Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu Wydział Fizyki

Grzegorz Chimczak

Teleportacja stanów atomowych z wykorzystaniem kwantowej interferencji pól wychodzących z dwóch rezonatorów

Praca doktorska wykonana w Zakładzie Optyki Nieliniowej pod kierunkiem Prof. dr hab. Ryszarda Tanasia

Poznań 2005

Panu Profesorowi dr hab. Ryszardowi Tanasiowi składam serdeczne podziękowania za rozbudzenie we mnie zainteresowania informatyką kwantową, za cenną pomoc w zgłębianiu jej tajników oraz za okazaną cierpliwość i wiele życzliwości. Dziękuję również Kolegom i Koleżankom z Zakładu Optyki Nieliniowej za wszelką pomoc i życzliwość. Szczególne podziękowania składam zaś Rodzicom, bez wsparcia których ta praca nigdy by nie powstała.

Spis treści

1	Wst	Şep	7
2	Podstawowe pojęcia informatyki kwantowej		
	2.1	Kwantowy bit	12
	2.2	Splątanie	15
	2.3	Bramki kwantowe	22
	2.4	Algorytmy kwantowe	29
	2.5	Twierdzenie o nieklonowaniu	34
	2.6	Wierność	35
	2.7	Entropia Shannona i von Neumanna	39
	2.8	Nadmiarowe kodowanie	43
	2.9	Teleportacja kwantowa	45
3	Tra	jektorie kwantowe	55
	3.1	Macierz gęstości	55
	3.2	Równanie "master"	58
	3.3	Rozsupływanie równania "master"	64
	3.4	Algorytmy trajektorii kwantowych	69
4	Inte	erferencja pól na płytce światłodzielącej	75
	4.1	Kwantowy opis działania płytki światłodzielącej	76
	4.2	Detektory z efektywnością mniejszą od jedności $\ .$	78
5	Ato	my we wnęce rezonansowej	83
	5.1	Hamiltonian trójpoziomowego atomu typu Λ	84
	5.2	Adiabatyczna eliminacja poziomu wzbudzonego	88
6	Ma	nipulowanie stanem układu	93
	6.1	Ewolucja stanu pojedynczego atomu we wnęce	93
	6.2	Ewolucja stanu wielu atomów we wnęce	99

7	Teleportacja stanu odległego atomu		
	7.1	Protokół teleportacji	. 108
	7.2	Wpływ emisji spontanicznej na teleportację	. 117
	7.3	Nadmiarowe kodowanie w teleportacji	. 130
	7.4	Nieefektywny pomiar w teleportacji	. 137
8	Tele	eportacja stanów splątanych	141
	8.1	Generowanie stanów splątanych odległych atomów	. 142
	8.2	Protokół teleportacji z asekuracją	. 151
	8.3	Badanie protokołu teleportacji z asekuracją	. 158
9) Zakończenie		165

6

Rozdział 1

Wstęp

Teleportacja była początkowo pojęciem występującym jedynie w literaturze fikcji naukowej. Termin ten oznaczał sposób podróżowania, polegający na zebraniu w pomiarze dokładnej informacji o budowie podróżnika, przesłaniu tej informacji do portu docelowego i odtworzeniu podróżnika w tym odległym miejscu na podstawie tej informacji. Teleportacja długo pozostawała jedynie fikcja ze względu na zasadę nieoznaczoności Heisenberga, która nie pozwala na jednoczesne zmierzenie dokładnego położenia i pędu atomów. Jednak w 1993 roku Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres i William K. Wootters [1] znaleźli sposób na obejście tej najważniejszej przeszkody i pojęcie teleportacji wkroczyło do świata fizyki kwantowej. Teleportacja stała się możliwa dzieki zastosowaniu niezwykłych własności stanów splątanych, na które po raz pierwszy zwrócili uwagę: Albert Einstein, Borys Podolski i Nathan Rosen [2]. Dysponując splątaną parą cząstek, stan pewnej cząstki źródłowej można teleportować wykonując kilka prostych działań. W tym celu wystarczy wykonać połączony pomiar wspólnego stanu jednej ze splątanych cząstek i cząstki źródłowej, a następnie przesłać wynik pomiaru do portu docelowego, gdzie stan czastki źródłowej odtwarzany jest w stanie drugiej cząstki ze splątanej pary na podstawie otrzymanej informacji. Wymagania techniczne teleportowania dużych obiektów takich jak ludzie sa na tyle wysokie, że niestety teleportacja jeszcze bardzo długo nie zagrozi tradycyjnym środkom transportu. Pomimo tego teleportacja stała się niezwykle ważna, ponieważ teleportowanie stanów pojedynczych cząstek, które jest stosunkowo proste, znalazło zastosowanie w nowej, szybko rozwijającej się dziedzinie nauki — informatyce kwantowej. Tym niezwykle ważnym zastosowaniem jest przesyłanie informacji kwantowej na duże odległości. Możliwość teleportowania kwantowych stanów została szybko potwierdzona eksperymentalnie na przykładzie stanów fotonowych [3–15]. Fotony są niezwykle wygodnym nośnikiem informacji w transporcie na duże odległości, ponieważ poruszają się z prędkością światła i słabo oddziałują z otoczeniem. Dlatego też nie jest dziwne, że udało się teleportować stany fotonowe w doświadczeniu nawet na odległość 2 km [9]. Niestety stany fotonowe mają również poważną wadę — nie nadają się do przechowywania kwantowej informacji. Dlatego kwantowa pamieć musi być realizowana za pomoca stanów atomowych. Stany atomowe są także niezbędne do wykonywania operacji na kwantowej informacji, ponieważ, jak wspomniano wcześniej, stany fotonowe słabo oddziałują z otoczeniem. Stąd w komputerach kwantowych będą musiały być używane stany atomowe albo stany pseudoatomowe struktur takich, jak kropki kwantowe. Niestety stany atomowe mają poważną wadę a mianowicie nie nadają się do przesyłania kwantowej informacji. Jednak te główna wade stanów atomowych można wyeliminować, stosując technike kwantowej teleportacji i dlatego realizacja teleportacji stanów atomowych jest problemem dużej wagi. Pierwsze doświadczenie, w którym teleportowano stany atomowe wykonano już w 1998 roku [16], ale była to teleportacja na niezwykle małe odległości — rzędu kilku angstremów, a w dodatku informacja kwantowa została przesłana pomiędzy atomami należącymi do jednej cząsteczki. Przy tak małych odległościach teleportacja nie ma praktycznych zastosowań i w związku z tym naprawdę ważnym osiagnięciem byłaby dopiero teleportacja stanów atomowych na duże odległości. Niedawno zrealizowano teleportację stanów atomowych na swobodnych jonach [17,18]. Jednak także i tych ostatnich doświadczeń nie można nazwać teleportacją stanów atomowych na duże odległości, ponieważ dystans pomiędzy atomem źródłowym i docelowym wynosił zaledwie kilka μm . Jedyną szansą na dalekodystansową teleportację stanów atomowych jest połączenie zalet stanów fotonowych i atomowych. Takie właśnie rozwiązanie przyjęli w swoim artykule: Sougato Bose, Peter Knight, Martin Plenio i Vlatko Vedral [19]. Urządzenie, które zaproponowali ci badacze, wykorzystuje kwantową interferencję pól elektromagnetycznych wychodzących z dwóch optycznych rezonatorów. Ten właśnie układ jest przedmiotem badań przedstawionych w niniejszej pracy.

Pierwszym celem tej pracy jest zbadanie wpływu emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego atomów na proces teleportacji. Jest oczywiste, że wystąpienie takiej emisji spowoduje zniszczenie kwantowej informacji. Dlatego Bose i inni [19] przyjęli takie założenia, by współczynnik emisji spontanicznej mógł być zaniedbany. W tej pracy model zostanie uogólniony do niezerowych wartości tego współczynnika, by móc sprawdzić czy założenia te są w istocie wystarczające, by teleportacja przebiegała poprawnie.

Drugim celem pracy jest zbadanie możliwości zastosowania nadmiarowego kodowania do ulepszenia procesu teleportacji stanów atomowych. Połączony pomiar w propozycji Bosego i innych [19] jest wykonywany tylko przy użyciu liniowych elementów optycznych i dlatego teleportacja udaje się tylko w połowie przypadków [20,21]. Niepowodzenie oznacza całkowitą utratę przesyłanej informacji. Nadmiarowe kodowanie ocaliłoby kwantową informację w przypadku niepomyślnego wyniku pomiaru i umożliwiłoby powtarzanie teleportacji do skutku.

Trzecim celem pracy jest uogólnienie układu Bosego i innych [19] tak, żeby umożliwić teleportowanie atomowych stanów splątanych. Rozwiązanie nietrywialnych problemów wymaga w klasycznych komputerach operacji wykonywanych na wielu bitach zebranych w rejestry. W informatyce kwantowej jeden atom to także za mało, a w przypadku użycia większej liczby atomów będą się nierzadko pojawiać ich stany splątane. Stany splątane są kluczowym elementem wielu technik informatyki kwantowej. Takie stany również mogą być również cenną informacją kwantową, dlatego warto przeanalizować możliwość ich teleportowania.

Czwartym celem pracy jest uproszczenie rachunków wykonywanych w celu prześledzenia ewolucji układu. Takie uproszczenie jest konieczne w przypadku uogólnienia modelu do układu wieloatomowego, ale znacząco ułatwia obliczenia również w najprostszym modelu.

Teleportacja jest w tej pracy rozważana jedynie jako technika służąca informatyce kwantowej i jako taka wymagać bedzie do opisu wielu pojeć z informatyki kwantowej. Dlatego rozdział drugi został pomyślany jako wstęp do informatyki kwantowej, pozwalający na zapoznanie się z terminami używanymi w tej pracy. Rozdział trzeci poświęcony jest metodzie badania czasowej ewolucji stanów układów otwartych, zwanej trajektoriami kwantowymi. Taka metoda jest potrzebna do śledzenia procesu teleportacji ze względu na ucieczkę energii z układu do otoczenia, jaka występuje podczas przeprowadzenia połączonego pomiaru. W rozdziale czwartym i piątym wyznaczone są postaci operatorów niezbędnych w metodzie trajęktorii kwantowych do wyznaczenia ewolucji w modelu zaproponowanym przez Bosego i innych [19], a także do wyznaczenia ewolucji we wspomnianych uogólnieniach tego modelu. W rozdziale szóstym przedstawione sa uproszczone równania na czasowa ewolucję stanu układu. Różnym typom ewolucji nadana jest tam zwarta postać operacji, jakie moga być wykonane na stanie układu przez eksperymentatora. Rozdział siódmy poświęcony jest dokładnemu zbadaniu układu zaproponowanego przez Bosego i innych [19] do teleportacji stanu jednego atomu. Spośród tych badań najistotniejsze jest sprawdzenie wpływu niezerowego współczynnika emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego na teleportację oraz sprawdzenie istnienia możliwości użycia w tym modelu nadmiarowego kodowania. Końcowy rozdział ósmy przedstawia metodę teleportacji atomowych stanów splątanych.

Rozdział 2

Podstawowe pojęcia informatyki kwantowej

Informatyka kwantowa traktuje stany kwantowe jako nośniki informacji kwantowej, którą można manipulować, przeprowadzając "obliczenia kwantowe". Jest to podejście przełomowe, gdyż mechanika kwantowa oferuje możliwości niedostępne dla klasycznych komputerów. David Deutsch [22] w 1985 roku przedstawił pierwszy przykład dowodzący, iż komputery kwantowe są w stanie rozwiązywać niektóre zagadnienia znacznie szybciej niż komputery klasyczne. Dalszych, ale znacznie istotniejszych przykładów popierających tę tezę, dostarczyli: w 1994 roku Peter Shor [23], a w 1996 roku Lov Grover [24, 25]. Algorytm Grovera rozwiązuje problem szukania danego elementu w nieposortowanym, N-elementowym zbiorze, wykonując zaledwie liczbę operacji proporcjonalną do \sqrt{N} . Algorytm klasyczny wymaga w najgorszym przypadku przejrzenia wszystkich N elementów. Jeszcze większe, bo aż wykładnicze, przyśpieszenie obliczeń zapewnia algorytm Shora, rozkładający liczby na czynniki pierwsze.

Zważywszy jak wielkim przełomem w dziejach ludzkości było zastosowanie klasycznych komputerów, zrozumiałe jest, że perspektywa znacznego przyśpieszenia rozwiązywania wielu zagadnień oraz możliwość zrealizowania dotąd niedostępnych zadań spowodowała niezwykłe zainteresowanie informatyką kwantową i jej szybki rozwój. Rozwój ten wymagał zdefiniowania kwantowych odpowiedników wielu pojęć i procesów podstawowych w klasycznej informatyce. Niezbędne było również wprowadzenie zupełnie nowych pojęć. W tym rozdziale przedstawione zostaną definicje tych z podstawowych pojęć informatyki kwantowej, których znajomość potrzebna będzie w dalszej części tej pracy.

2.1 Kwantowy bit

Podstawowym systemem obliczeniowym dla wszystkich dzisiejszych komputerów klasycznych jest system dwójkowy. W przeszłości podejmowano próby skonstruowania komputerów, dla których naturalnym systemem byłby system inny niż dwójkowy. Niestety zbudowanie podstawowych układów elektronicznych, rozróżniających więcej niż dwa stany, wymagało zastosowania znacznie trudniejszych w produkcji i w związku z tym droższych elementów półprzewodnikowych. Wynika to z faktu, że nawet takie same elementy półprzewodnikowe mają drobne różnice pomiędzy swoimi charakterystykami. Jeśli poziomów napięcia odpowiadających różnym cyfrom będzie dużo, to poziom napięcia, reprezentujący daną cyfrę, wytwarzany przez jeden z elementów, może zostać mylnie zinterpretowany przez drugi element. Dla układów liczących w systemie dwójkowym nie ma takiego problemu, gdyż potrzebne jest tylko rozróżnienie pomiędzy wysokim i niskim stanem napięcia. W związku z tym system binarny jest niezwykle ważny w klasycznej informatyce.

Podstawową jednostką ilości informacji w systemie dwójkowym jest bit. Nazwa bit jest skrótem od "binary dig*it*" czyli cyfry dwójkowej. Elektroniczne układy realizujące bit mogą, jak wcześniej wspomniano, przyjmować jeden z dwóch stanów — stan niskiego napięcia oznaczany cyfrą 0 lub stan wysokiego napięcia odpowiadający cyfrze 1. Przeprowadzając podstawowe manipulacje na bitach, klasyczne komputery mogą rozwiązywać nawet bardzo złożone zagadnienia. Jest zatem oczywiste, że informatyce kwantowej niezbędny był odpowiednik tak przydatnego pojęcia jakim jest bit. Takim odpowiednikiem jest kwantowy bit, a w skrócie kubit.

