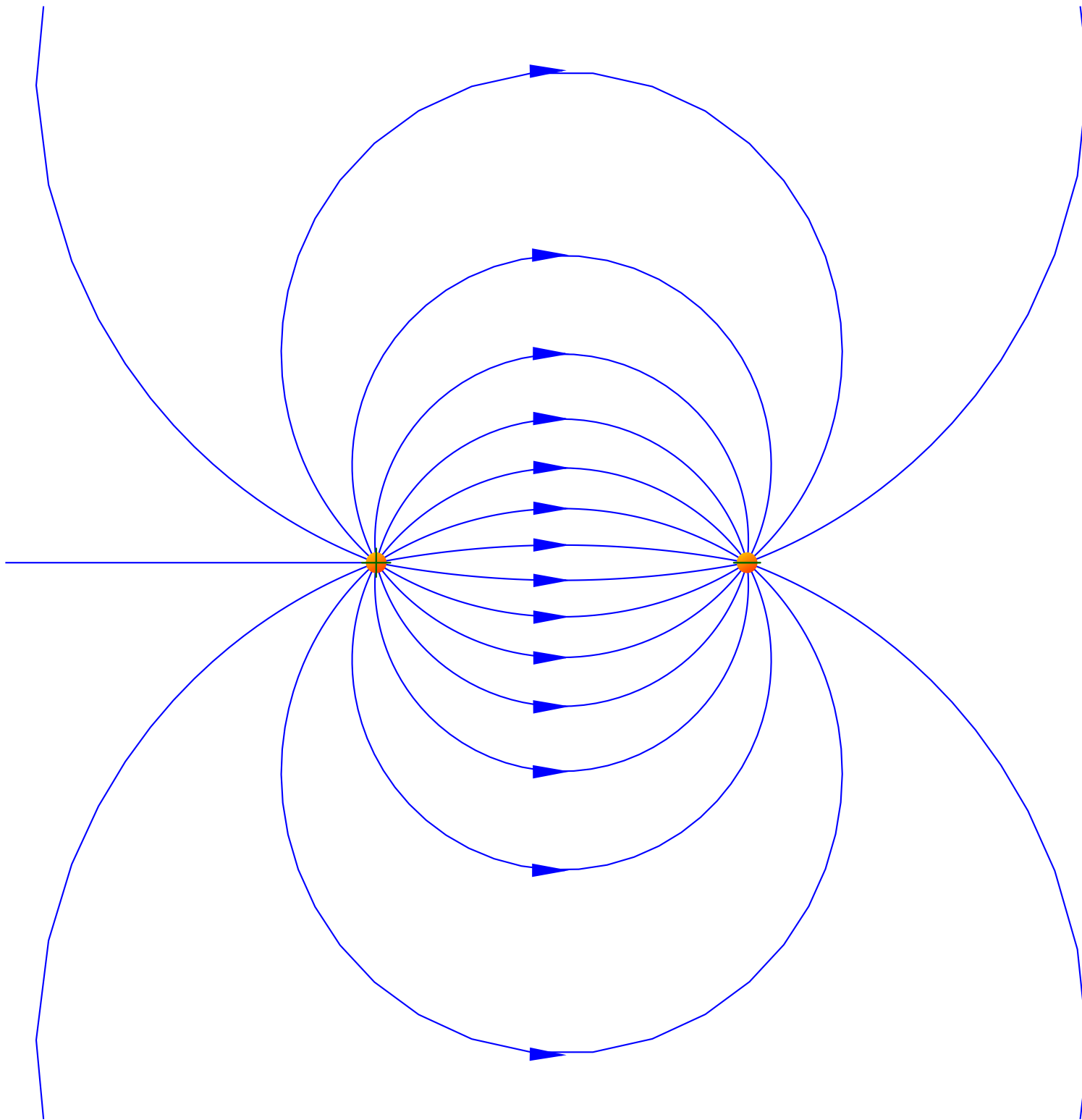
Weźmy pojedynczy ładunek q umieszczony w początku układu współrzędnych, wtedy

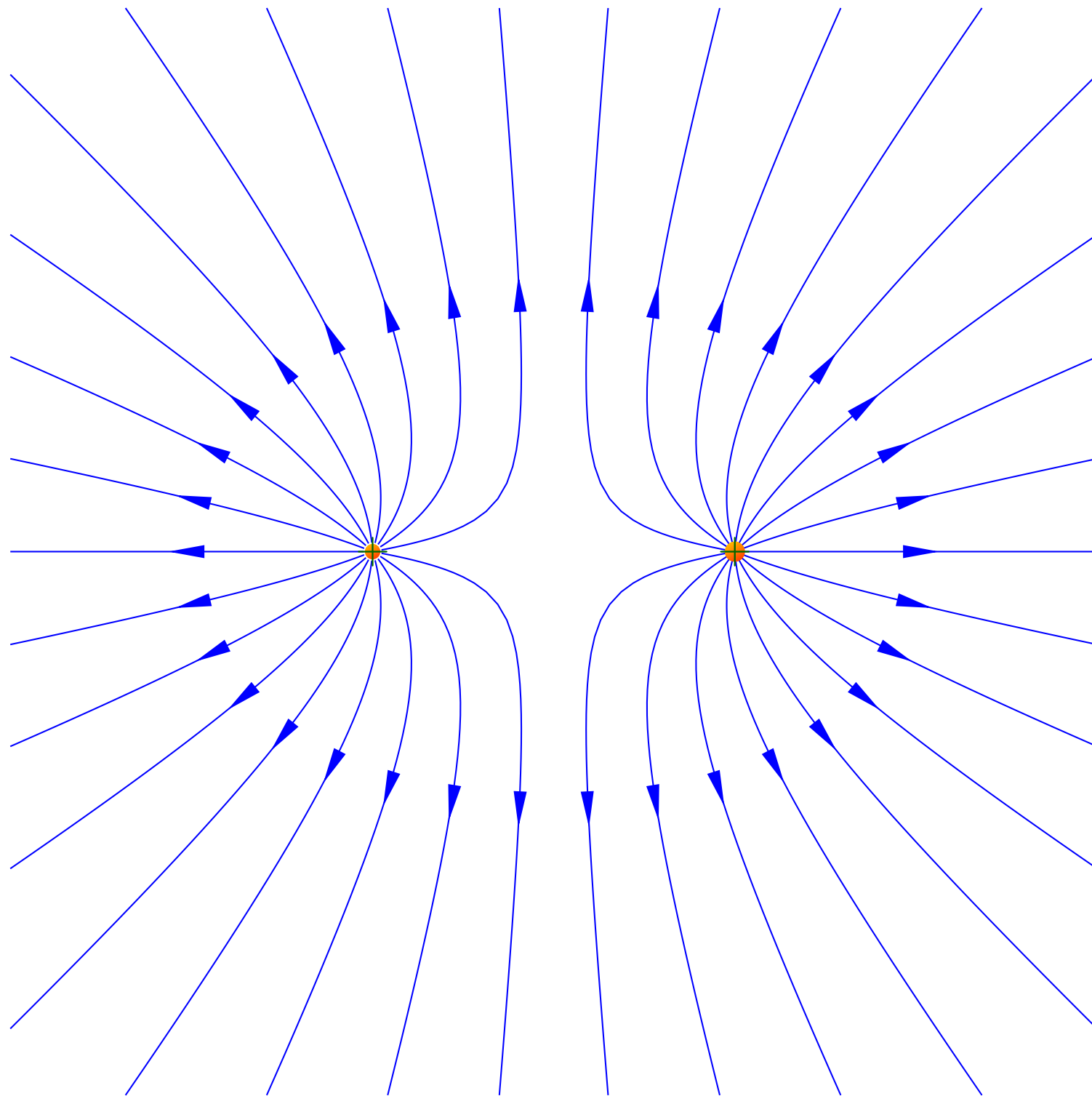
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

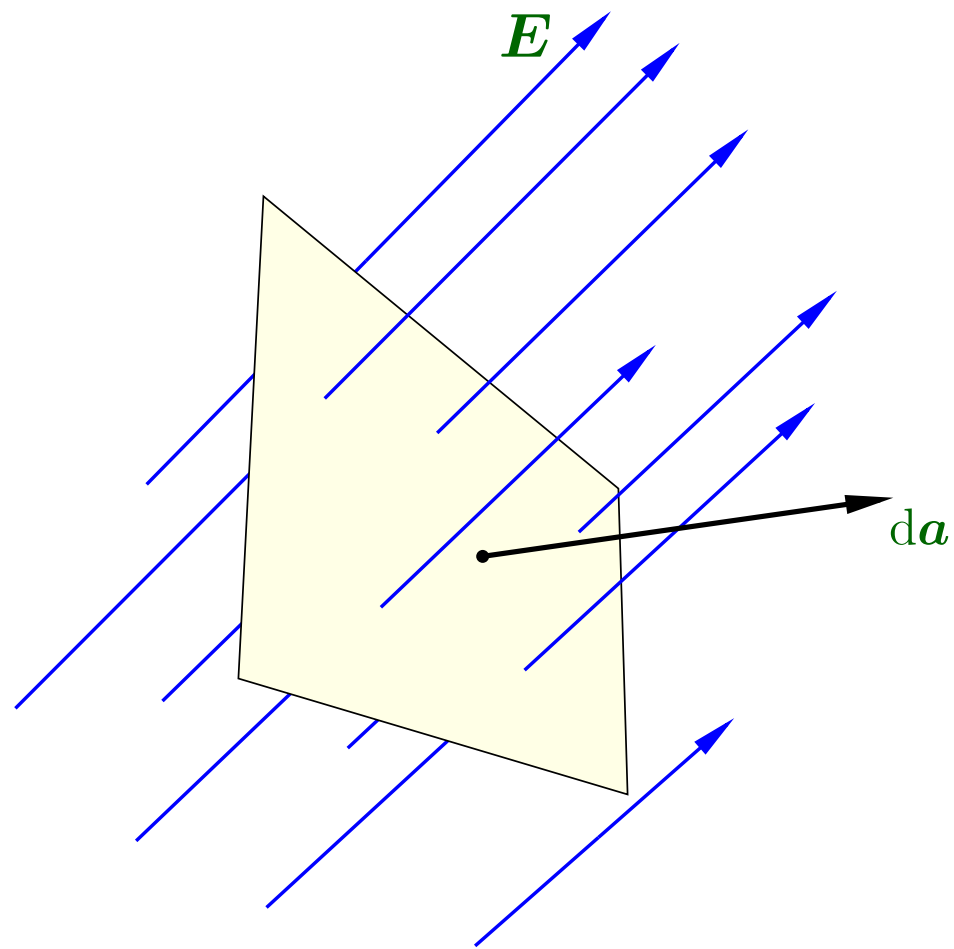
Pole jest silne w pobliżu ładunku i w miarę oddalania się od ładunku maleje jak $1/r^2$.

Dla **ładunku dodatniego** pole skierowane jest **od ładunku**.









Strumień pola \mathbf{E} przez powierzchnię \mathcal{S}

$$\Phi_E \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

jest miarą „liczby linii pola” przechodzących przez \mathcal{S} .

Dla ładunku punktowego q umieszczonego w początku układu współrzędnych, strumień pola \mathbf{E} przez sferę o promieniu r wynosi

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left(r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Wynik nie zależy od promienia sfery.

Wynik jest taki sam dla dowolnej powierzchni zamkniętej.

Prawo Gaussa

Strumień pola przez dowolną powierzchnię obejmującą ładunek q wynosi q/ϵ_0

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left(\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\epsilon_0} q_i \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}$$

**Strumień pola przez dowolną
powierzchnię zamkniętą jest równy**

$$Q_{\text{wew}}/\epsilon_0$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

**twierdzenie o dywergencji
(twierdzenie Gaussa)**

$$Q_{\text{wew}} = \int \rho d\tau$$
$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int_V \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Prawo Gaussa w postaci różniczkowej

2.2.2 Dywergencja \mathbf{E}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

cała przestrzeń

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathcal{R}) \quad \text{delta Diraca}$$