Kubit jest, podobnie jak bit, obiektem matematycznym, który można zrealizować, wykorzystując różne fizyczne układy. Podobnie do bitu kubit może znajdować się w dwóch stanach $|0\rangle$ lub $|1\rangle$. Jednak w przeciwieństwie do bitu kubit może się również znajdować stanie będącym liniową kombinacją tych dwóch stanów:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{2.1}$$

W powyższym równaniu α i β są liczbami zespolonymi, spełniającymi warunek normalizacyjny

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$
 (2.2)

W takim stanie będącym superpozycją dwóch stanów bazowych może znajdować się wiele układów kwantowych. Warto w tym miejscu przytoczyć kilka przykładowych realizacji kubitu w fizycznych układach. Dwa pierwsze

przykłady wykorzystują w tym celu stany fotonowe niezwykle przydatne do przesyłania informacji kwantowej na duże odległości. Są to stany polaryzacji fotonu oraz stany pola elektromagnetycznego wewnątrz wnęki rezonansowej. Fotony mogą być spolaryzowane w kierunku poziomym lub pionowym. Te dwie polaryzacje można wykorzystać do utworzenia stanów bazowych. Każda wartość kubitu można przedstawić za pomocą odpowiedniej polaryzacji fotonu będącej superpozycją polaryzacji pionowej i poziomej. Takie stany zostały wybrane przez Antona Zeilingera i jego grupe [4] do doświadczenia realizującego po raz pierwszy laboratoryjnie ideę teleportacji kubitów. Innymi stanami fotonowymi, które mogą posłużyć do zrealizowania kubitu, są stany Focka. W tym przypadku rolę kubitu może pełnić mod pola wewnątrz wneki rezonansowej przygotowany w superpozycji stanu próżni i stanu jednofotonowego. Kubitami mogą być również stany atomowe, które są najlepsze do długiego przechowywania informacji kwantowej. Bardzo często wykorzystywane są w eksperymentach stany spinowe jąder atomowych ze względu na to, że magnetyczny rezonans jądrowy (MRJ) jest używany już od dawna w fizyce i chemii i w związku z tym techniki manipulacji stanami spinów jądrowych są bardzo dobrze znane. Jeszcze bardziej ekscytującą konsekwencja powszechności techniki MRJ jest dostępność aparatury prowadzaca do łatwej realizacji wielu prostszych przykładów kwantowych algorytmów. Na przykład M. Nielsen i inni [16] użyli dwóch jąder wegla ^{13}C oraz jądra wodoru wchodzących w skład cząsteczki trójchloroetylenu do zademonstrowania teleportacji stanu atomowego. Innym bardzo znanym przykładem zastosowania MRJ do demonstracji obliczeń kwantowych jest wykonanie rozkładu liczby 15 na czynniki pierwsze za pomocą algorytmu Shora. Isaac L. Chuang wraz ze swoją grupą [26] dokonał tego, wykorzystując siedmiokubitowy komputer kwantowy zbudowany z cząsteczki $C_{11}H_5F_5O_2Fe$. Stany bazowe tworzą w przypadku MRJ dwie możliwe wartości rzutu momentu magnetycznego na kierunek przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego. Jednakże najbardziej oczywistym sposobem zrealizowania stanów bazowych kubitu w stanach atomowych jest wykorzystanie dwóch poziomów, na których może się znaleźć elektron. Poziom o niższej energii nazywa się podstawowym, a o wyższej wzbudzonym. Niedawno dwie grupy naukowców [17, 18] użyły takiego kodowania kubitu w pojedynczych jonach uwięzionych w pułapkach Paula do teleportowania stanu atomowego.

W lepszym zrozumieniu pojęcia kubitu bardzo pomocna jest jego geometryczna interpretacja. Warunek unormowania (2.2) pozwala po prostych przekształceniach na przepisanie równania (2.1) do postaci

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right), \qquad (2.3)$$

gdzie θ , ϕ i γ są liczbami rzeczywistymi. Z globalnym czynnikiem fazowym w funkcjach falowych nie wiąże się żaden efekt dający się zaobserwować doświadczalnie. Zarówno funkcja falowa $|\Psi\rangle$ jak i $e^{i\gamma}|\Psi\rangle$ dadzą taką samą wartość oczekiwaną operatora Ω przyporządkowanego pewnej wielkości obserwowalnej, ponieważ $\overline{\Omega} = \langle \Psi | e^{-i\gamma} \Omega e^{i\gamma} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Omega | \Psi \rangle$. Dlatego można zaniedbać globalny czynnik fazowy w (2.3) i przedstawić wszystkie wartości kubitu za pomocą równania

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle,$$
 (2.4)

które jest zilustrowane na rysunku 2.1. Widać zatem, że dowolna wartość



Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie wartości kubitu na sferze Blocha.

kubitu jest reprezentowana przez odpowiedni punkt na powierzchni sfery o jednostkowym promieniu nazywanej często sferą Blocha. Położenie punktu na sferze Blocha jest w pełni określone przez parę kątów θ i ϕ , będących liczbami rzeczywistymi. Taka geometryczna interpretacja bardzo pomaga w opisie działania wielu operacji wykonywanych na kubicie. Jednakże jest ona ograniczona do wartości tylko i wyłącznie jednego kubitu. Nie istnieje jej uogólnienie ilustrujące stan dwóch czy większej liczby kwantowych bitów.

Kwantowy bit, w przeciwieństwie do klasycznego, może przybierać nieskończenie wiele wartości. Pomimo tego, mierząc jego stan możemy odczytać, podobnie jak w klasycznym bicie, jedynie dwie wartości $|0\rangle$ albo $|1\rangle$. Jeśli kubit znajduje się w superpozycji obu tych stanów, to pomiar wykonany na nim jest losowy i da w wyniku $|0\rangle$ z prawdopodobieństwem $|\alpha|^2$ albo $|1\rangle$ z prawdopodobieństwem $|\beta|^2$. Pełną wartość kubitu, to znaczy amplitudy α i β , można jedynie przybliżyć, wykonując bardzo wiele pomiarów na identycznie przygotowanych kubitach. Ta niemożność odczytania dowolnej wartości kubitu w jednym pomiarze może wydawać się wadą, jednak to właśnie ta cecha kubitu umożliwia zrównoleglenie obliczeń w algorytmach kwantowych. Ze względu na to, że można zmierzyć jedynie dwie wartości kubitu, superpozycja obu stanów musi oznaczać, że kubit znajduje się jednocześnie w stanie $|0\rangle$ i w stanie $|1\rangle$. Ta nielogiczna z klasycznego punktu widzenia własność pozwala na jednoczesne wykonywanie algorytmu dla różnych stanów wejściowych i jest ważną zaletą informatyki kwantowej.

2.2 Splątanie

Przykład kwantowego bitu pokazuje jak bardzo mechanika kwantowa różni się od klasycznej. W fizyce kwantowej nie da się już dokładnie przewidzieć tego, co zajdzie w określonych warunkach. Zamiast tego można jedynie policzyć prawdopodobieństwa otrzymania różnych wyników pomiaru. Ponadto w miejsce klasycznych wielkości opisujących dowolne obiekty mechanika kwantowa oferuje wektor stanu, którego pojedynczy pomiar nie jest w stanie ustalić. W dodatku taka obserwacja zmienia stan układu na taki, który jest zgodny z jej wynikiem. Wszystkie te cechy mechaniki kwantowej powodują, że własności obiektu nieobserwowanego pozostają nieustalone aż do czasu pomiaru, podczas gdy w mechanice klasycznej własności obiektu były zawsze ustalone i niezależne od obserwacji. Taki model rzeczywistości jest bardzo odległy od dawnego ideału rozumienia przyrody i dlatego mechanika kwantowa miała wśród fizyków wielu przeciwników. Najbardziej znanym przeciwnikiem mechaniki kwantowej był Albert Einstein. Pokazał on wraz z Borysem Podolskim i Nathanem Rosenem [2], że z postulatów mechaniki kwantowej wynika istnienie niezwykłego stanu dwóch obiektów. Dla pary kubitów ten stan można zapisać w następującej postaci:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2),$$
 (2.5)

gdzie indeks wskazuje na numer kubitu. Taka superpozycja dwóch stanów układu dwóch kubitów oznacza, że pierwszy kubit znajduje się w stanie $|0\rangle$ a drugi w stanie $|1\rangle$ i jednocześnie pierwszy kubit znajduje się w stanie $|1\rangle$ a drugi w stanie $|0\rangle$. Jest to tak samo klasycznie nielogiczne jak w przypadku superpozycji stanów pojedynczego kubitu, jednakże ta nieklasyczność

w przypadku superpozycji dwóch kubitów ma znacznie dalej idące konsekwencje. Otóż pomiar wykonany na jednym z kubitów natychmiast ustala stan drugiego, nawet jeśli są one oddalone od siebie o lata świetlne. Jeśli odczytalibyśmy stan $|0\rangle$ pierwszego z takiej pary kubitów znajdującego się na Ziemi, to w tej samej chwili drugi kubit znajdujacy się w układzie Alfa Centauri znalazłby się w stanie $|1\rangle$. Jeśli zaś wynikiem pomiaru na pierwszym kubicie byłby stan $|1\rangle$, to stan drugiego jednocześnie ustalony byłby na $|0\rangle$. Jest to niezwykle fascynujące zjawisko i mogłoby się wydawać, że może ono nawet posłużyć do przesyłania informacji z prędkością większą od światła, jednakże to nie jest możliwe. Aby przesłać na Alfa Centauri wartość $|1\rangle$, konieczne byłoby wymuszenie pomiaru wartości $|0\rangle$ na Ziemi, a jak napisano wcześniej wynik pomiaru jest losowy. Oba wyniki maja pieciedziesięcioprocentowe prawdopodobieństwo pojawienia się, więc taki pomiar przypomina rzut monetą. Pomimo tego, że taki stan nie może zostać wykorzystany do przekroczenia prędkości światła, to jest on i tak bardzo interesujący, ponieważ wyniki pomiarów są ze sobą niezwykle silnie związane. Einstein, Podolsky i Rosen uważali, że taka korelacja prowadząca do możliwości przewidzenia wyniku pomiaru na drugim, odległym obiekcie musi być związana z jakimś elementem rzeczywistości, istniejącym niezależnie od obserwacji. Ponieważ mechanika kwantowa pozwala na ustalenie wartości wszystkich zmiennych jedynie w wyniku obserwacji, to uznali oni mechanikę kwantową za niekompletną i przekonywali do opracowania teorii bliższej mechanice klasycznej. Artykuł Einsteina, Podolskiego i Rosena wywołał burzliwą dyskusję nad mechaniką kwantową, w której zabierały głos takie znane postaci, jak na przykład Schrödinger. Termin "splatanie" (niem. "Verschränkung"), będący obecnie najczęściej używaną nazwą tego zjawiska, został wprowadzony właśnie przez Schrödingera [27]. Ostatecznie większość fizyków nie zaakceptowała argumentacji Einsteina i jego współpracowników i nadal rozwijała mechanikę kwantową. Badania nad niezwykłymi własnościami stanu splatanego, odkrytymi przez Einsteina, Podolskiego i Rosena zostały podjęte przez Johna Bella [28], który udowodnił, że korelacja pomiędzy wynikami pomiarów na obu cząstkach splątanych tym niezwykłym stanem jest silniejsza, niż jakakolwiek korelacja w fizyce klasycznej. To ważne osiągnięcie musiało prędzej czy później doprowadzić do pomysłu wykorzystania tego szczególnego stanu w informatyce. Przy okazji trzeba wspomnieć, że stany splątane nazywane są również często stanami EPR albo stanami Bella na cześć pierwszych badaczy tych stanów. Natomiast jeśli chodzi o polski przekład niemieckiego terminu "Verschränkung" czy angielskiego terminu "entanglement", to oprócz słowa "splatanie" funkcjonuje również słowo "splecenie". W tej pracy przyjęty został najczęściej używany w polskiej literaturze termin "splątanie" [29–33].

2.2. SPLĄTANIE

Stany splątane nie są wcale wyjątkowe w mechanice kwantowej. Stan dwóch cząstek o współrzędnych x_1 i x_2 jest splątany wówczas, gdy nie można przedstawić go za pomocą iloczynu stanu pierwszej cząstki i stanu drugiej cząstki, jak to przedstawia następująca nierówność

$$|\Psi(x_1, x_2)\rangle \neq |\psi(x_1)\rangle \otimes |\psi(x_2)\rangle.$$
(2.6)

Takich stanów jest nieskończenie wiele. Wyjątkowe są natomiast stany niesplątane dwóch cząstek. Na przykład następujący stan dwóch kubitów

$$|\Psi(x_1, x_2)\rangle = \alpha |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \beta |1\rangle_1 |0\rangle_2, \qquad (2.7)$$

jest stanem splątanym dla wszystkich wartości zespolonych amplitud z wyjątkiem dwóch przypadków, gdy $\alpha = 0$ lub gdy $\beta = 0$. Jednak równie rzadkie są najciekawsze ze stanów splątanych, to znaczy stany maksymalnie splątane. W stanach maksymalnie splątanych moduły amplitud są sobie równe i w związku z tym prawdopodobieństwa otrzymania różnych wyników pomiaru są sobie równe. To właśnie dziwne własności stanów maksymalnie splątanych były rozpatrywane przez Einsteina, Rosena i Podolskiego. Stan (2.5) nie jest jedynym stanem maksymalnie splątanym dwóch kubitów. Co ciekawe, ze stanów maksymalnie splątanych można utworzyć ortonormalną bazę

$$\begin{aligned} |B_{0}^{+}\rangle &= (|0\rangle_{1}|0\rangle_{2} + |1\rangle_{1}|1\rangle_{2})/\sqrt{2}, \\ |B_{0}^{-}\rangle &= (|0\rangle_{1}|0\rangle_{2} - |1\rangle_{1}|1\rangle_{2})/\sqrt{2}, \\ |B_{1}^{+}\rangle &= (|0\rangle_{1}|1\rangle_{2} + |1\rangle_{1}|0\rangle_{2})/\sqrt{2}, \\ |B_{1}^{-}\rangle &= (|0\rangle_{1}|1\rangle_{2} - |1\rangle_{1}|0\rangle_{2})/\sqrt{2}, \end{aligned}$$
(2.8)

nazywaną bazą Bella.

Splątanie jest kluczowym środkiem w informatyce kwantowej, wykorzystywanym między innymi w teleportacji kwantowej, której poświęcona jest ta praca. Warto zatem przytoczyć przykłady wytwarzania stanów splątanych. Chyba najbardziej intuicyjny przykład można przedstawić dla przypadku, w którym kubity zrealizowane są za pomocą stanów Focka. Rozważmy zatem układ złożony z dwóch wnęk rezonansowych, płytki światłodzielącej i dwóch detektorów. Układ taki jest schematycznie przedstawiony na rysunku 2.2. Każda wnęka rezonansowa jest układem dwóch luster, ustawionych naprzeciw siebie tak, że fotony znajdujące się pomiędzy nimi i biegnące wzdłuż osi optycznej wspólnej dla obu luster są uwięzione. Zarówno wnęka W_A , jak i wnęka W_B mają jedno lustro częściowo przepuszczalne, umożliwiające ucieczkę uwięzionych fotonów i skierowujące te fotony na płytkę światłodzielącą P, która w połowie przypadków odbija padające na nią fotony, a w drugiej połowie przypadków przepuszcza je. Uciekające fotony ostatecznie



Rysunek 2.2: Układ wytwarzający splątane stany pól optycznych wnęk rezonansowych.

trafiają do detektora D_+ albo D_- . W celu wykorzystania takiego układu do utworzenia stanu splątanego obu wnęk, każdą z wnęk rezonansowych trzeba przygotować w stanie $|1\rangle$, to znaczy w każdej z nich zostanie uwięziony jeden foton. Jeśli w tak przygotowanym układzie detektor D_+ zasygnalizuje ucieczkę jednego fotonu, to może to oznaczać, że ten foton uciekł z wnęki W_A i przeszedł przez płytkę światłodzielącą. W takim przypadku wnęka rezonansowa W_A byłaby pusta, a we wnęce W_B nadal uwięziony byłby jeden foton, co można zapisać następująco: $|0\rangle_A|1\rangle_B.$ Jednakże ten sam wynik pomiaru odpowiada sytuacji, w której foton uciekł z wnęki W_B i odbił się od płytki światłodzielącej. Wówczas to we wnęce W_A pozostałby uwięziony, foton podczas gdy wnęka W_B byłaby pusta. Taką sytuację opisuje stan $|1\rangle_A |0\rangle_B$. Ponieważ nie jest możliwe rozstrzygnięcie skąd pochodzi foton, to trzeba wziąć pod uwagę oba przypadki. Feynman sformułował ogólną zasadę, która mówi, że jeśli jakieś zdarzenie może zajść na kilka różnych sposobów, to do opisu takiego zdarzenia niezbędna jest superpozycja uwzględniająca wszystkie te sposoby [34, 35]. Dlatego w rozpatrywanym tutaj przypadku stan układu po wykryciu ucieczki jednego fotonu opisany jest superpozycją

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B), \qquad (2.9)$$

która jak widać jest stanem splątanym obu wnęk.