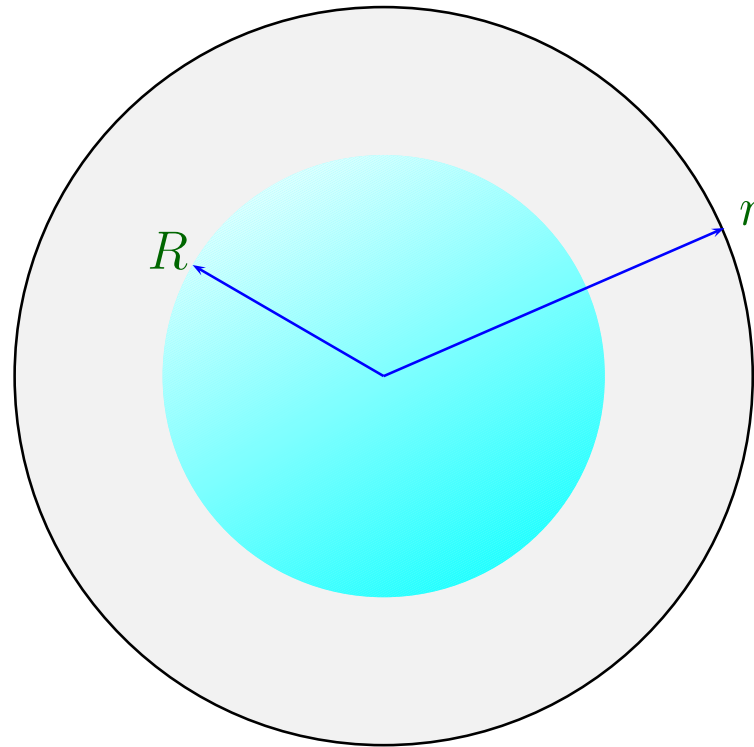
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}$$

2.2.3 Zastosowania prawa Gaussa

Przykład:

Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R i całkowitym ładunku q



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}, \quad Q_{\text{wew}} = q$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = |\mathbf{E}| \oint_S da = |\mathbf{E}| 4\pi r^2$$

$$|\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

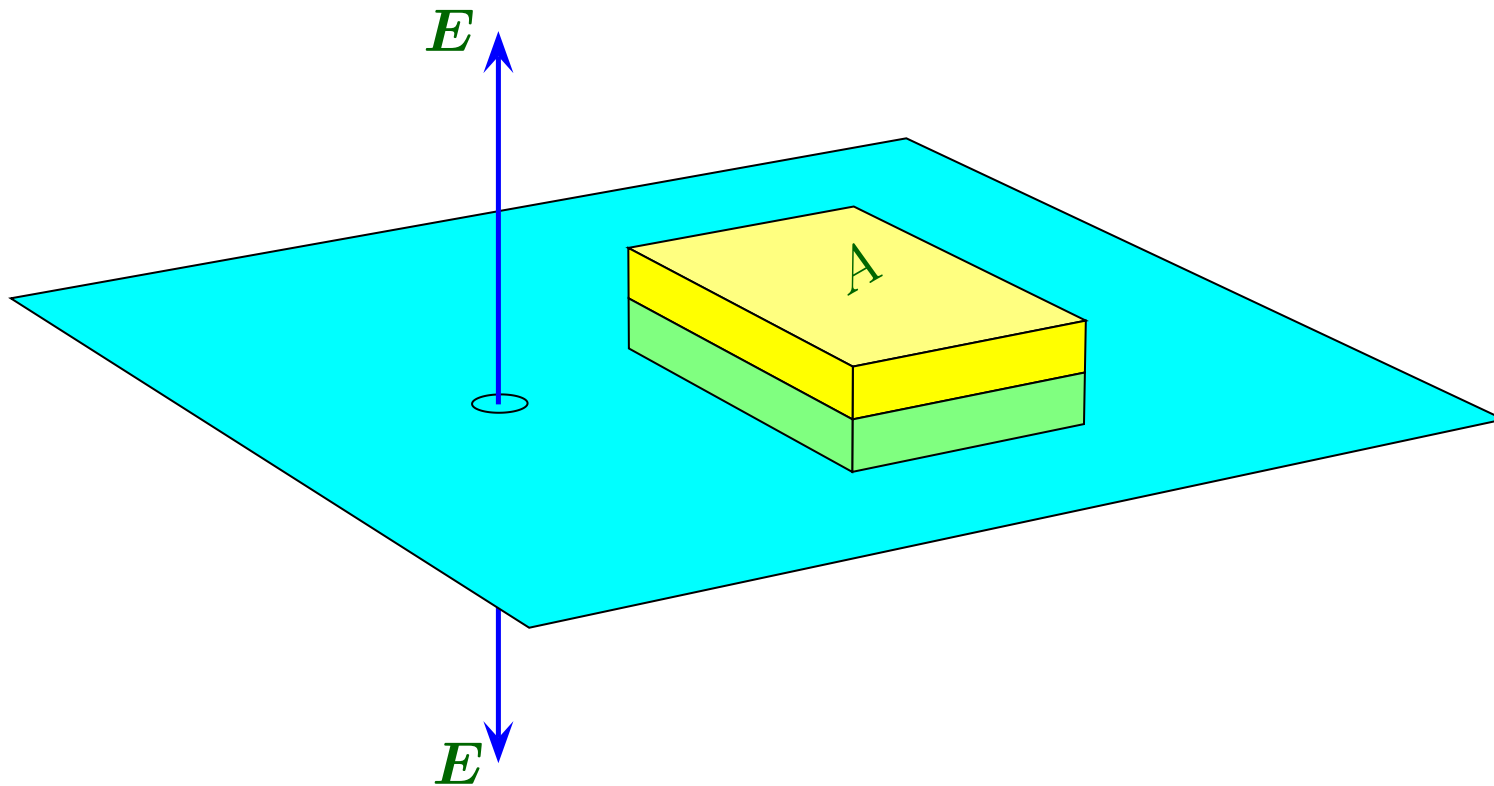
Pole na zewnątrz sfery jest takie jak od ładunku punktowego umieszczonego w środku kuli.

Prawo Gaussa jest przydatne do obliczania pola w przypadku kiedy układ wykazuje wysoką symetrię.

- Symetria sferyczna
- Symetria osiowa
- Symetria względem płaszczyzny

Przykład:

Dana jest nieskończona płaszczyzna naładowana ze stałą gęstością powierzchniową σ . Znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez tę płaszczyznę.