Drugi przykład, reprezentujący nieco inny sposób wytwarzania stanów splątanych, można podać dla stanów polaryzacji fotonu. Wykorzystuje się w nim parametryczny dzielnik częstości, którym jest nieliniowy kryształ, taki jak na przykład kryształ beta boranu baru. Przez ten kryształ przepuszcza się wiazkę laserową o dużym nateżeniu. Wewnatrz tego kryształu każdy z fotonów z wiązki laserowej może zostać, z pewnym bardzo małym prawdopodobieństwem, zamieniony na dwa fotony o dwa razy mniejszej energii. Jeśli taka zamiana nastąpi, to takie dwa fotony biegna wzdłuż linii odchylonych o pewien kąt od kierunku rozchodzenia się promienia lasera. Wszystkie możliwe tory rozchodzenia się pary fotonów o niższej energii tworzą stożek, którego wierzchołek znajduje się wewnątrz kryształu w punkcie zamiany. Ze wzgledu na zasadę zachowania pedu, oba utworzone fotony biegna zawsze po liniach, znajdujących się po przeciwległych stronach tego stożka. W celu wytworzenia splątanego stanu polaryzacji dwóch fotonów wykorzystuje sie tak spreparowane kryształy nieliniowe, że współczynnik załamania dla światła spolaryzowanego pionowo jest nieco inny niż dla światła spolaryzowanego poziomo. Dla takich kryształów jeden z pary fotonów ma polaryzację pionową i porusza się po stożku nieco przesuniętym w dół względem osi wyznaczonej przez promień lasera, podczas gdy drugi jest spolaryzowany poziomo i porusza się po stożku nieco przesuniętym ku górze. Rysunek 2.3 przedstawia tory, którymi mogą poruszać się fotony należące do wytworzonej pary. Te dwa stożki odpowiadające polaryzacji pionowej i poziomej mają dwie



Rysunek 2.3: Schemat wytwarzania stanów splątanych za pomocą parametrycznego dzielnika częstości.

wspólne linie leżące po przeciwległych stronach promienia lasera. Jeśli w jednym z tych torów pojawi się jeden foton, to w drugim torze, zgodnie z zasadą zachowania pędu, musi pojawić się drugi foton. Ze względu na to, że te tory są wspólne dla obu polaryzacji możliwe są wówczas dwa stany. Foton o polaryzacji pionowej może przemieszczać się pierwszym torem, a wówczas foton spolaryzowany poziomo musi biec drugim torem. Jednakże tak samo prawdopodobny jest przypadek odwrotny, to znaczy, że foton spolaryzowany poziomo pojawi się na torze pierwszym zaś pionowo na torze drugim. Zgodnie z zasadą Feynmana musimy, przy opisie stanu układu, uwzględnić obie te możliwości, otrzymując stan splątany

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2 + |\leftrightarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2). \qquad (2.10)$$

Proces wytwarzania splątanej pary fotonów kończy się sukcesem tylko w części uruchomień urządzenia, ponieważ prawdopodobieństwo zamiany fotonu z wiązki laserowej na dwa fotony o energii o połowę mniejszej jest bardzo małe. Sprawę pogarsza to, że tylko ułamek utworzonych par trafia do modów wspólnych dla obu polaryzacji. Prawdopodobieństwo sukcesu można powiększać, zwiększając natężenie wiązki laserowej, jednak nigdy nie osiągnie ono jedności, ponieważ jednocześnie powiększa się wtedy prawdopodobieństwo wytworzenia dwóch splątanych par, co jest zdarzeniem niepożądanym. Pomimo tego, że metoda ta nie pozwala na generowanie splątanych par na żądanie, to jest ona często stosowana [3,4].

Na przykładzie splątanego stanu polaryzacji fotonów można przedstawić najbardziej niezwykła własność stanów splatanych, która badał John Bell [28]. Dotąd wymienione cechy splątanych par da się odtworzyć w klasycznym świecie. Wystarczy wyobrazić sobie, że dwie osoby spotykają się i wybierają przypadkowo po jednej zapieczętowanej urnie. W każdej z obu urn znajduje się jedna kula, jednak jedna z tych urn zawiera białą kulę, a druga czarną. Po wybraniu urn te dwie osoby znacznie oddalają się od siebie, zabierając ze sobą swoje urny. Jeśli w końcu jedna z nich zdecyduje się otworzyć swoją urnę i zbada jakiego koloru kulę posiada, to również będzie natychmiast wiedziała jakiego koloru kulę posiada druga osoba. A wiec można pomyśleć, że zależność pomiędzy wynikami pomiarów stanów cząstek splątanych nie jest niczym niezwykłym. W procesie wytwarzania splątanego stanu polaryzacji fotonów fotony sa odpowiednikami urn, a stan fotonów odpowiada kolorom kul. Podobnie jak urny, fotony w chwili wytworzenia stanu splątanego znajdują się w jednym miejscu, po czym oddalają się od siebie na znaczną odległość. Pomiar stanu fotonów za pomocą polaryzującej płytki światłodzielącej odpowiada otwarciu urny i sprawdzeniu koloru kuli. Polaryzująca płytka światłodzieląca zawsze przepuszcza fotony spolaryzowane w jednym kierunku, a odbija fotony spolaryzowane w kierunku prostopadłym do pierwszego. Wykorzystując ją z dwoma detektorami, można ustalić, czy badany foton miał polaryzację pionową czy poziomą. Taki pomiar przedstawia rysunek 2.4. Polaryzacja obu fotonów zawsze będzie inna. Jeśli foton pierwszy będzie miał polaryzację pionową, to drugi będzie spolaryzowany poziomo i na odwrót. Jednakże również kule po otwarciu urn zawsze mają różne kolory.



Rysunek 2.4: Schemat układu do badania korelacji wyników pomiarów wykonanych na splątanych fotonach. Splątana para fotonów powstaje w wyniku przejścia promienia lasera przez parametryczny dzielnik częstości (PDC). Polaryzacja każdego fotonu jest ustalana polaryzującą płytką światłodzielącą i detektorami.

Istnieje jednak olbrzymia różnica pomiędzy tą klasyczną i kwantową zależnością. Otóż jeśli eksperymentator zdecyduje się na pomiar stanów splątanych fotonów w innej bazie, co może zrobić przekręcając obie polaryzujące płytki światłodzielące tak, aby przepuszczały fotony spolaryzowane w pewnym kierunku ukośnym, a odbijały fotony spolaryzowane w kierunku prostopadłym do tego pierwszego, to nadal zawsze otrzymywać będzie przeciwne wyniki. Nie ma klasycznego przykładu, który przejawiałby podobne własności. Matematycznym potwierdzeniem silniejszej korelacji łaczącej cząstki splatane od jakiejkolwiek korelacji występującej w fizyce klasycznej są tak zwane nierówności Bella [28]. Wyprowadzone są one przy założeniu niezależnego od pomiaru istnienia fizycznych własności badanych cząstek oraz braku wpływu pomiaru stanu jednego układu na wynik pomiaru stanu drugiego układu. Pierwszy warunek jest nazywany warunkiem realności, a drugi warunkiem lokalności. Wykluczenie wzajemnego oddziaływania obu pomiarów jest możliwe dzięki temu, że prędkość dowolnego oddziaływania ograniczona jest do prędkości światła. Eksperymentalnie wykorzystano ten fakt do sprawdzenia, czy pomiary wykonane na splątanych fotonach spełniają nierówności Bella. Okazało się, że mechanika kwantowa nie spełnia nierówności Bella [36–41]. W konsekwencji oznacza to, że błędne jest co najmniej jedno z przyjętych założeń. Jak na razie nie ma pewności, które z tych założeń jest nieprawdziwe w świecie mechaniki kwantowej. Nie wiadomo czy przyroda nie spełnia warunku realności, czy warunku lokalności, czy też obu tych warunków. Jednakże z punktu widzenia informatyki kwantowej najważniejsze jest to, że splątanie jest nowym, niezwykłym i niedostępnym w fizyce klasycznej środkiem, który może zostać wykorzystany w bardzo wielu zagadnieniach.

2.3 Bramki kwantowe

Klasyczne komputery są w stanie rozwiązywać nawet najbardziej złożone zagadnienia, używając wyłącznie tak prostych obiektów jak bity, dzięki rozkładaniu skomplikowanych działań na podstawowe operacje logiczne. Każda podstawowa operacja logiczna reprezentowana jest przez bramkę zmieniającą odpowiednio stan bitu. Jedyną nietrywialną bramką działającą na pojedynczym bicie jest bramka zaprzeczenia NOT, która powoduje zmianę stanu bitu na przeciwny. Oczywiście komputery potrzebują znacznie więcej niż jednego bitu ażeby zrealizować nietrywialne zadania i dlatego używa się rejestrów złożonych z wielu uporządkowanych bitów. Dla wielu bitów jest już bardzo wiele możliwych nietrywialnych działań. Na szczęście wszystkie możliwe operacje wielobitowe można zrealizować, używając układów zbudowanych wyłącznie z bramek NAND. Z tego powodu bramkę NAND nazywa się uniwersalną. W informatyce kwantowej podstawowymi obiektami używanymi podczas dowolnych obliczeń są kubity. Można zatem oczekiwać, że potrzebne będą również kwantowe odpowiedniki bramek, które operowałyby na kwantowych bitach. Byłoby także niezwykle przydatne, gdyby istniała uniwersalna kwantowa bramka.

Stan kwantowego bitu może zostać zmieniony tylko w wyniku ewolucji bądź w trakcie pomiaru. Pomiar nie jest dobrym kandydatem na bramkę kwantową, ponieważ jego działanie na kubit znajdujący się w superpozycji $|0\rangle$ i $|1\rangle$ jest losowe. Dlatego najczęściej pomiar wykonuje się na końcu algorytmu w celu odczytania wyniku działania algorytmu kwantowego, gdy kubity zawierające wyniki znajdują się w stanach bazowych. Nie oznacza to jednak, że nie wykorzystuje się w ogóle pomiaru do zmiany stanu kwantowego. Przykładem takiego wykorzystania pomiaru jest chociażby teleportacja kwantowa. Jednakże nawet w teleportacji kwantowej niezbędne jest zastosowanie bramek, które w sposób pewny zmodyfikują stan końcowy niwelując losowość wprowadzoną przez pomiar. Tak więc bramki kwantowe można zrealizować jedynie poprzez użycie ewolucji układu. Ewolucję stanu układu izolowanego $|\Psi\rangle$ opisuje równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle,$$
 (2.11)

gdzie Hjest hamiltonianem,
a \hbar oznaczeniem ilorazu stałej Plancka i liczby

2.3. BRAMKI KWANTOWE

 2π . Formalne rozwiązanie tego równania ma następującą postać

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle. \qquad (2.12)$$

Na początkowy stan $|\Psi(0)\rangle$ działa operator ewolucji $\exp(-iHt/\hbar)$, w wyniku czego układ przechodzi do stanu $|\Psi(t)\rangle$. Jeżeli tym omawianym układem izolowanym byłby układ realizujący kubit, taki jak na przykład atom dwupoziomowy, to równanie (2.12) opisuje działanie poprawnej bramki kwantowej. Ponadto dla każdego czasu t otrzymuje się inną bramkę kwantową, z czego wynika istnienie nieskończonej ilości nietrywialnych bramek jednokubitowych.

Bardzo istotnym faktem jest liniowość operatora ewolucji, która prowadzi do liniowości bramek kwantowych. Własności operatorów liniowych pozwalają ustalić, jak bramka kwantowa działa na stan superpozycji. Otóż działanie dowolnej bramki kwantowej, którą oznaczać będzie symbol U, na stan $|\Psi(0)\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ można przedstawić następująco

$$U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha U|0\rangle + \beta U|1\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle.$$

Z liniowości bramek kwantowych wynika również możliwość ich przedstawienia w niezwykle wygodnej postaci macierzowej. Działanie bramki kwantowej na kubit znajdujący się w stanie superpozycji wygląda w tym formalizmie następująco

$$U\begin{bmatrix} \alpha\\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'\\ \beta' \end{bmatrix}, \text{gdzie} \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$

W powyższych równaniach amplitudy α' i β' są w ogólności nieznane, gdyż każda z bramek modyfikuje stan kubitu na inny sposób. Jednak muszą one spełniać warunek normalizacyjny $|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$, ponieważ suma prawdopodobieństw znalezienia się kubitu w obu możliwych stanach musi być równa jedności. Z tego wymogu wynika warunek, jaki musi spełniać macierz reprezentująca dowolną bramkę kwantową. Unormowanie stanu pozostaje niezmienione wyłącznie dla macierzy unitarnych, to znaczy takich, dla których macierzą odwrotną jest ich sprzężenie hermitowskie $UU^{\dagger} = I$. Jest to jednak jedyny warunek, jaki musi spełniać macierz opisująca prawidłową bramkę kwantową. Pierwszą konsekwencją tego, że każda macierz unitarna reprezentuje jakąś bramkę kwantową, jest nieskończona ilość bramek kwantowych działających na jednym kubicie. Drugą zaś, być może ważniejszą konsekwencją unitarności, jest fakt odwracalności działania bramek kwantowych. Każda macierz unitarna U ma macierz odwrotną U^{\dagger} , wykonującą odwrotne przekształcenie i będącą również macierzą unitarną, a więc taką, której odpowiada jakaś bramka kwantowa. Tak więc dla dowolnej bramki kwantowej istnieje taka bramka kwantowa, która odwraca jej działanie. Ta cecha odróżnia bramki kwantowe od klasycznych, ponieważ klasyczne bramki nie zachowują informacji o stanie początkowym, a więc nie można odwrócić ich działania.

Na podstawie powyższej dyskusji można przedstawić macierzowe reprezentacje najważniejszych kwantowych bramek jednokubitowych. Jednymi z nich są macierze Pauliego zdefiniowane poniżej

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bramka Xjest kwantową wersją klasycznej bramki NOT, co łatwo można sprawdzić, działając nią na dowolny stan kubitu

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \beta \\ \alpha \end{array}\right]$$

Jak widać, po zadziałaniu bramką X amplitudy zostają wymienione, a więc stan $|0\rangle$ został zmieniony w $|1\rangle$ a stan $|1\rangle$ w $|0\rangle$. Aby jeszcze wyraźniej widać było, że działanie to odpowiada zaprzeczeniu, wystarczy założyć szczególny przypadek, w którym na początku kubit byłby przygotowany w stanie $|0\rangle$, co odpowiada amplitudom $\alpha = 1$ i $\beta = 0$. Ciekawa jest też pewna własność, którą macierz X posiada. Otóż jest ona odwrotna do samej siebie, ponieważ spełniona jest równość XX = I. Jest to dodatkowym potwierdzeniem słuszności identyfikacji macierzy X jako kwantowej wersji bramki NOT, ponieważ w klasycznej logice podwójne zaprzeczenie jest tożsame z potwierdzeniem. Należy zwrócić uwagę na to, że choć w przypadku klasycznym taka własność dotyczy wyłącznie bramki NOT, to w informatyce kwantowej istnieje wiele bramek reprezentowanych przez macierze odwrotne do samych siebie. Na przykład łatwo można sprawdzić, że własność tę posiadają pozostałe macierze Pauliego.

Bramkę kwantową NOT bardzo łatwo jest zrealizować dla układu, w którym pojedynczy foton może poruszać się dwoma torami $|0\rangle$ lub $|1\rangle$. Wystarczy użyć dwóch płytek światłodzielących i dwóch zwierciadeł, jak przedstawiono na rysunku 2.5. Jeżeli stan początkowy będzie tak przygotowany, że foton na pewno będzie poruszać się po drodze $|0\rangle$, to po przejściu przez dwie płytki światłodzielące znajdziemy go z całą pewnością na drodze $|1''\rangle$. Jeśli zaś foton zostanie wysłany drogą $|1\rangle$, podczas gdy mod na drodze $|0\rangle$ będzie w stanie próżni fotonowej, to po przejściu przez dwie płytki światłodzielące i opuszczeniu układu foton zostanie znaleziony w modzie $|0''\rangle$. Skoro podwójne zastosowanie płytki światłodzielącej działa jak kwantowa bramka NOT, to w



Rysunek 2.5: Realizacja kwantowej bramki NOT opisywanej macierzą X.

takim razie można zadać pytanie: jaką bramkę realizuje pojedyncza płytka światłodzieląca? Otóż pojedyncza płytka światłodzieląca, przedstawiona na rysunku 2.6, odpowiada bramce $\sqrt{\text{NOT}}$, ponieważ $\sqrt{\text{NOT}}\sqrt{\text{NOT}} = \text{NOT}$ (z dokładnością do globalnego czynnika fazowego *i*, który można zaniedbać). Ta operacja nieznana klasycznej logice ma następującą postać macierzową



Rysunek 2.6: Realizacja kwantowej bramki $\sqrt{\text{NOT}}$.

$$\sqrt{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$
 (2.13)

Kolejnymi ważnymi bramkami kwantowymi są bramka Hadamarda oznaczona symbolem ${\cal H}$ oraz bramka fazowa oznaczona przezS

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Za pomocą pierwszej z nich można kubity przygotowane w stanach bazowych przeprowadzać w stan superpozycji obu stanów bazowych według wzorów

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$
(2.14)

Natomiast bramka S wprowadza dodatkowy czynnik fazowy i wyłącznie do amplitudy związanej ze stanem $|1\rangle$, nie zmieniając amplitudy stanu $|0\rangle$. Zresztą podobnie działa macierz Pauliego Z, wprowadzając czynnik fazowy -1. Ponieważ czynnik fazowy i związany jest z przesunięciem fazy o kąt $\pi/2$, a czynnik -1 z przesunięciem fazy o kąt dokładnie dwa razy większy, to podwójne zadziałanie bramką S równoważne jest zadziałaniu bramki Z, czyli $S^2 = Z$.