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{wew}}$$

od górnej i dolnej powierzchni pudełka mamy

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2A|\mathbf{E}|$$

boki pudełka nic nie wnoszą, więc

$$2A|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

stąd

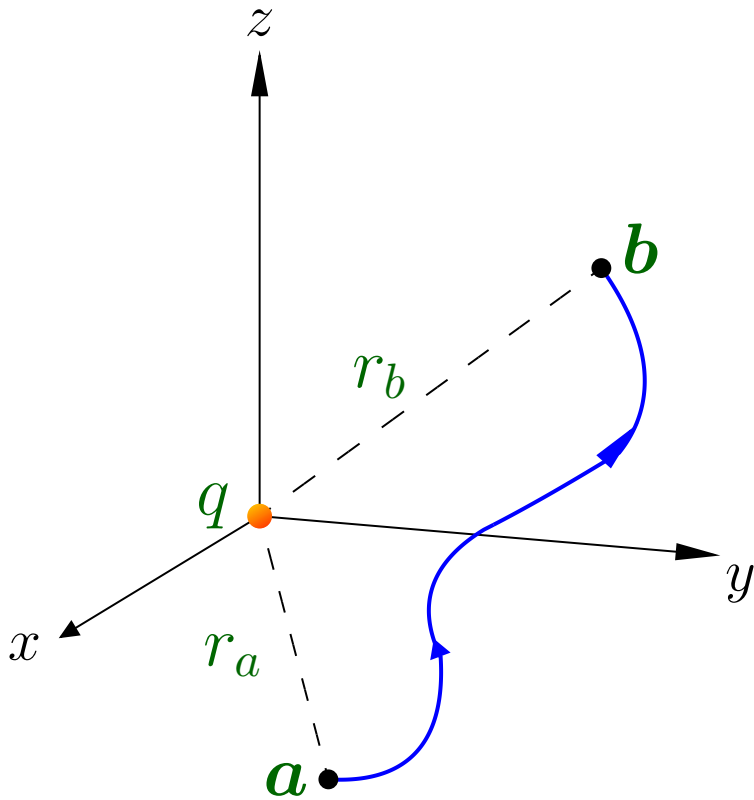
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni

2.2.4 Rotacja E

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

dla ładunku punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych



obliczmy całkę krzywoliniową $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{we współrzędnych sferycznych}$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

całka po krzywej zamkniętej
jest równa zero ($r_a = r_b$)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

twierdzenie Stokesa

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

z twierdzenia Stokesa

Dla wielu ładunków

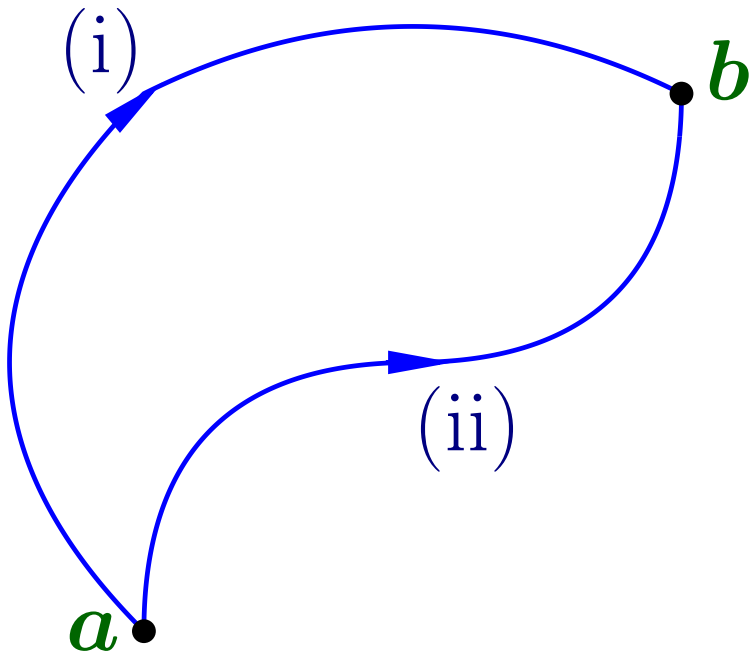
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) \\ &= (\nabla \times \mathbf{E}_1) + (\nabla \times \mathbf{E}_2) + \dots = 0\end{aligned}$$

Słuszne dla dowolnego statycznego układu ładunków

2.3 Potencjał elektryczny

2.3.1 Wstępne uwagi o potencjale



$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0;$
całka od punktu a do punktu b nie
zależy od drogi całkowania.

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

definiujemy funkcję $V(\mathbf{r})$;
 \mathcal{O} jest punktem odniesienia.

Funkcję tę nazywamy **potencjałem elektrycznym**.

Różnica potencjałów

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

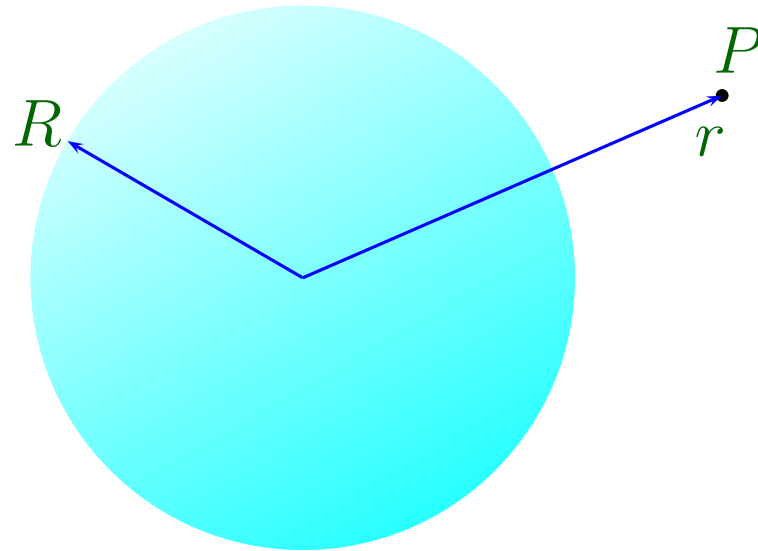
$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l}$$

twierdzenie dla gradientów

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

Przykład:

Znaleźć potencjał wewnątrz i na zewnątrz cienkiej kulistej powłoki o promieniu R , naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową. Za punkt odniesienia przyjąć punkt w nieskończoności.