Związek z obrotami o różne kąty mają nie tylko bramki Z i S, lecz wszystkie bramki jednokubitowe. Działanie dowolnej jednokubitowej bramki kwantowej można przedstawić jako złożenie obrotów zmieniających położenie punktu, reprezentującego stan kubitu na sferze Blocha. Na przykład macierze Pauliego X, Y i Z są związane z obrotami na sferze Blocha wokół osi x, y i z, odpowiednio. Operatory dokonujące obrotu o kąt θ dookoła tych osi są dane wzorami: $R_x(\theta) = \exp(-i\theta X/2), R_y(\theta) = \exp(-i\theta Y/2)$ i $R_z(\theta) = \exp(-i\theta Z/2)$ i mają następującą postać macierzową

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}; \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}.$$

Można udowodnić [42], że każdą bramkę jednokubitową w pełni definiują trzy liczby rzeczywiste β , γ i δ będące kątami obrotów wokół osi z, y i z, odpowiednio. Przedstawienie jednokubitowej bramki za pomocą złożenia dwóch obrotów wokół osi z i jednego obrotu wokół osi y wygląda następująco

$$U = e^{i\alpha} \begin{bmatrix} e^{-i\beta/2} & 0\\ 0 & e^{i\beta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2}\\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0\\ 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix},$$

gdzie $\exp(i\alpha)$ jest globalnym czynnikiem fazowym, który można pominąć.

Najważniejszy wniosek, wypływający z powyższych rozważań jest taki, że pomimo istnienia nieskończonej ilości bramek jednokubitowych, każdą z nich da się zrealizować dowolnie dokładnie, dysponując pewnym skończonym zestawem bramek realizujących obroty wokół osi y i z. To bardzo upraszcza zagadnienie operowania stanem jednego kubitu. Pozostaje jednak problem nieskończonej ilości kwantowych bramek działających na wielu kubitach. Obliczenia kwantowe, analogicznie do klasycznych, wymagają działania na rejestrach złożonych z wielu kubitów. Kubity z kwantowego rejestru mogą być ze sobą splątane. Nie istnieje żaden odpowiednik sfery Blocha, opisujący stan wielu kubitów, a więc nie można uprościć problemu operacji wykonywanych na wielu kubitach w podobny sposób, jak to zrobiono dla jednego kubitu.

W takiej sytuacji bardzo by się przydała kwantowa wersja bramki uniwersalnej. Okazuje się, że taka bramka istnieje. Jest to bramka działająca na dwóch kubitach i nazywa się bramką sterowanego zaprzeczenia [43,44]. Jej symbolem jest CNOT i tworzy ona wraz z bramkami jednokubitowymi zestaw uniwersalny, z którego elementów można złożyć dowolna wielokubitowa operację. Pierwszy z kubitów, na które działa bramka CNOT, jest nazywany kubitem sterującym, a drugi sterowanym. Zmiana stanu kubitu sterowanego uzależniona jest od stanu kubitu sterującego. CNOT wykonuje na kubicie sterowanym operację negacji wtedy, gdy kubit sterujący znajduje się w stanie $|1\rangle$. W przeciwnym przypadku stan kubitu sterowanego nie zostaje zmieniony. Zatem działanie bramki CNOT można przedstawić następująco

$$CNOT|0\rangle_{1}|0\rangle_{2} = |0\rangle_{1}|0\rangle_{2},$$

$$CNOT|0\rangle_{1}|1\rangle_{2} = |0\rangle_{1}|1\rangle_{2},$$

$$CNOT|1\rangle_{1}|0\rangle_{2} = |1\rangle_{1}|1\rangle_{2},$$

$$CNOT|1\rangle_{1}|1\rangle_{2} = |1\rangle_{1}|0\rangle_{2}.$$
(2.15)

Powyższe równania prowadzą do bardzo ciekawego wniosku. Otóż bramka CNOT jest kwantowym uogólnieniem klasycznej bramki XOR. Użycie operacji dodawania modulo dwa do uproszczenia zapisu działania bramki CNOT danego równaniami (2.15) prowadzi do wyrażenia $\text{CNOT}|a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle$, opisującego właśnie klasyczną bramkę XOR.

Bramka CNOT operuje na dwóch kubitach, a więc operator jej odpowiadający działa w przestrzeni o dwa razy wiekszym wymiarze, niż operatory bramek jednokubitowych. Dlatego ażeby móc podać macierzową postać bramki CNOT, trzeba najpierw poznać macierzowa reprezentację wektorów bazowych czterowymiarowej przestrzeni Hilberta. W tym celu wykorzystać można iloczyn tensorowy macierzy zwany również iloczynem Kroneckera. Rezultatem iloczynu Kroneckera dwóch macierzy, macierzy A o m wierszach i n kolumnach i macierzy B o w wierszach i z kolumnach, jest duża macierz $A \otimes B$ mająca $m \cdot w$ wierszy i $n \cdot z$ kolumn. Matematycznie iloczyn Kroneckera dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad i \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1z} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{w1} & b_{w2} & \dots & b_{wz} \end{bmatrix}$$

definiuje się następująco

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$
 (2.16)

Stosując iloczyn Kroneckera łatwo można otrzymać reprezentacje macierzowe stanów bazowych iloczynu przestrzeni obu kubitów. Oznaczając te stany bazowe przez $|00\rangle \equiv |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$, $|01\rangle \equiv |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$, $|10\rangle \equiv |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$ i $|11\rangle \equiv |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$ dostaje się

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}; \qquad |01\rangle = \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix};$$
$$|10\rangle = \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}; \qquad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{bmatrix}.$$

Dysponując stanami bazowymi przestrzeni obu kubitów, można przedstawić postać macierzową bramki CNOT, która w tej bazie jest następująca

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na koniec warto prześledzić przykład ilustrujący zastosowanie uniwersalnego zestawu bramek kwantowych do realizacji bardzo ważnej w informatyce kwantowej operacji tworzenia stanu splątanego dwóch kubitów. W tym celu oprócz bramki CNOT potrzebna jest jeszcze jedna bramka jednokubitowa wprowadzająca kubit w stan superpozycji obu stanów bazowych. Może to być więc na przykład bramka Hadamarda. Na początku oba kubity znajdują się w swoich stanach bazowych. Dla uproszczenia rozważań wybrany zostanie stan bazowy $|00\rangle$. Procedura plątania zaczyna się od zadziałania bramką Hadamarda na pierwszy kubit, w wyniku czego otrzymuje się stan $(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)|0\rangle_2/\sqrt{2}$. Wyrażenie to można zapisać krócej, używając stanów bazowych czterowymiarowej przestrzeni Hilberta $(|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$. Ponieważ

2.4. ALGORYTMY KWANTOWE

kubit sterujący znajduje się w superpozycji, to bramka CNOT spowoduje zmianę stanu kubitu sterowanego tylko w jednym wyrazie, w rezultacie czego otrzymuje się stan splątany

$$CNOT(|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2} = (CNOT|00\rangle + CNOT|10\rangle)/\sqrt{2}$$
$$= (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}. \qquad (2.17)$$

Łatwo można sprawdzić, że stany splątane wytwarzane są również, gdy kubity przygotowane są na początku w innych stanach bazowych.

2.4 Algorytmy kwantowe

W klasycznej informatyce niezwykle ważnym pojęciem jest algorytm. Słowo "algorytm" pochodzi od imienia Al-Khwārizmi, które nosił autor słynnego perskiego podręcznika "Zasady redukcji i przenoszenia" napisanego w dziewiątym wieku naszej ery [45]. Imię to zmienione do formy "algorism" funkcjonowało w średniowieczu, oznaczając wykonywanie działań arytmetycznych przy użyciu liczb arabskich. Słowo to ulegało dalszym przeobrażeniom i zmianom znaczenia, aż do dzisiejszej formy "algorytm" i znaczenia zbliżonego do znaczenia słów: przepis, metoda, procedura. W informatyce pojęcie algorytmu jest bardziej konkretne i oznacza "skończony zbiór reguł wskazujący kolejność operacji przy rozwiązywaniu problemu pewnego typu" [45]. Rozwiązaniem problemu są dane wyjściowe, które algorytm wytwarza, przekształcając w kolejnych krokach dane wejściowe. Poprawny algorytm musi zatrzymać się po skończonej liczbie kroków i dać dobry wynik. Oprócz tego poprawny algorytm musi być dobrze zdefiniowany. Dzięki temu, że algorytmy cechuja się precyzyjnym zdefiniowaniem każdego wykonywanego kroku, to mogą być one realizowane mechanicznie. Idea realizowania algorytmów przez maszyny została sformalizowana w 1936 roku przez Alana Turinga [46] w matematycznym modelu takiej maszyny. Ten model został nazwany maszyna Turinga na cześć jego twórcy i stał się uznanym środkiem matematycznego opisu algorytmów. Matematyczne ujęcie problemu algorytmów pozwoliło na sformułowanie wielu bardzo ważnych twierdzeń. W pierwszym z nich Turing pokazał, że istnieje Uniwersalna Maszyna Turinga, która może symulować działanie dowolnej innej maszyny Turinga. Ponadto twierdził, że dowolny algorytm może zostać wykonany przez Uniwersalną Maszynę Turinga. Z tego twierdzenia wynika teza, nazwana teza Churcha-Turinga, o możliwości symulowania przez Uniwersalną Maszynę Turinga dowolnej innej abstrakcyjnej lub rzeczywistej maszyny wykonującej algorytmy [47]. Po modelu Turinga powstało wiele innych, jak na przykład funkcje rekurencyjne, sieci bramek logicznych lub maszyny RAM. Jednak zgodnie z tezą Churcha-Turinga wszystkie one mogą być emulowane przez Uniwersalną Maszynę Turinga. Później tezie Churcha-Turinga została nadana jeszcze mocniejsza forma, w której postuluje się możliwość efektywnego wykonywania przez maszynę Turinga dowolnego algorytmu, dającego się efektywnie wykonać na dowolnej innej maszynie. Efektywność rozwiazywania zagadnień odgrywa bardzo istotna rolę w informatyce, ponieważ związana jest bezpośrednio z czasem potrzebnym do ukończenia zadania. Miarą efektywności algorytmów jest funkcja zależna od rozmiaru danych wejściowych, zwracająca liczbę kroków, która algorytm wykona zanim zwróci dane wyjściowe. Dla bardzo wielu problemów nie ma efektywnie rozwiązujących je algorytmów wykonywanych przez maszynę Turinga. W tych nieefektywnych algorytmach zarówno liczba kroków, jak i czas obliczeń wzrastaja zwykle wykładniczo z rozmiarem danych wejściowych, dlatego wiele istotnych zagadnień nie da się rozwiązać za pomocą klasycznych maszyn. Konsekwencją tego było kilka prób znalezienia maszyn, będących bardziej efektywnymi od maszyny Turinga, istnienia których zaprzeczała teza Churcha-Turinga. Jednak próby te nie doprowadziły do wielkiego przełomu.

Przełom nastąpił w 1985 roku, gdy David Deutsch [22] zauważył, że dowolny abstrakcyjny model obliczeń, aby być przydatnym, musi mieć swoją fizyczną realizację, a skoro tak, to każdy taki matematyczny model podlega prawom fizyki. Maszyna Turinga działa zgodnie z prawami fizyki klasycznej, tymczasem fizycy dokonali wielkiego postępu, rozwijając fizykę kwantową. Deutsch zaproponował, aby zastosować w maszynach liczących nowe możliwości, jakie wynikały z fizyki kwantowej, a które były nieosiągalne w fizyce klasycznej. Klasyczna logika wyklucza możliwość znalezienia się bitu w stanie 0 i jednocześnie w stanie 1, podczas gdy dla kwantowych bitów jest to naturalny stan. Własność ta umożliwia jednoczesne wykonanie operacji dla wielu różnych danych wejściowych, co prowadzi do znacznego przyśpieszenia algorytmów. To tak zwane kwantowe zrównoleglenie najłatwiej będzie zaprezentować na uproszczonej wersji przykładu, przytoczonego przez samego Deutscha do udowodnienia wyższości komputerów kwantowych nad klasyczną maszyną opisywaną przez maszynę Turinga. Przedstawiony przez niego przykład reprezentuje zagadnienie, które można rozwiązać zarówno klasycznym algorytmem, jak i kwantowym algorytmem, to znaczy wykorzystujacym wspomnianą przewagę mechaniki kwantowej nad mechaniką klasyczną. Zagadnieniem tym jest badanie przebiegu zmienności nieznanej funkcji zależnej od stanu kubitu. Klasycznie do zbadania takiej funkcji niezbędne byłyby dwa kroki — sprawdzenie wartości zwracanej przez tę funkcję dla stanu $|0\rangle$, a następnie sprawdzenie wartości zwracanej dla stanu $|1\rangle$. Jednak kubit, od stanu którego zależy ta nieznana funkcja, może być przygotowany w superpozycji obu tych stanów, co prowadzi do jednoczesnego policzenia obu

2.4. ALGORYTMY KWANTOWE

zwracanych wartości. Aby kubit znalazł się w superpozycji, należy użyć odpowiedniej bramki kwantowej, takiej jak na przykład bramka Hadamarda. Badana funkcja musi być również reprezentowana przez odpowiednią bramkę kwantową. Tak więc algorytm kwantowy można przedstawić za pomocą sekwencji bramek kwantowych działających na kubitach. Taką sekwencję bramek łatwo jest przedstawić na rysunku w postaci schematu. Na rysunku 2.7



Rysunek 2.7: Kwantowe zrównoleglenie w algorytmie, wyznaczającym wartości nieznanej funkcji f.

przedstawiony jest schemat algorytmu, obliczającego jednocześnie wszystkie wartości zwracane przez nieznaną funkcję f. Badanym elementem jest bramka U_f działająca na dwa kubity według wzoru $U_f|a, b\rangle = |a, b \oplus f(a)\rangle$. Aby móc obliczyć wartość zwracaną przez funkcję f, należy ustalić stan drugiego kubitu o symbolu b na $|0\rangle$, ponieważ dodanie zera nie zmieni zwracanej wartości $0 \oplus f(a) = f(a)$. Z kolei stan pierwszego kubitu, który jest argumentem funkcji f, powinien być stanem superpozycji, ażeby wykorzystać kwantowe zrównoleglenie. W tym celu na kubit a znajdujący się początkowo w stanie $|0\rangle$ działa się bramką Hadamarda. Łatwo można obliczyć, że układ obu kubitów po zakończeniu tego algorytmu znajduje się w stanie

$$\frac{|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}}.$$
(2.18)

Zatem faktycznie udało się policzyć w jednym kroku obie zwracane przez funkcję f wartości. Widać jednak, że pojawił się niespodziewany problem — wyniki te znajdują się w stanie splątanym. Tak więc pomiar wykonany po tym algorytmie zwróci nam tylko jedną z dwóch wartości funkcji. Jednak potrafią to i klasyczne algorytmy. Co gorsza, wynik pomiaru jest losowy, to znaczy, że w połowie przypadków zwraca stan $|0, f(0)\rangle$, a drugiej połowie stan $|0, f(1)\rangle$. W wyniku tego dwukrotne uruchomienie algorytmu nie gwarantuje poznania obu wartości zwracanych przez f, podczas gdy dwukrotne uruchomienie klasycznego algorytmu daje pewność ich poznania. Można zatem odnieść wrażenie, że kwantowe zrównoleglenie nie daje żadnej przewagi nad klasycznymi algorytmami. Jednak David Deutsch udowodnił, że jest to mylne wrażenie, przynajmniej dla pewnej klasy zagadnień. Wpadł on na pomysł wyciągnięcia pewnej informacji o globalnej własności funkcji f ze stanu superpozycji (2.18) za pomocą wykorzystania innej podstawowej własności mechaniki kwantowej — interferencji. Interferencja prowadzi do wygaszenia się jednych amplitud, a wzmocnienia innych. Żeby wykorzystać zjawisko interferencji, Deutsch nieznacznie zmodyfikował przedstawiony wcześniej algorytm do postaci przedstawionej schematycznie na rysunku 2.8. Jak widać,



Rysunek 2.8: Kwantowe zrównoleglenie w algorytmie Deutscha.

kubit *b* został za pomocą bramki Hadamarda wprowadzony w stan superpozycji, podobnie jak kubit *a*. Jednak żeby niektóre z amplitud mogły się wygasić, potrzebna jest superpozycja $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ i dlatego na początku kubit *b* znajduje się w stanie $|1\rangle$. Bramka kwantowa U_f działa wówczas na stan będący superpozycją wszystkich stanów bazowych

$$\frac{|0\rangle_a + |1\rangle_a}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle_b - |1\rangle_b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle). \quad (2.19)$$

Działanie tej bramki na każdy ze stanów bazowych zależy od postaci funkcji f, jak przedstawiono poniżej

$$U_f|00\rangle = |0, 0 \oplus f(0)\rangle;$$
 $U_f|01\rangle = |0, 1 \oplus f(0)\rangle;$
 $U_f|10\rangle = |1, 0 \oplus f(1)\rangle;$ $U_f|11\rangle = |1, 1 \oplus f(1)\rangle.$

W celu przedstawienia stanu układu kubitów po zadziałaniu bramki U_f należałoby przyjąć konkretną postać funkcji f. Łatwo można sprawdzić, że z dokładnością do globalnego czynnika fazowego stan ten przyjmuje dwie możliwe formy. Pierwsza z nich odpowiada przypadkom, dla których funkcja jest

2.4. ALGORYTMY KWANTOWE

stała, to znaczy f(0) = f(1). Wówczas stan układu obu kubitów jest dany wzorem

$$\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) = \frac{|0\rangle_a + |1\rangle_a}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle_b - |1\rangle_b}{\sqrt{2}}.$$
 (2.20)

Druga możliwa postać stanu układu da się przedstawić następująco

$$\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = \frac{|0\rangle_a - |1\rangle_a}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle_b - |1\rangle_b}{\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

i odpowiada przypadkom, dla których funkcja przyjmuje różne wartości, to znaczy $f(0) \neq f(1)$. Widać zatem, że stan pierwszego kubitu po jednym uruchomieniu wskazuje na to, czy funkcja jest stała czy nie. To jest znaczący wynik, ponieważ klasyczny algorytm potrzebowałby dwóch wywołań funkcji f, żeby ustalić ten fakt. Jednak żeby wynik mógł być odczytany w sposób pewny, to stan pierwszego kubitu musi zostać sprowadzony do stanu bazowego. Dlatego na koniec algorytmu Deutscha działa się na kubit a bramką Hadamarda otrzymując

$$|0\rangle_a \otimes \frac{|0\rangle_b - |1\rangle_b}{\sqrt{2}} \qquad \text{dla } f(0) = f(1),$$

$$|1\rangle_a \otimes \frac{|0\rangle_b - |1\rangle_b}{\sqrt{2}} \qquad \text{dla } f(0) \neq f(1). \qquad (2.22)$$

A więc jeśli pomiar stanu pierwszego kubitu da w wyniku stan $|0\rangle$, to oznacza to stałość funkcji f, jeśli zaś $|1\rangle$, to funkcja zwraca różne wartości. Zależność stanu pierwszego kubitu od stałości funkcji można podsumować wyrażeniem określającym stan końcowy pierwszego kubitu $|f(0) \oplus f(1)\rangle$.

Algorytm Deutscha pozwala wykazać, że komputery kwantowe mogą działać szybciej, niż komputery klasyczne. Jednak dla tego przypadku efektywność nie różni się aż tak znacząco od efektywności klasycznych algorytmów. Ponadto zagadnienie, które algorytm Deutscha rozwiązuje, nie jest szczególnie istotne w informatyce. Dlatego pomysł zbudowania komputerów kwantowych potraktowano jedynie jako ciekawostkę. Sytuacja diametralnie się zmieniła, gdy Peter Shor [23] znalazł sposób na wykorzystanie kwantowego zrównoleglenia do rozwiązania bardzo ważnego zagadnienia, a mianowicie faktoryzacji liczb całkowitych. Jest to niezwykle ważne zagadnienie, ponieważ brak efektywnego klasycznego algorytmu rozkładającego liczby całkowite na czynniki pierwsze zapewniał bezpieczeństwo nowoczesnych szyfrów opartych na kodowaniu RSA. Najszybszy algorytm klasyczny ma wykładniczą złożoność obliczeniową. W praktyce oznacza to, że faktoryzacja dużych liczb jest zadaniem nierozwiązywalnym. Tymczasem algorytm Shora rozwiązuje ten problem w czasie wielomianowym. Oznacza to, że o ile nawet najszybszym klasycznym komputerom rozkład 400-cyfrowej liczby na czynniki pierwsze zająłby czas dłuższy, niż czas jaki upłynął od Wielkiego Wybuchu do chwili obecnej, to komputer kwantowy potrzebowałby zaledwie kilku lat.

Zainteresowanie informatyką kwantową wzrosło jeszcze bardziej, gdy Lovi Groverowi [24] udało się wykorzystać kwantowe zrównoleglenie w innym bardzo ważnym zagadnieniu, jakim jest szukanie danego elementu w nieposortowanym zbiorze. Przyśpieszenie, jakie uzyskuje się, korzystając z algorytmu Grovera, nie jest tak spektakularne jak w przypadku algorytmu Shora, jednak jest i tak znaczące bo kwadratowe. A jak istotny jest problem szukania danego elementu w nieposortowanym zbiorze wie każdy, kto korzysta z internetu.

2.5 Twierdzenie o nieklonowaniu

W klasycznej informatyce bardzo częstą operacją jest kopiowanie informacji. Skopiowanie bitu można wykonać bardzo prosto — wystarczy odczytać stan bitu źródłowego i ustawić odpowiednio stan bitu docelowego. Niestety tej techniki nie można zastosować do kopiowania stanów kwantowych bitów, ponieważ nie da się odczytać stanu kubitu znajdującego się w superpozycji stanów bazowych. Jednak w klasycznej informatyce można kopiowanie bitów wykonać również za pomocą innej techniki, a mianowicie zastosowania bramki XOR. Jeśli pierwszy z bitów znajduje się w stanie a, i jeśli drugi bit ustawiony zostanie w stanie 0, to w wyniku zadziałania bramki XOR dostaje się $a \oplus 0 = a$, czyli kopię pierwszego bitu. Czy można zatem skopiować dowolny stan kubitu, stosując odpowiednią bramkę kwantową? Okazuje się, że również i w ten sposób jest to niemożliwe. Otóż jeśli założy się istnienie kopiującej bramki kwantowej, to znaczy takiej, której działanie opisuje następujące wyrażenie $U|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, to dochodzi się do sprzeczności. Z jednej strony, stosując tę definicję do ogólnego stanu $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, dostajemy

$$U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle. \quad (2.23)$$

Jednak z drugiej strony z liniowości bramek kwantowych wynika

$$U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle = U(\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle) = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle. \quad (2.24)$$

Otrzymuje się sprzeczne wyniki, a zatem założenie istnienia kwantowej bramki kopiującej dowolne stany kwantowe jest błędne. Twierdzenie o niemożności kopiowania informacji kwantowej udowodnione zostało przez Williama Woottersa i Wojciecha Żurka [48,49] i nazywane jest twierdzeniem o nieklonowaniu. Można zatem zadać pytanie: jak jest możliwe kopiowanie klasycznej informacji, skoro nie da się skopiować informacji w mechanice kwantowej, będącej uogólnieniem klasycznej. Jednak te pozorna sprzeczność da się łatwo wyjaśnić. Z faktu niemożności skopiowania dowolnego stanu kwantowego nie wynika, że nie da się skopiować żadnego stanu. Okazuje się, że mechanika kwantowa nie zabrania kopiowania stanów bazowych. Łatwo można sprawdzić, że jeśli kopiowany kubit będzie w stanie $|0\rangle$, co odpowiada amplitudom $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, to sprzeczność pomiędzy równaniem (2.23), a równaniem (2.24) znika. Podobnie możliwe jest skopiowanie stanu $|1\rangle$. Bramka, która wykonuje takie kopiowanie, jest oczywiście kwantowe uogólnienie bramki XOR, czyli bramka CNOT. Jeśli bowiem wiemy, że kopiowany kubit znajduje się w jednym ze stanów bazowych, a kubit docelowy zostanie przygotowany w stanie $|0\rangle$, to zadziałanie tej bramki na układ obu kubitów opisuje wyrażenie $CNOT|00\rangle = |00\rangle$ albo wyrażenie $CNOT|10\rangle = |11\rangle$. W obu wyrażeniach stan pierwszego kubitu został skopiowany.

Pomimo istnienia twierdzenia o nieklonowaniu podejmowano różne próby skopiowania dowolnego stanu kwantowego. Na przykład rozważano wykorzystanie do tego celu operacji nieunitarnych. Wszystkie te próby zakończyły się niepowodzeniem, co nie dziwi, biorąc pod uwagę fakt, że taka możliwość doprowadziłaby do wielu paradoksów. Na przykład, gdyby kopiowanie stanów kwantowych było wykonalne, to kopie mogłyby posłużyć do dokładnego odczytu stanu kwantowego, czy też do naruszenia zasady nieoznaczoności Heisenberga. Podążając dalej tym tropem, można się zapytać, czy istnieje sposób przybliżonego kopiowania stanów kwantowych taki, aby te przybliżone kopie nie mogły doprowadzić do paradoksów. Okazuje się, że takie przybliżone kopiowanie jest możliwe i są nawet znane algorytmy kwantowe wykonujące takie kopiowanie [50–54].

2.6 Wierność

Z twierdzenia o nieklonowaniu wiadomo, że nie można dokładnie skopiować dowolnego stanu kwantowego. Wiadomo jednak, że wykonalne jest kopiowanie przybliżone dowolnego stanu kwantowego. Pojawia się zatem problem ustalenia, jak bardzo kopie mogą być zbliżone do stanu kopiowanego. Potrzebna jest zatem wielkość wyznaczająca to podobieństwo ilościowo. Taka wielkość potrzebna jest nie tylko w przypadku algorytmów przybliżonego kopiowania kwantowego, które z definicji nie mogą kopiować dokładnie. Stan podobny do oczekiwanego otrzymuje się w doświadczalnych realizacjach wszystkich algorytmów, ponieważ nie da się idealnie odizolować układu kwantowego, realizującego algorytm, od otoczenia. Wynikiem wpływu otoczenia są procesy tłumienia uniemożliwiające otrzymanie dokładnego wyniku.

Najpowszechniej używaną miarą odległości pomiędzy dwoma stanami kwantowymi jest wielkość zwana wiernością i przedstawiana za pomocą symbolu F. W przeciwieństwie do innej popularnej miary, nazywanej odległością w sensie śladu, wierność nie jest metryką. Wynika to z faktu, że wierność dla dwóch identycznych stanów przyjmuje wartość $F(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 1$, podczas gdy metryka musi być dla takiego przypadku równa zeru. Wierność również przyjmuje wartość równą zeru, jednak w przeciwieństwie do metryk dzieje się to dla stanów najbardziej "odległych" od siebie, to znaczy dla stanów ortogonalnych, dających się w pomiarze rozróżnić. Pomimo tego, że wierność nie jest metryką, to jest bardzo wygodną miarą odległości stanów kwantowych, która ma silne powiązania z metrycznymi miarami odległości. Na przykład, łatwo można za pomocą wierności zdefiniować metrykę.

Wierność wyznaczającą podobieństwo dwóch wektorów $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$, opisujących stan układu izolowanego, definiuje się następująco [55]

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2.$$
(2.25)

Z tej definicji widać, co wcześniej wspomniano, że wierność jest równa jedności dla dwóch identycznych stanów, mniejsza od jedności, gdy $|\phi\rangle$ jest niedokładną kopią $|\psi\rangle$ i przybiera najmniejszą wartość równą zeru dla stanów ortogonalnych. Można zatem zapisać wartości przyjmowane przez wierność za pomocą nierówności $0 \le F \le 1$. Z równania (2.25) widać również, że wierność jest funkcją symetryczną ze względu na swoje argumenty, czyli $F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = F(|\phi\rangle, |\psi\rangle)$. Taka własność jest oczywiście niezbędna, aby jakakolwiek wielkość mogła być uznana za przydatną miarę odległości.

Definicja (2.25) jest dobra dla stanów układów izolowanych. Jednak częste stosowanie wierności wynika głównie z niemożności idealnego odizolowania układu od otoczenia. Układ oddziałujący z otoczeniem nazywamy układem otwartym. Poprawny opis takich układów za pomocą równania Schrödingera i wektorów z przestrzeni Hilberta jest niemożliwy, ponieważ wektory te musiałyby opisywać również stan otoczenia. Niestety otoczenie jest tak dużym układem, że śledzenie wszystkich jego stopni swobody jest niewykonalne. Stan układów otwartych można jednak poprawnie opisać za pomocą macierzy gęstości, która jest zdefiniowana następująco

$$\rho \equiv \sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle \langle\psi_{i}|. \qquad (2.26)$$

W powyższej definicji p_i jest prawdopodobieństwem tego, że układ znajduje
się w stanie $|\psi_i\rangle$. Dla takiej reprezentacji stanów kwantowych wierność definiuje się za pomocą następującego wyrażenia [56,57]

$$F(\rho,\sigma) = \left(\operatorname{tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}})\right)^2.$$
(2.27)

W powyższej definicji tr oznacza sumę elementów diagonalnych macierzy. Na przykład dla macierzy A działanie tego operatora jest następujące tr $(A) = \sum_i A_{ii}$. Definicja (2.25) jest szczególnym przypadkiem definicji (2.27) odpowiadającą przypadkowi, gdy oba porównywane stany są stanami czystymi, to znaczy gdy $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ i $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$. Innym szczególnym przypadkiem wzoru (2.27) jest bardzo przydatny wzór [58]

$$F(|\psi\rangle, \sigma) = \langle \psi | \sigma | \psi \rangle, \qquad (2.28)$$

odpowiadający najczęściej występującej sytuacji, gdy oczekuje się, że układ znajdzie się w stanie czystym opisywanym przez wektor $|\psi\rangle$, podczas gdy w wyniku oddziaływania z otoczeniem znajduje się on w stanie opisywanym przez macierz gęstości σ .

Wierność, oprócz symetryczności, ma jeszcze kilka innych cech wartych wspomnienia. Ważną własnością wierności jest jej nie malenie, gdy na oba porównywane stany zadziała się kwantową operacją U, zachowującą ślad

$$F(U\rho U^{\dagger}, U\sigma U^{\dagger}) \ge F(\rho, \sigma) .$$
(2.29)

Sens tej cechy wierności ładnie ilustruje przykład zaczerpnięty z książki "Quantum Computation and Quantum Information" [42]. Część z opera-



Rysunek 2.9: Kiedy dostępna jest tylko część informacji, to obiekty stają się mniej rozróżnialne.

cji zachowujących ślad nie zmienia dostępnej informacji o stanie układu. Jednak inne zmniejszają wiedzę o układzie. Jeżeli po wykonaniu operacji U na oba stany nadal dostępna jest cała informacja, która była osiągalna przed wykonaniem tej operacji, to oba stany można tak samo dobrze rozróżnić $F(U\rho U^{\dagger}, U\sigma U^{\dagger}) = F(\rho, \sigma)$. Jeśli jednak wykonanie operacji wiąże się

z utratą części informacji o stanie układu, to oba stany staną się bardziej podobne do siebie. Podobnie jeśli zasłoni się częściowo dwa obrazki, to możliwość ich rozróżnienia się zmniejsza, jak widać na rysunku 2.9.