Z prawa Gaussa, pole na zewnątrz kuli ($r > R$) wynosi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Wewnątrz kuli ($r < R$) pole $\mathbf{E} = 0$

Dla ($r > R$)

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^r = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}$$

Dla ($r < R$)

$$V(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{q}{r'^2} dr' - \int_R^r (0) dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r'} \right|_{\infty}^R + 0 = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}}$$

2.3.2 Równanie Poissona i równanie Laplace'a

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\Delta V$$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{równanie Poissona}$$

$$\boxed{\Delta V = 0} \quad \text{równanie Laplace'a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\nabla V) = 0 \quad \text{tożsamość wektorowa}$$

2.3.3 Potencjał zlokalizowanego rozkładu ładunku

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{potencjał ładunku znajdującego się w początku układu współrzędnych}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}} \quad \text{ogólnie, ładunek w punkcie } \mathbf{r}'$$

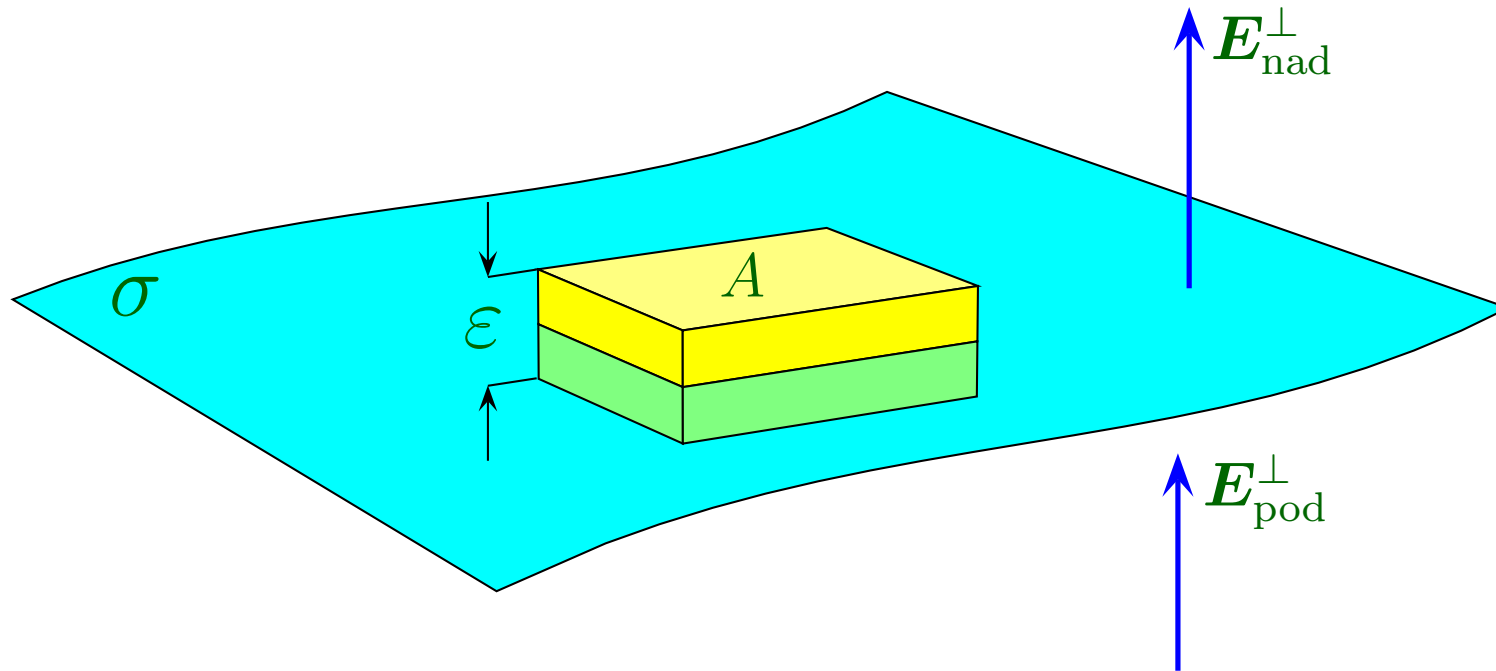
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i} \quad \text{dla wielu ładunków}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} dq \quad \text{dla rozkładu ciągłego}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d\tau'$$

2.3.4 Warunki brzegowe w elektrostatyce

Rozważmy cienne pudełko Gaussa:



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad \text{prawo Gaussa}$$

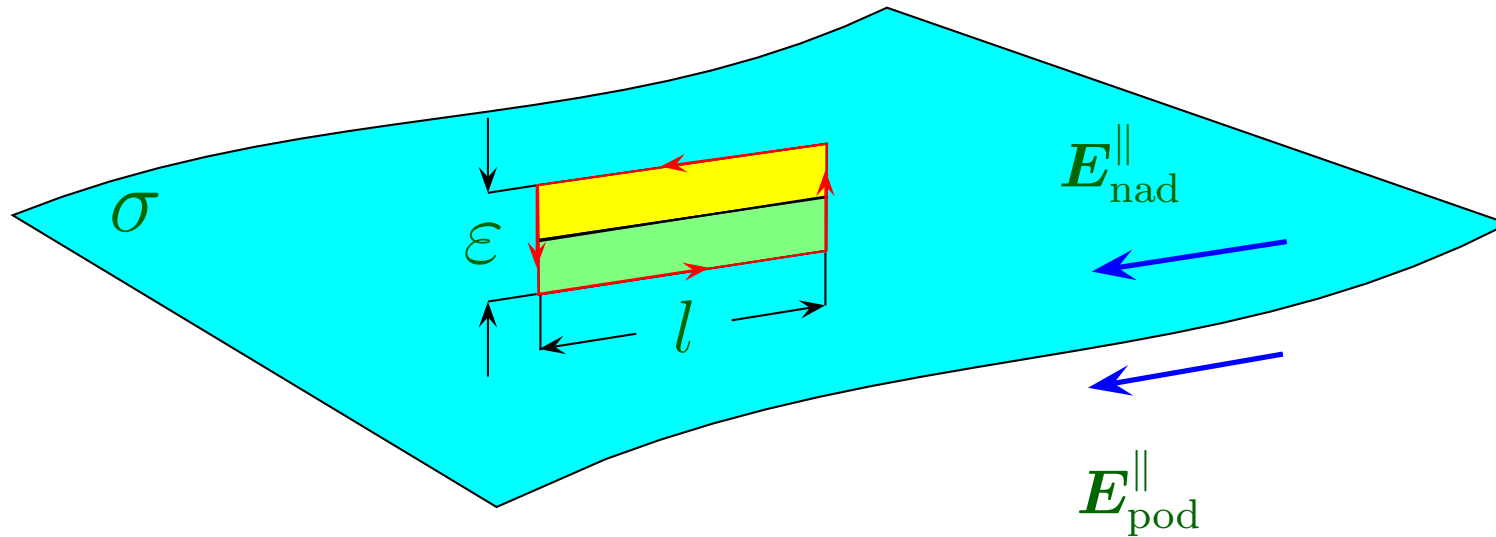
Z prawa Gaussa, dla $\varepsilon \rightarrow 0$, mamy

$$(E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp})A = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma A$$

$$E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$$

Składowa normalna wektora natężenia pola elektrycznego E ma na powierzchni granicznej nieciągłość o wartości σ/ϵ_0

Rozważmy ramkę:



$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, albo $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ pole statyczne

$(E_{\text{nad}}^{\parallel} - E_{\text{pod}}^{\parallel})l = 0$ przy $\varepsilon \rightarrow 0$

$$E_{\text{nad}}^{\parallel} = E_{\text{pod}}^{\parallel}$$

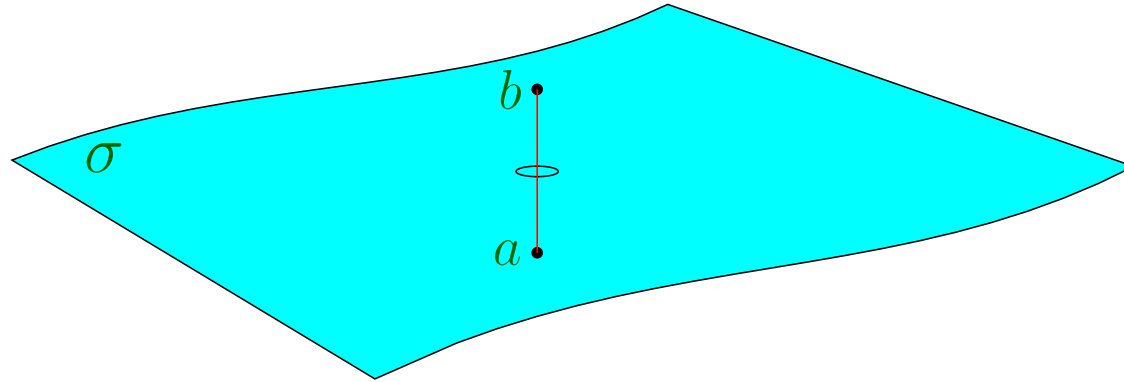
Składowa styczna pola \mathbf{E} jest zawsze ciągła.

Obydwa warunki można zapisać jednym wzorem

$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni skierowanym od „dołu” do „góry”.

Jak zachowuje się potencjał?



$$V_{\text{nad}} - V_{\text{pod}} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{dla } |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \rightarrow 0$$

Potencjał jest ciągły na powierzchni.

Ponieważ $\mathbf{E} = -\nabla V$, to **gradient potencjału** jest nieciągły.

$$\nabla V_{\text{nad}} - \nabla V_{\text{pod}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

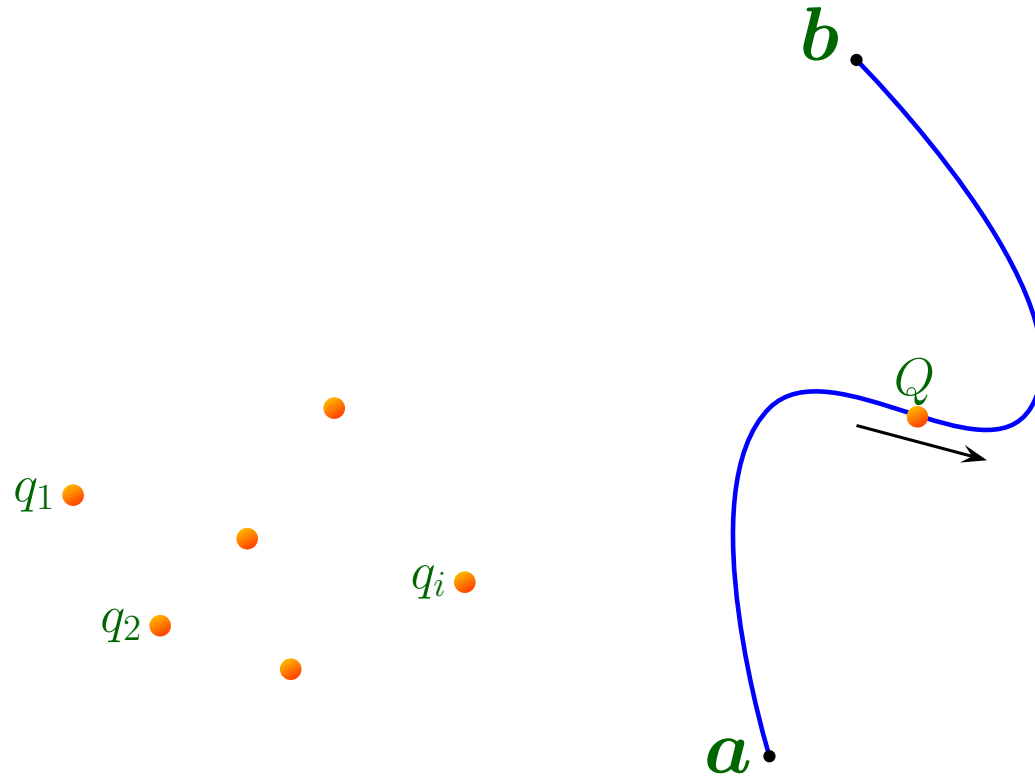
$$\frac{\partial V_{\text{nad}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{pod}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}$$

pochodna normalna

2.4 Praca i energia w elektrostatyce

2.4.1 Praca wykonana przy przesunięciu ładunku



$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q [V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})]$$

Wynik nie zależy od drogi.