Kolejną ważną własnością wierności jest to, że jest ona wklęsłą funkcją obu swoich argumentów. Jeśli zatem zdefiniuje się macierze gęstości, będące superpozycjami innych macierzy gęstości $\rho' = \sum_i p_i \rho_i$ oraz $\sigma' = \sum_i q_i \sigma_i$, to wierność spełnia poniższą nierówność

$$F\left(\sum_{i} p_{i}\rho_{i}, \sum_{i} q_{i}\sigma_{i}\right) \geq \sum_{i} p_{i}q_{i}F(\rho_{i}, \sigma_{i}).$$

$$(2.30)$$

Jak wspomniano wcześniej, chociaż wierność nie jest metryką, to ma z nią silny związek. Otóż można w łatwy sposób, korzystając z wierności, zdefiniować miarę odległości dwóch stanów będącą metryką. Każdy stan kwantowy jest reprezentowany przez jednostkowej długości wektor należący do przestrzeni Hilberta. Z definicji (2.25) widać, że wierność jest kwadratem iloczynu skalarnego dwóch wektorów jednostkowych. Zatem wierność można przedstawić za pomocą wyrażenia $F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (\cos(K(|\psi\rangle, |\phi\rangle)))^2$, gdzie $K(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$ oznacza kąt pomiędzy wektorami $|\psi\rangle$ i $|\phi\rangle$. Powyższe rozumowanie pozostaje poprawne również dla stanów układów otwartych, ponieważ istnieje matematyczna technika, zwana oczyszczaniem (ang. purification), sprowadzania dowolnego stanu ρ do stanu czystego w odpowiednio większej przestrzeni. Korzystając z tej techniki, wierność da się przedstawić, zgodnie z twierdzeniem Uhlmanna [58], w postaci

$$F(\rho, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\phi\rangle} |\langle \psi | \phi \rangle|^2, \qquad (2.31)$$

gdzie maksymalizuje się po wszystkich oczyszczeniach $|\psi\rangle$ macierzy gęstości ρ i $|\phi\rangle$ macierzy gęstości σ . Można więc ogólnie zapisać za pomocą wierności wyrażenie na kąt pomiędzy dwoma wektorami odpowiadającymi stanom ρ i σ w następujący sposób

$$K(\rho,\sigma) \equiv \arccos\left(\sqrt{F(\rho,\sigma)}\right).$$
 (2.32)

Jest oczywiste, że kąt pomiędzy dwoma identycznymi wektorami będzie równy zeru: $K(\rho, \rho) = 0$. Jest też oczywiste, że kąt ten spełnia warunek symetryczności $K(\rho, \sigma) = K(\sigma, \rho)$. Tak więc jeśli jeszcze kąt pomiędzy wektorami stanów spełniałby nierówność trójkąta $K(\rho, \sigma) \leq K(\rho, \tau) + K(\tau, \sigma)$, to byłby metryką. Okazuje się, że spełnia nierówność trójkąta, co można zobaczyć na przykładzie stanów kubitu dających się przedstawić na sferze Blocha. Na koniec, dysponując już dobrą miarą odległości pomiędzy stanami, można podsumować ten i poprzedni podrozdział liczbową wartością ograniczającą dokładność kopii kwantowych — wierność przybliżonego kopiowania nie może przekroczyć 5/6 [59,60].

2.7 Entropia Shannona i von Neumanna

Klasyczna informatyka została zapoczątkowana przez Turinga nauką o obliczeniach. Jednak niemalże jednocześnie rozpoczęte zostały badania nad zrozumieniem komunikacji. Przełomu w tej dziedzinie dokonał Claude Shannon [61], publikując w 1948 roku dwa artykuły, które stały się fundamentem teorii informacji i komunikacji. Oba artykuły są poświęcone zagadnieniu przesyłania informacji przez kanał informacyjny. To przesyłanie niekoniecznie musi oznaczać proces przemieszczenia informacji z jednego miejsca do innego. Można też przemieszczać informację w czasie, czyli ją przechowywać. W tym drugim przypadku przez kanał informacyjny rozumie się układ, przechowujący informację taki jak na przykład płyta CD. Pierwszy z tych dwóch artykułów Shannona przedstawia teorię kodowania informacji w kanałach bez zakłóceń. Natomiast drugi artykuł poświęcony jest kodowaniu informacji w kanałach z zakłóceniami. W obu pracach niezmiernie ważny jest matematyczny model źródła informacji. Shannon przedstawił taki model, co było samo w sobie dużym osiągnięciem, ponieważ wówczas matematyczne przedstawienie źródła informacji było poważnym problemem.

Zródło informacji, w teoriach Shannona, przy każdym użyciu wytwarza jeden znak, kopiując losowo według ustalonego rozkładu prawdopodobieństwa jeden ze znaków, należących do pewnego *n*-elementowego zbioru znaków. Każde użycie źródła jest niezależne od poprzednich i zawsze wytwarza znak *j* z prawdopodobieństwem p_j , gdzie j = 1, 2, ..., n. Wynikiem działania takiego źródła informacji jest zatem ciąg elementów losowych. Oczywiście prawdziwe źródła informacji nie spełniają wszystkich założeń modelu Shannona. Przykładem realnego źródła może być tekst tej pracy. Faktycznie jest on złożony ze znaków — liter, pochodzących z konkretnego zbioru nazywanego alfabetem. Co więcej, pewne litery (na przykład litera "a") pojawiają się z większą częstością od innych, jednak zdecydowanie litery nie pojawiają się w tym tekście niezależnie od innych liter. Pomimo tego model Shannona jest wystarczająco dobrym przybliżeniem rzeczywistości, aby móc z jego pomocą przedstawić teorię kodowania, której owocem są kody kompresji pozwalające na zmniejszenie rozmiarów plików rzeczywistych tekstów.

Shannon w artykule o kodowaniu w kanałach bez szumu rozważał, jakie fizyczne środki są niezbędne, żeby móc zakodować w nich informację wytworzoną przez pewne źródło określone przez zestaw prawdopodobieństw p_j . Jeśli kanał używa do kodowania informacji klasycznych układów dwustanowych, to można to zagadnienie sformułować w następujący sposób: ile średnio bitów jest niezbędnych do zakodowania jednego znaku wytworzonego przez źródło charakteryzujące się rozkładem p_j ? Warto w tym miejscu zaznaczyć wyraźnie, że w tym zagadnieniu rozkład p_j wystarcza do opisu danego źródła. Same znaki j są jedynie etykietami i nie mają wpływu na liczbę bitów niezbędnych w kodowaniu. Warto również zauważyć, że bit okazuje się być jednostką ilości informacji.

Shannon wprowadził wielkość, nazwaną później na jego cześć *entropią* Shannona, która określa liczbę bitów niezbędnych do zakodowania jednego znaku wyemitowanego przez źródło. Entropia Shannona zdefiniowana jest wyrażeniem

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv -\sum_j p_j \log p_j, \qquad (2.33)$$

gdzie dla systemu dwójkowego logarytm ma podstawę 2. Powyższy wzór może budzić wątpliwości w przypadku, gdy któreś z prawdopodobieństw jest równe zeru, ponieważ logarytm nie jest określony dla zera. Dlatego obliczając entropię Shannona zakłada się że $0 \log 0 \equiv 0$. Bynajmniej nie jest to założenie bezpodstawne. Zdarzenie niemożliwe nie może przecież mieć wpływu na liczbę bitów niezbędnych do zakodowania występujących znaków. Poza tym wiadomo że $\lim_{x\to 0} x \log x = 0$.

Aby zrozumieć skąd wynika powiązanie wyrażenia (2.33) ze średnią liczbą bitów niezbędnych do zakodowania jednego znaku, dobrze jest przeanalizować prosty przypadek źródła produkującego dwa znaki. Niech źródło wytwarza cyfrę 0 z prawdopodobieństwem p oraz cyfrę 1 z prawdopodobieństwem 1-p. Pamiętając o tym, że produkcja każdego znaku jest zdarzeniem niezależnym, można przedstawić prawdopodobieństwo otrzymania pewnego ciągu losowego X_1, X_2, \ldots, X_m za pomocą iloczynu prawdopodobieństw otrzymania poszczególnych znaków

$$p(X_1, X_2, \dots, X_m) = p(X_1)p(X_2)\cdots p(X_m).$$
 (2.34)

Z prawa wielkich liczb wiadomo, że dla dużych m częstości występowania zer i jedynek będą zbliżone do odpowiadających im prawdopodobieństw. Dlatego można wnioskować, że w tym ciągu losowym będzie mp zer i m(1-p) jedynek. Zatem wzór (2.34) da się przybliżyć wyrażeniem

$$p(X_1, X_2, \dots, X_m) \approx p^{mp} (1-p)^{m(1-p)},$$
 (2.35)

które po zlogarytmowaniu daje

$$\log p(X_1, X_2, \dots, X_m) \approx mp \log p + m(1-p) \log(1-p) = -mS. \quad (2.36)$$

A zatem prawdopodobieństwo otrzymania pewnego ciągu losowego X_1, \ldots, X_m dla dużych *m* jest równe $p(X_1, X_2, \ldots, X_m) \approx 2^{-mS}$. Ponieważ suma prawdopodobieństw musi być równa jedności, to można wnioskować, że takich sekwencji jest około 2^{mS} , dających się zapisać za pomocą *mS* bitów. Zatem staje się teraz oczywiste, że entropia Shannona wyznacza średnią liczbę bitów niezbędną do zakodowania jednego znaku.

Przedstawiony teraz zostanie przykład niezwykłej użyteczności entropii Shannona. Na użytek tego przykładu zostanie przyjęty model źródła emitującego liczby 0, 1, 2 i 3. W ogólnym przypadku do zapisu każdego znaku potrzeba przynajmniej dwóch bitów. Liczbę 0 w systemie dwójkowym zapisuje się 00, liczbę 1 jako 01, liczbę 2 jako 10, a 3 jako 11. Jeśli jednak tym czterem liczbom odpowiadają prawdopodobieństwa wyemitowania 1/2, 1/4, 1/8 i 1/8, to okazuje się, że średnia liczba bitów niezbędnych do zakodowania jednej liczby jest mniejsza niż dwa. Łatwo można policzyć, że entropia Shannona jest równa dla tego przypadku 7/4. Zatem w kodowaniu każdego znaku za pomocą dwóch bitów ma się do czynienia z pewną nadmiarowością, którą da się usunać. Jakie zatem należy zastosować kodowanie, aby usunać te nadmiarowość? Otóż wystarczy najczęściej występujące znaki kodować za pomocą mniejszej liczby bitów niż znaki występujące rzadziej. Można na przykład zastosować kodowanie $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 01, 2 \rightarrow 001$ i $3 \rightarrow 000$. Wtedy średnio na zakodowanie jednego znaku wystarczy $1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/8 + 3 \cdot 1/8 = 7/4$ bitów. A więc dokładnie tyle ile wynika z entropii Shannona. Niestety entropia Shannona wyznacza dolną granicę kodowania. Kompresja większa niż przewidziana przez entropię Shannona oznacza utratę części informacji.

Entropii Shannona można nadać jeszcze inną ważną interpretację, opisującą stan wiedzy o znaku wytwarzanym przez źródło, zanim ten znak zostanie odczytany. Entropia Shannona okazuje się być doskonałą ilościową miarą średniej nieoznaczoności znaku przed jego poznaniem, ponieważ jest równa zeru dla źródła emitującego wyłącznie jeden konkretny znak, a przyjmuje wartość maksymalną dla rozkładu jednostajnego, gdy emisja każdego znaku jest tak samo prawdopodobna. O ile w klasycznej informatyce ta interpretacja nie jest kluczowa, o tyle w kwantowej informatyce taka wielkość byłaby niezwykle użyteczna ze względu na brak pełnego dostępu do informacji kwantowej. Jest oczywiste, że kwantowej informatyce potrzebny jest odpowiednik tak użytecznej teorii. Na szczęście istnieje kwantowy odpowiednik entropii Shannona nazywany entropią von Neumanna

$$S(\rho) \equiv -\mathrm{tr}(\rho \log \rho), \qquad (2.37)$$

gdzie podstawa logarytmu jest równa dwa, tak jak w przypadku entropii Shannona [62]. Bardziej użyteczny w obliczeniach wzór otrzymuje się po przekształceniu (2.37) do postaci

$$S(\rho) \equiv -\sum_{i} \lambda_i \log \lambda_i , \qquad (2.38)$$

gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy ρ . Entropia von Neumanna wyznacza średnią liczbę kubitów niezbędną do zakodowania informacji kwantowej zawartej w stanie ρ . Jest też miarą nieoznaczoności tego stanu.

Dysponując wzorem (2.38) na entropię von Neumanna, można zbadać możliwości kodowania informacji w kwantowych bitach i odpowiedzieć na kilka interesujących pytań. Pierwsze z nich wynika z faktu, że kwantowe bity są uogólnieniem klasycznych bitów. Pojawia się zatem pytanie czy możliwa jest za pomoca kubitów kompresja klasycznej informacji wieksza, niż ta przewidziana przez entropię Shannona. Okazuje się, że zakodowanie klasycznej informacji w kwantowym kanale wymaga dokładnie takiej samej liczby kubitów co kodowanie w klasycznym kanale bitów. Większa kompresja nie jest niestety możliwa. Aby się o tym przekonać, wystarczy przeanalizować przykład źródła kwantowego wytwarzającego stany bazowe, które są rozróżnialne, a więc odpowiadają klasycznej informacji. Niech to źródło emituje stan $|0\rangle$ z prawdopodobieństwem p i stan $|1\rangle$ z prawdopodobieństwem 1 - p. Wówczas wyemitowany stan dany jest diagonalną macierzą gęstości $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$, co prowadzi do wartości własnych $\lambda_1 = p$ oraz $\lambda_2 = 1 - p$. Po podstawieniu tych wartości własnych do wzoru (2.38) widać, że entropia von Neumanna jest dla stanów ortogonalnych dokładnie równa entropii Shannona.

Oczywiście następne pytanie jakie się pojawia jest następujące: czy możliwa jest kompresja stanów nieortogonalnych? Odpowiedź na to pytanie jest twierdzaca. Za pomoca unitarnych operacji można skompresować informacje kwantową zawartą w stanie ρ . Co więcej, w tym przypadku liczba kubitów niezbędna do zakodowania stanu wyprodukowanego przez kwantowe źródło jest mniejsza, niż by to wynikało z entropii Shannona. Jeśli bowiem produkowane są stany $|0\rangle$ z prawdopodobieństwem p i $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ z prawdopodobieństwem 1 - p to entropia Shannona uwzględnia jedynie rozkład prawdopodobieństwa, nie biorąc po uwagę produkowanych stanów. Widać jednak na tym przykładzie, że same produkowane stany cechuja się pewna nadmiarowością, ponieważ mają wspólną składową w kierunku $|0\rangle$. Entropia von Neumanna uwzględnia ten fakt i dlatego dla stanów nieortogonalnych jest ona mniejsza od entropii Shannona. Niestety kompresja stanów nieortogonalnych wprowadza pewne małe zniekształcenie, które powoduje że informacja kwantowa po procesie kompresji i dekompresji nieco różni się od informacji źródłowej. Możliwe jest jednak takie zaprojektowanie kodów kompresji, aby wierność była bliska jedności.

2.8. NADMIAROWE KODOWANIE

Ostatnim przykładem są stany czyste, których macierz gęstości daje się przedstawić za pomocą jednego wektora stanu $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Oczywiście taki stan odpowiada źródłu emitującemu zawsze jedynie stan $|\psi\rangle$ i dlatego nieoznaczoność tego stanu jest zerowa. Łatwo można sprawdzić, że entropia von Neumanna jest dla stanów czystych zawsze równa zeru, jeśli użyje się faktu, że zawsze istnieje taka baza, w której $|\psi\rangle$ jest wektorem bazowym oraz faktu, że transformacje bazowe wewnątrz śladu nie zmieniają wartości $S(\rho)$. Jednak entropia Shannona nie zawsze jest równa zeru dla stanów czystych, ponieważ zależy ona od wyboru bazy.