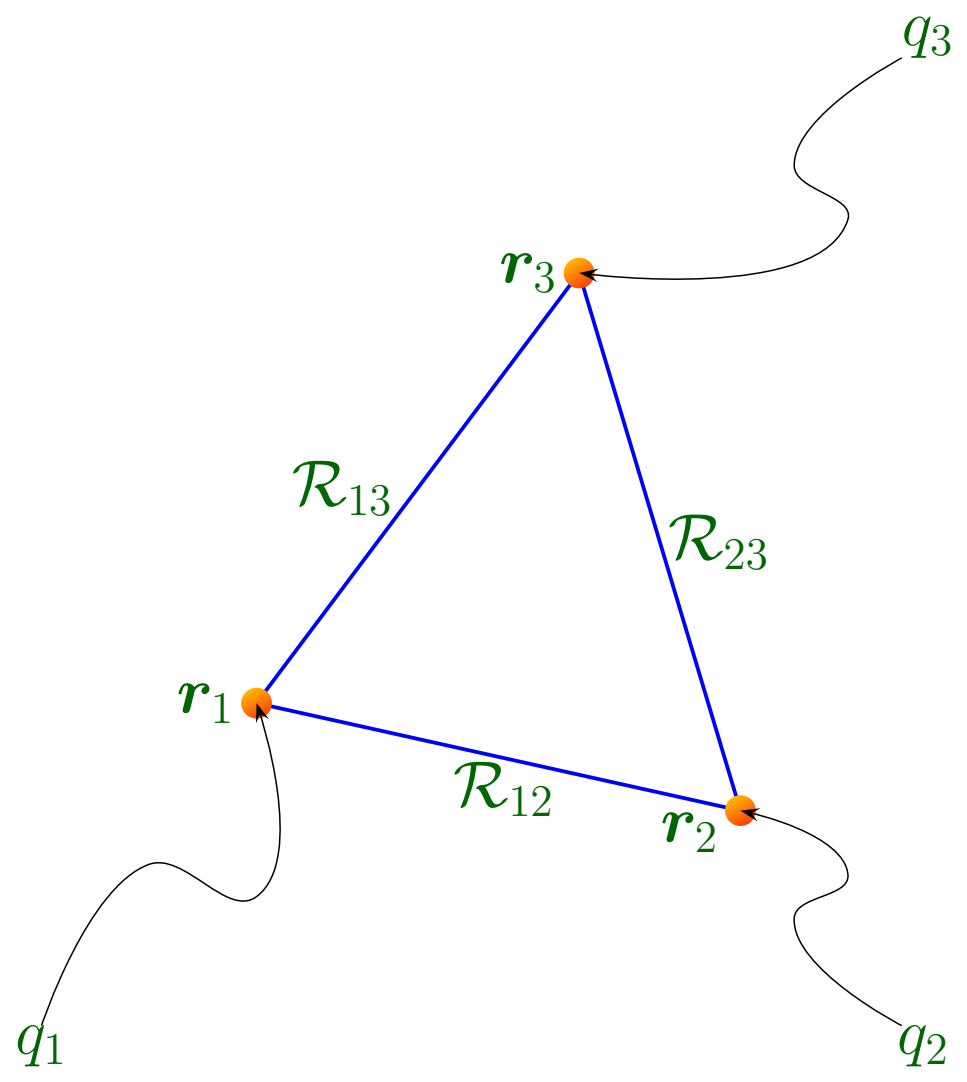
$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \frac{W}{Q}$$

Różnica potencjałów między punktami a i b jest równa pracy przypadającej na jednostkę ładunku, koniecznej do przesunięcia ładunku od a do b .

$$W = Q [V(\mathbf{r}) - V(\infty)] = QV(\mathbf{r})$$

2.4.2 Energia układu ładunków punktowych

Przenosimy kolejne ładunki q_1, q_2, \dots z nieskończoności do punktów $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$



Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}} \right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

Całkowita praca

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{\mathcal{R}_{12}} + \frac{q_1 q_3}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2 q_3}{\mathcal{R}_{23}} + \frac{q_1 q_4}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2 q_4}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3 q_4}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{R_{ij}}, \quad n \text{ ładunków}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{R_{ij}} \quad \begin{array}{l} \text{sumujemy podwójnie i} \\ \text{dzielimy przez dwa} \end{array}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{R_{ij}} \right) \quad \boxed{\text{potencjał}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{r}_i)$$

2.4.3 Energia ciągłego rozkładu ładunków

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \text{z prawa Gaussa}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V \, d\tau$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) \, d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right] \quad \begin{array}{l} \text{całkujemy} \\ \text{przez części} \end{array}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_{\mathcal{V}} E^2 \, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cała przestrzeń}} E^2 d\tau$$

Energia pola

Przykład:

Znaleźć energię jednorodnie naładowanej powierzchniowo powłoki kulistej o promieniu R i całkowitym ładunku q .

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V da, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \sigma da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q^2}{R}$$

2.5 Przewodniki

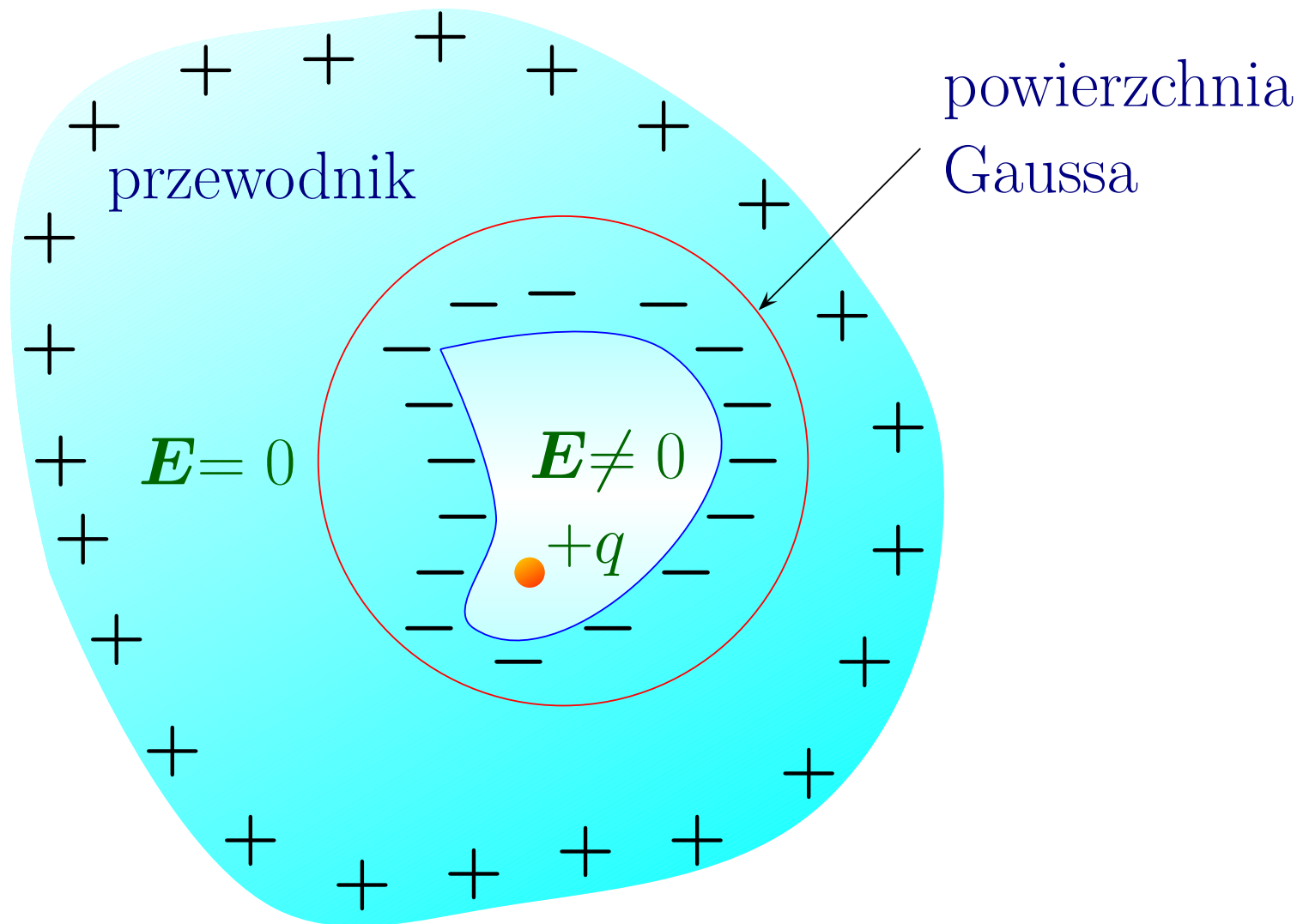
2.5.1 Podstawowe własności

- Wewnątrz przewodnika $E = 0$
- Wewnątrz przewodnika $\rho = 0$
- Nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnika
- Potencjał w przewodniku jest stały
- W pobliżu powierzchni przewodnika pole E jest prostopadłe do powierzchni

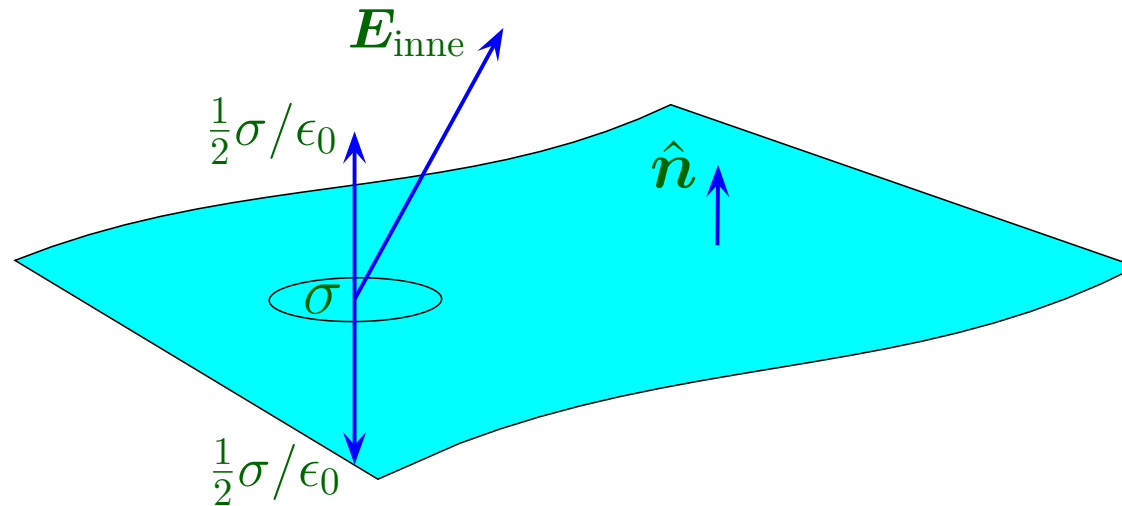
2.5.2 Ładunki indukowane

$+q$





2.5.3 Ładunki powierzchniowe i siła działająca na przewodnik



$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad \text{tuż przy powierzchni przewodnika} \quad (\mathbf{E}_{\text{pod}} = 0)$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}$ siła na jednostkę powierzchni

$\mathbf{E} = ?$, jakie pole? $\mathbf{E}_{\text{nad}}, \mathbf{E}_{\text{pod}}, \dots$

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{element}} + \mathbf{E}_{\text{inne}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{nad}} = \mathbf{E}_{\text{inne}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{pod}} = \mathbf{E}_{\text{inne}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{inne}}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}}) = \boxed{\mathbf{E}_{\text{średnie}}}$$

Poprzednia argumentacja ($E = E_{\text{średnie}}$) obowiązuje także dla ładunków powierzchniowych w przewodniku

$E = 0$, wewnątrz przewodnika

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$, na zewnątrz przewodnika

$$E_{\text{średnie}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} + 0 \right) = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}}$$

$f = \sigma \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{n}$, siła na jednostkę powierzchni

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\boxed{\frac{\sigma}{\epsilon_0}} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \text{ciśnienie elektrostatyczne}$$

Przewodnik jest wciągany w pole elektryczne.