Przedstawione przykłady można zatem podsumować następującą nierówności
ą $S_{\rm vonNeumann} \leq S_{\rm Shannon}.$

2.8 Nadmiarowe kodowanie

Nadmiarowość w teorii kodowania w kanałach bez zakłóceń jest niepożądana, ponieważ niepotrzebnie zwiększa ilość używanych zasobów jakimi są bity albo kubity. Jednakże w kodowaniu w kanałach z zakłóceniami nadmiarowość jest niezbędna do prawidłowego przesłania informacji przez kanał informacyjny. Pomysł ochrony przed zakłóceniami polega na takim powieleniu wysyłanej informacji, aby móc odtworzyć oryginalną informację nawet wtedy, gdy częściowo zostanie uszkodzona. Pomysł ten wcale nie jest nowy. Wszystkie naturalne języki, którymi posługują się ludzie do komunikowania się ze sobą, kodują informację nadmiarowo. Nawet usunięcie z tekstu wszystkich samogłosek nie uniemożliwiłoby odczytania tekstu. Shannon w swoim artykule [61] wykazał, że nadmiarowość może zostać wykorzystana w kodach korekcji błędów chroniących przesyłane informacje. Jego teoria wyznacza również górną granicę ochrony zapewnianej przez takie kody. Niestety teoria ta nie dostarcza kodów korekcji, osiągających tę granicę. Do dzisiejszego dnia wymyślane są nowe algorytmy kodujące coraz bliższe tej granicy.

Zanim przedstawiony zostanie najprostszy rodzaj kodu korekcji błędów, niezbędne jest przyjęcie matematycznego modelu zakłóceń. Do modelowania zakłóceń obecnych w kanałach korzysta się z rachunku prawdopodobieństwa. Każdy bit przechodzący przez taki kanał może przejść nienaruszony albo zostać zamieniony. Niepomyślny przypadek wystąpienia błędu zdarza się z prawdopodobieństwem p. Szansa, że bit przejdzie niezmieniony opisana jest prawdopodobieństwem 1 - p. Wystąpienie błędu skutkuje niepożądanym zadziałaniem bramki NOT na przesyłany bit.

W najprostszy sposób przesyłany bit można zabezpieczyć przed takim mechanizmem zakłóceń, wykonując jego dwie kopie według wzoru $0 \rightarrow 000$ lub $1 \rightarrow 111$. Jeśli w wyniku zakłóceń jeden z bitów zostanie zmieniony, to

nadal możliwe jest poprawne zinterpretowanie przesyłanego bitu dzięki temu, że większość bitów przeszła nienaruszona. Takie "głosowanie większością" zawodzi, gdy dwa lub trzy bity zostaną zmienione. Jednak prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest dla p < 1/2 mniejsze niż prawdopodobieństwo wystąpienia błędu przy przesyłaniu bitu bez zabezpieczenia. Łatwo można policzyć, że prawdopodobieństwo zamiany dwóch lub trzech bitów jest równe $3p^2 - 2p^3$. Ten kod korekcji błędów nazywa się kodem powtórek. Oczywiście jest wiele znacznie lepszych kodów korekcji błędów, jednak wszystkie kodują informację nadmiarowo.

W klasycznej informatyce kody korekcji błędów są bardzo często stosowane. Jednak jeszcze bardziej potrzebna jest korekcja błędów w informatyce kwantowej, ponieważ w przeciwieństwie do bitów, realizowanych przez duże zespoły wielu cząstek, kubity kodowane są w stanach pojedynczych cząstek. Dlatego otoczenie ma zdecydowanie silniejszy wpływ na stan kubitów niż na stan bitów. Na początku zrealizowanie kwantowych kodów korekcji błędów wydawało się być niemożliwe ze względu na twierdzenie o nieklonowaniu. Jednak w 1995 roku Peter Shor [63] pokazał, że nadmiarowe kodowanie oraz kwantową korekcję błędów da się wykonać, wykorzystując stany splątane. Równolegle do odkrycia takiej możliwości doszedł Steane [64]

Idea kwantowych algorytmów realizujących korekcję błędów zostanie zaprezentowana na bardzo prostym przykładzie, który w dodatku podobny jest do wcześniej zaprezentowanego klasycznego przykładu. Model zakłóceń w kanale kwantowym jest identyczny z modelem klasycznym z tą jednak różnicą, że w przypadku wystąpienia zakłócenia na przesyłany kubit działa kwantowa bramka NOT. Niech kubit, którego stan chcemy przesłać, znajduje się w stanie $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Podobnie do kodu powtórek potrzebne są tutaj dwa zapasowe kubity. Oba na poczatku znajdują się w stanie $|0\rangle$. Tak więc stan całego układu na początku jest następujący: $\alpha |000\rangle + \beta |100\rangle$. Cały proces kodowania sprowadza się do zadziałania dwoma bramkami CNOT. Pierwszą z nich działamy na dwa pierwsze kubity, a kubitem sterującym jest pierwszy z nich. Po tej operacji układ opisywany jest stanem $\alpha |000\rangle + \beta |110\rangle$. Druga bramka CNOT działa na pierwszy i trzeci kubit. Znowu pierwszy kubit jest kubitem sterującym. Ostatecznie dostaje się więc stan $\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle$. Teraz tak splatane kubity wysyła się kolejno kwantowym kanałem. Na każdy z nich może zadziałać, z prawdopodobieństwem p, kwantowa bramka NOT wskutek działania zakłóceń. Analogicznie do klasycznego kodu korekcyjnego, przesyłanie zakończone będzie sukcesem, jeśli zakłócenie zdarzy się co najwyżej w jednym przypadku. Wówczas układ trzech kubitów znajduje się w jednym z czterech stanów: $\alpha |000\rangle + \beta |111\rangle$, $\alpha |100\rangle + \beta |011\rangle$, $\alpha |010\rangle + \beta |101\rangle$ lub $\alpha |001\rangle + \beta |110\rangle$. Jak łatwo zauważyć wszystkie te stany są do siebie ortogonalne, można więc wykonać pomiar w takiej bazie, aby rozróżnić każdy

z tych stanów. Interesującą część takiej bazy stanowią wektory $|000\rangle + |111\rangle$, $|100\rangle + |011\rangle$, $|010\rangle + |101\rangle$ i $|001\rangle + |110\rangle$. Ponieważ wynik pomiaru w takiej bazie nie powie niczego o amplitudach α i β , to pomiar taki nie zmieni stanu układu. Po pomiarze będzie jednak wiadomo, czy nastąpił błąd, a jeżeli tak, to będzie wiadomo, na który kubit należy zadziałać kwantową bramką NOT, aby powrócić do oryginalnego stanu. Prawdopodobieństwo niepowodzenia w tym kwantowym kodzie korekcji jest oczywiście równe prawdopodobieństwu niepowodzenia w klasycznym przykładzie to znaczy $3p^2 - 2p^3$.

2.9 Teleportacja kwantowa

Wiadomo, że przesyłanie klasycznej informacji na odległość jest bardzo ważne. Można zatem przypuszczać, że podobnie ważne będzie dla komputerów kwantowych przesyłanie kwantowej informacji. Jednak przesłanie pojedynczego stanu kwantowego na dużą odległość, unikając przy tym oddziaływań z otoczeniem, jest bardzo trudne. W klasycznych kanałach informację klasyczną wzmacnia się za każdym razem, gdy przebędzie ona określoną drogę. Technika ta nie może być jednak zastosowana w kanałach kwantowych ze względu na twierdzenie o nieklonowaniu. Bardzo szybko z odległością rośnie prawdopodobieństwo wystąpienia zakłócenia, co w końcu uniemożliwia przesłanie kwantowej informacji, nawet przy użyciu kwantowych kodów korekcji błędów. Ostatnio wielkim osiągnięciem było przesłanie światłowodem informacji kwantowej na odległość 122 km [65]. Sto dwadzieścia dwa kilometry wydaja się być dużą odległością, ale w porównaniu do działających klasycznych kanałów jest to bardzo mało. Niewatpliwie najlepszym rozwiązaniem problemu przesyłania informacji kwantowej na duże odległości byłoby użycie do tego celu klasycznych kanałów informacyjnych. Pojawia się zatem pytanie czy prawa fizyki dopuszczają taką możliwość. Dyskusja nad tym zagadnieniem jest starsza niż informatyka kwantowa. Powodem jej rozpoczecia była fantastyka naukowa, a w szczególności serial "Star Trek". Gene Roddenberry twórca tego serialu, chcac zaoszczędzić na symulacjach lądowań na obcych planetach, klasyczne podróże zastąpił teleportacją. Podróż taka miała składać się z trzech etapów. W pierwszym etapie przemieszczany obiekt podlegał pomiarowi, którego wynikiem była informacja w pełni opisująca ten obiekt. W drugim etapie informacja ta przesyłana była do miejsca docelowego. W ostatnim, trzecim etapie obiekt zostawał odtworzony na podstawie przesłanej informacji. Atomy niezbędne do procesu odtworzenia mogły być przesłane wraz z informacja, badź pobierane na miejscu z otoczenia.

Jest oczywiste, że zasada nieoznaczoności Heisenberga uniemożliwia wykonanie tak rozumianej teleportacji. Niemożliwe jest bowiem dokładne poznanie stanu układu kwantowego. Z tego powodu długo uważano, że teleportacja pozostanie jedynie fikcją. Jednak w 1993 roku Charles Bennett wraz z innymi badaczami [1] udowodnili, że trudność wynikającą z zasady nieoznaczoności Heisenberga można obejść, wykorzystując niezwykłe cechy splątania kwantowego. Technika zaproponowana w artykule [1] ma małe szanse być zastosowaną do teleportacji przedmiotów, ale wspaniale nadaje się do przesyłania kubitów za pomocą splątanych par i klasycznego kanału informacyjnego. Teleportacja jest zatem na razie traktowana wyłącznie jako środek umożliwiający komunikację kwantową.

Zanim zostanie przedstawiony sposób teleportowania stanów kubitów należy zwrócić uwagę na to, że każda klasyczna komunikacja wymaga od nadawcy i odbiorcy ustalenia zbioru reguł używanych przy wymianie informacji, które określają format komunikatów oraz działania wymagane dla każdego komunikatu. Taki zbiór reguł musi być nawet ustalany przy wizytach zagranicznych głów państw. Dyplomaci nazywają go protokołem. Ponieważ, jak już wcześniej wspomniano, teleportacja służy do utworzenia kwantowego kanału informacyjnego, to również wymaga ustalenia takiego zbioru reguł. Protokół teleportacji Charlesa Bennetta i innych składa się z dwóch etapów: etapu pomiaru i etapu odtwarzania. Protokół ten jest schematycznie przedstawiony na rysunku 2.10.

Aby teleportacja przy użyciu klasycznego kanału informacyjnego była moż-



Rysunek 2.10: Protokół teleportacji Benneta. Pomiar stanu Bella (PSB) wykonany na cząstkach 1 i 2 oraz przesłanie wyniku tego pomiaru klasycznym kanałem informacyjnym (np. pocztą) pozwala na odtworzenie stanu cząstki 1 w odległej cząstce 3 przy wykorzystaniu operacji unitarnych U.

liwa to nadawca i odbiorca muszą posiadać po jednym kubicie należącym do splątanej pary. Ta splątana para mogła zostać wytworzona na przykład pod-

2.9. TELEPORTACJA KWANTOWA

czas ich dawnego spotkania, po którym każdy z nich odjechał zabierając po jednej cząstce należącej do splątanej pary. Niech ta splątana para znajduje się w stanie Bella $|B_0^+\rangle = (|0\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_2|1\rangle_3)/\sqrt{2}$. Jeśli stan kubitu, który nadawca chce teleportować do odbiorcy zapisze się w postaci $|\phi\rangle = \alpha |0\rangle_1 + \beta |1\rangle_1$ to stan całego układu wszystkich trzech kubitów jest następujący

$$\Psi \rangle = |\phi\rangle \otimes |B_0^+\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3) + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + |1\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3).$$
(2.39)

W pierwszym etapie protokołu teleportacji nadawca wykonuje połączony pomiar stanu obu kubitów należących do niego, to znaczy kubitu o indeksie 1, zawierającego informację kwantową oraz kubitu o indeksie 2, należącego do splątanej pary. Pomiar ten nadawca wykonuje w bazie Bella, dlatego warto wyrazić w tej bazie stany obu tych kubitów. Korzystając z definicji (2.8), łatwo można sprawdzić następujące tożsamości

$$\begin{aligned} |0\rangle|0\rangle &= (|B_0^+\rangle + |B_0^-\rangle)/\sqrt{2} \,, \qquad |0\rangle|1\rangle = (|B_1^+\rangle + |B_1^-\rangle)/\sqrt{2} \,, \\ |1\rangle|0\rangle &= (|B_1^+\rangle - |B_1^-\rangle)/\sqrt{2} \,, \qquad |1\rangle|1\rangle = (|B_0^+\rangle - |B_0^-\rangle)/\sqrt{2} \,. \quad (2.40) \end{aligned}$$

Stosując wyrażenia (2.40), po prostych przekształceniach otrzymuje się następującą postać równania (2.39), opisującą stan całego układu

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \Big[|B_0^+\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |B_0^-\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)$$

+
$$|B_1^+\rangle_{12} \otimes (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) + |B_1^-\rangle_{12} \otimes (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) \Big].$$
(2.41)

Jak widać, taki pomiar nie określa stanu każdego z tych dwóch kubitów z osobna, więc nie prowadzi do zniszczenia informacji kwantowej przechowywanej w pierwszym kubicie. Ponadto widać, że w wyniku tego pomiaru informacja reprezentowana przez amplitudy α i β zostaje zakodowana w trzecim kubicie należącym do odbiorcy

$$|B_0^+\rangle_{12} \to (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3), \qquad |B_0^-\rangle_{12} \to (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3), |B_1^+\rangle_{12} \to (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3), \qquad |B_1^-\rangle_{12} \to (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3).$$
(2.42)

Wynik pomiaru jest całkowicie losowy, ponieważ prawdopodobieństwa znalezienia układu dwóch pierwszych kubitów w każdym ze stanów Bella są identyczne, to znaczy wszystkie są równe 1/4. Odbiorca nie jest w stanie przewidzieć, w którym z czterech możliwych stanów znajduje się teraz jego kubit i dlatego pod koniec etapu pomiaru nadawca musi go o tym poinformować. Nadawca potrzebuje w tym celu przesłania tylko dwóch klasycznych bitów informacji przesłanych klasycznym kanałem informacyjnym. W momencie otrzymania tej informacji przez odbiorcę kończy się etap pomiaru, a zaczyna etap odtwarzania.

Jeśli odbiorca dowie się, że wynikiem pomiaru był stan $|B_0^+\rangle_{12}$, to nie będzie musiał nic robić, ponieważ jego kubit znajduje się w dokładnie takim samym stanie, w jakim był kubit nadawcy przed teleportacją. Jeśli wynikiem był stan $|B_0^-\rangle_{12}$, to musi zadziałać na swój kubit bramką kwantową Z. Jeśli wynikiem był stan $|B_1^+\rangle_{12}$, to niezbędne jest zadziałanie bramką X, czyli kwantową wersją bramki NOT. Natomiast jeżeli wynikiem pomiaru był stan $|B_1^-\rangle_{12}$, to konieczne jest zadziałanie obiema tymi bramkami, to znaczy najpierw bramką X, a później bramką Z. Po tym działaniu stan kubitu nadawcy zostaje odtworzony w stanie kubitu odbiorcy $\alpha |0\rangle_3 + \beta |1\rangle_3$. Jest to zatem koniec etapu odtwarzania i całego protokołu teleportacji.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że stan trzeciego kubitu nie jest kopią stanu pierwszego kubitu. Tego zabrania twierdzenie o nieklonowaniu. Amplitudy α i β zostały przeniesione za pomocą teleportacji z kubitu pierwszego na trzeci. Natomiast stan pierwszego kubitu, po teleportacji, będzie zgodny z wynikiem pomiaru w bazie Bella.

Od razu też widać, że protokół teleportacji uniemożliwia komunikację szybszą od światła, ponieważ wymaga przesłania dwóch bitów klasycznym kanałem, a przesyłanie klasycznej informacji jest ograniczone prędkością światła. Pojawia się jednak pytanie, czy sam połączony pomiar w bazie Bella nie wystarcza do przesłania informacji szybciej od światła. Przecież amplitudy α i β opisują stan kubitu odbiorcy bezpośrednio po tym pomiarze, jak widać w (2.42). Okazuje się jednak, że te cztery możliwe modyfikacje oryginalnego stanu nadawcy uniemożliwiają odbiorcy odczytanie ze swojego kubitu jakiejkolwiek informacji. Aby wyraźnie to pokazać, przedstawiona zostanie macierz gęstości opisująca stan kubitu odbiorcy po wykonaniu pomiaru w bazie Bella, ale przed poznaniem przez odbiorcę wyniku tego pomiaru. Ponieważ każdy z czterech możliwych stanów czystych trzeciego kubitu występuje z częstością opisaną prawdopodobieństwem 1/4, to macierz gęstości jest dana wyrażeniem

$$\rho = \frac{1}{4} \Big[(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) (\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) + (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) (\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) \\ + (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) (\alpha^* \langle 1| + \beta^* \langle 0|) + (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) (\alpha^* \langle 1| - \beta^* \langle 0|) \Big],$$

które po elementarnych przekształceniach można sprowadzić do postaci

$$\rho = \frac{1}{4} \Big[2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) |0\rangle \langle 0| + 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) |1\rangle \langle 1| \Big] \\ = \frac{1}{2} \Big[|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| \Big] = \frac{I}{2} \,.$$
(2.43)

2.9. TELEPORTACJA KWANTOWA

Widać zatem, że macierz gęstości, opisująca stan trzeciego kubitu przed poznaniem wyniku pomiaru Bella, nie zależy w ogóle od amplitud α i β . Ponadto łatwo można sprawdzić, korzystając ze wzoru (2.38), że entropia przyjmuje w tym przypadku maksymalną wartość równą jednemu kubitowi. Oznacza to maksymalną niewiedzę o stanie, w którym znajduje się kubit należący do odbiorcy. A zatem w każdym przypadku przesyłanie informacji szybciej od światła za pomocą teleportacji kwantowej nie jest możliwe.

Warto wspomnieć jeszcze o tym, że pomiar w bazie Bella może zostać zastąpiony pomiarem w standardowej bazie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ [66].Wystarczy w tym celu, że nadawca zadziała na swoje kubity najpierw bramką CNOT, a później bramką Hadamarda na pierwszy z nich. W rezultacie takiego zadziałania bramką CNOT na dwa pierwsze kubity w stanie (2.39) dostaje się stan

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3) \\ &+ \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 + |1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3), \end{aligned}$$
(2.44)

który, jak łatwo można sprawdzić, po zastosowaniu bramki H na pierwszym kubicie sprowadza się do następującej postaci

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \Big[|0\rangle_1 |0\rangle_2 \otimes (\alpha |0\rangle_3 + \beta |1\rangle_3) + |0\rangle_1 |1\rangle_2 \otimes (\alpha |1\rangle_3 + \beta |0\rangle_3) + |1\rangle_1 |0\rangle_2 \otimes (\alpha |0\rangle_3 - \beta |1\rangle_3) + |1\rangle_1 |1\rangle_2 \otimes (\alpha |1\rangle_3 - \beta |0\rangle_3) \Big]. (2.45)$$

Widać, że każdemu z czterech możliwych wyników pomiaru wykonanego w standardowej bazie przyporządkowane jest odpowiednie zakodowanie informacji kwantowej w kubicie odbiorcy

$$|00\rangle_{12} \to (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3), \qquad |01\rangle_{12} \to (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3), |10\rangle_{12} \to (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3), \qquad |11\rangle_{12} \to (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3),$$
(2.46)

podobnie jak to miało miejsce w oryginalnym protokole Benneta.

Na eksperymentalną teleportację kwantowych bitów nie trzeba było długo czekać. Już w 1997 roku dwa zespoły fizyków, jeden w Rzymie [3], a drugi w Innsbrucku [4], niezależnie wykonały doświadczenia, w których teleportowane były stany polaryzacji fotonów. Doświadczenie przeprowadzone w Innsbrucku pod kierownictwem Antona Zeilingera zyskało większą popularność. Schemat układu użytego w tym eksperymencie przedstawiony jest na rysunku 2.11. Na tym schemacie foton 4 jest nośnikiem informacji kwantowej, natomiast fotony 1 i 2 są splątaną parą. Urządzenie to realizuje połączony pomiar stanu fotonów 4 i 1 za pomocą układu złożonego z płytki



Rysunek 2.11: Doświadczalna realizacja teleportacji wykonana przez grupę Antona Zeilingera.

światłodzielącej i dwóch detektorów. Zarówno splątana para fotonów, jak i foton będący nośnikiem informacji kwantowej, wytwarzane są parametrycznym dzielnikiem częstości. Impuls światła laserowego, przechodząc przez kryształ beta boranu baru, powoduje wytworzenie niezbędnej w procesie teleportacji splątanej pary fotonów 1 i 2. Jednak impuls ten po pierwszym przejściu przez parametryczny dzielnik częstości odbija się od lustra i przechodzi przez kryształ ponownie, wytwarzając kolejna splatana pare fotonów 3 i 4. Ta druga para splątanych fotonów zostaje sprytnie wykorzystana do wytworzenia fotonu 4 natychmiast po utworzeniu pierwszej splątanej pary. Po pomiarze wykonanym na fotonie 3 splatanie wiażace go z fotonem 4 zostaje zniszczone. Jak wspomniane było wcześniej generacja splątanej pary w parametrycznym dzielniku częstości nie zawsze się udaje i dlatego pomiar wykonany na fotonie 3 ma dodatkowe znaczenie. Pomiar ten informuje jednocześnie o tym, że foton 4, którego stan ma być teleportowany, faktycznie istnieje. Przed teleportacją foton 4 musi jeszcze przejść przez polaryzator, za pomoca którego możliwe jest zakodowanie w tym fotonie wybranej przez eksperymentatorów informacji kwantowej poprzez nadanie mu odpowiedniej polaryzacji.

Tak przygotowany foton 4 pada na płytkę światłodzielącą jednocześnie z fotonem 1, dzięki czemu oba te fotony interferują ze sobą, umożliwiając wykonanie połączonego pomiaru obu fotonów. Niestety układ ten pozwala na

2.9. TELEPORTACJA KWANTOWA

rozróżnienie wyłącznie jednego stanu Bella. Dlatego teleportacja udaje się jedynie w jednym przypadku na cztery, gdy oba detektory zasygnalizują wykrycie fotonu. Jedynie wówczas nadawca może przesłać klasyczną wiadomość do odbiorcy, który posiadał foton 2, że jego foton znajduje się w stanie dokładnie takim samym, w jakim znajdował się foton 4. W trzech czwartych przypadków, gdy obydwa fotony trafiają do tego samego detektora, teleportacja jest nieudana, a przesyłana informacja tracona.

Pomiary wykonywane za pomocą polaryzującej płytki światłodzielącej na fotonie 2 po zakończeniu teleportacji wykazały, że jego stan w istocie był bliski stanowi, w jakim został przygotowany foton 4. Wierność opisująca podobieństwo obu tych stanów wyniosła 0, 8.

Niedługo po tych pierwszych dwóch doświadczalnych realizacjach teleportacji kwantowej przeprowadzono wiele innych eksperymentów, w których teleportowane były stany fotonowe. W wielu z nich teleportowane były, podobnie jak w doświadczeniu Zeilingera, kubity [5–10]. Wśród nich na szczególną uwagę zasługuje eksperyment, w którym kubit został teleportowany na odległość 2 km [9]. W innych zaś teleportowano stany koherentne, będące superpozycją nieskończonej liczby stanów bazowych [12–15]. Stany koherentne opisują własności ciągłe pól światła laserowego, a więc w tych doświadczeniach teleportowano stan promienia laserowego.

Teleportacja stanów fotonowych nawet na duże odległości jest stosunkowo prosta ze względu na własności fotonów. Fotony przemieszczają się z największą możliwą prędkością — prędkością światła, a poza tym słabo oddziałują z otoczeniem. Są więc idealne do przenoszenia informacji na duże odległości. Jednakże zalety stanów fotonowych w zagadnieniu przenoszenia informacji są jednocześnie wadami w innych zagadnieniach. Brak jakiegokolwiek bezpośredniego oddziaływania pomiędzy fotonami oraz słabe oddziaływanie z materią bardzo utrudnia wykonanie układów realizujących dwukubitowe bramki operujące na dwóch fotonach. Natomiast brak możliwości zatrzymania fotonów praktycznie uniemożliwia przechowywanie w nich informacji kwantowej w jednym miejscu. Do wykonania tych dwóch celów najlepsze jest, z kolei, kodowanie kubitów w stanach atomowych. Dlatego z punktu widzenia informatyki kwantowej teleportacja stanów atomowych jest dużo ważniejsza od teleportacji stanów fotonowych. Poza tym teleportacja stanów atomowych jest kolejnym krokiem na drodze do teleportacji dużych obiektów i dlatego każda jej realizacja z pewnością cieszy fanów serialu "Star Trek".

Pierwsza teleportacja stanów atomowych została doświadczalnie przeprowadzona już w 1998 roku [16]. W tym eksperymencie została wykorzystana dobrze znana i szeroko stosowana w różnych dziedzinach nauki technika magnetycznego rezonansu jądrowego. Jako kubitów użyto w tym doświadczeniu atomu wodoru i dwóch atomów węgla należących do cząsteczki trichloroetylenu. Wzór strukturalny tej cząsteczki przedstawiony jest na rysunku 2.12. Przesyłana informacja kwantowa została zakodowana w stanie spinowym ją-



Rysunek 2.12: Cząsteczka trichloroetylenu, która posłużyła do pierwszej doświadczalnej teleportacji stanów atomowych.

dra atomu węgla C_2 , podczas gdy atomy H i C_1 zostały przygotowane w stanie splątanym. Eksperymentatorom udało się przeprowadzić połączony pomiar stanu obu atomów węgla w taki sposób, że odtwarzali oryginalną informację kwantową w stanie atomu wodoru po każdym z czterech możliwych wyników tego pomiaru. Zatem protokół teleportacji zawsze kończy się w tym układzie sukcesem. Doświadczenie to, choć było wielkim osiągnięciem, to jednak mogło posłużyć jedynie do demonstracji metody teleportacji. Teleportacja pomiędzy atomami należącymi do jednej cząsteczki, czyli na odległość kilku angstremów, nie znajduje żadnego sensownego zastosowania. Podobne przesłanie kubitu z atomu C_2 na atom H daje się wykonać wydajniej technikami innymi niż teleportacja.

Niedawno dwóm niezależnym grupom udało się przeprowadzić teleportację stanów pomiędzy jonami schwytanymi w pułapce Paula [17, 18]. W obu eksperymentach kubity były zakodowane w poziomach elektronowych uwięzionych jonów. Grupa z Innsbrucka [17] użyła w tym celu podstawowego poziomu S_{1/2} oraz metastabilnego poziomu D_{5/2} jonu ⁴⁰Ca⁺. Grupa z Boulder [18] wykorzystała zaś jony berylu ⁹Be⁺. W obu eksperymentach odtworzenie teleportowanego stanu w docelowym jonie możliwe było przy wszystkich rezultatach połączonego pomiaru. Zatem prawdopodobieństwa pomyślnej teleportacji w obu doświadczeniach były równe jedności. Wartości wierności teleportacji również były zbliżone do siebie i równe około 0,75. Niestety także odległości pomiędzy jonami w obu przypadkach są bardzo małe — zaledwie kilka μm . A więc choć odległość ta jest o wiele rzędów wielkości większa niż w przypadku teleportowania stanów atomów należących do jednej cząsteczki, to nadal nie była to teleportacja stanów atomowych na duże odległości.

2.9. TELEPORTACJA KWANTOWA

Największe szanse na eksperymentalną realizację teleportacji stanów atomowych na duże odległości mają propozycje wykorzystujące stany fotonowe do przesyłania informacji kwantowej. W ten sposób łączy się zalety stanów fotonowych z zaletami stanów atomowych. Takie właśnie połączenie możliwości oferowanych przez stany fotonowe i stany atomowe do przeprowadzenia teleportacji na duże odległości zostało zaproponowane po raz pierwszy przez Sougato Bosego, Petera Knighta, Martina Plenia i Vlatka Vedrala [19]. Ich pomysł polega na wykorzystaniu układu złożonego z atomu uwięzionego wewnątrz wnęki rezonansowej o bardzo dużej dobroci. W takim układzie możliwe jest przepisanie informacji kwantowej ze stanu atomu na stan pola znajdującego się wewnątrz wnęki rezonansowej poprzez oświetlanie atomu laserem. Jeśli jedno z luster wnęki rezonansowej będzie częściowo przepuszczać uwięzione pole elektromagnetyczne, to możliwe staje się wysłanie informacji zapisanej w tym polu na dużą odległość od układu atom-wnęka z prędkością światła. Urządzenie do teleportacji stanów atomowych na dużą odległość



Rysunek 2.13: Schemat propozycji doświadczenia realizującego teleportację stanów atomowych na duże odległości.

zaproponowane przez Sougata Bosego i jego kolegów [19] składa się z dwóch układów atom-wnęka oraz prezentowanego wcześniej układu, realizującego połączony pomiar stanu dwóch pól, a złożonego z płytki światłodzielącej i dwóch detektorów. Urządzenie to przedstawione jest schematycznie na rysunku 2.13. Układ ten był przedmiotem badań autora niniejszej pracy doktorskiej, a wyniki otrzymane w ich rezultacie są podstawą tej pracy.

Rozdział 3

Trajektorie kwantowe

Protokół kwantowej teleportacji wymaga od nadawcy wykonania połączonego pomiaru w bazie Bella stanu dwóch cząstek: jednej — zawierającej informację kwantową i drugiej — należącej do splątanej pary. Częścią każdego układu realizującego teleportację kwantową musi być zatem przynajmniej jeden detektor. Jednak detektory są zbyt dużymi urządzeniami, aby mogły być opisywane jako część układu izolowanego. Poza tym detektory służą do badania stanu układu i przekazywania otrzymanej o układzie informacji na zewnątrz układu. Dlatego detektory muszą być traktowane jako część otoczenia, z którym oddziałuje reszta układu. Niestety oznacza to, że układ realizujący teleportację nie jest układem izolowanym. Nieodwracalne straty energii uniemożliwiają użycie równania Schrödingera do wyznaczenia ewolucji układu, oddziałującego z otoczeniem. Do opisu układów oddziałujących z otoczeniem, zwanych układami otwartymi, niezbędne są metody uwzględniające dysypację w mechanice kwantowej.

Rozdział ten poświęcony jest metodzie nazwanej metodą trajektorii kwantowych. Teoria trajektorii kwantowych ma swoje korzenie w innej, starszej metodzie, uwzględniającej dysypację — w równaniu "master". W istocie trajektorie kwantowe są kwantową wersją metody Monte Carlo, pozwalającą na analizowanie w prosty sposób równania "master". Stąd przedstawione zostanie w tym rozdziale również równanie "master".

3.1 Macierz gęstości

Wektor w przestrzeni Hilberta $|\psi\rangle$ nie wystarczy do opisania stanu układu otwartego, ponieważ w wyniku oddziaływania tego układu z otoczeniem stan całości przestaje być dany iloczynem $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, jak ma to miejsce w przypadku układów odizolowanych od otoczenia. Zamiast tego ma się do czynienia z

superpozycją $\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle$, a więc pewnym splątaniem stanu układu ze stanem otoczenia. Ponieważ nie jest możliwe śledzenie stanu otoczenia $|\phi\rangle$, dlatego jedyne co można powiedzieć o stanie układu otwartego to stwierdzenie, że znajduje się on w stanie $|\psi_i\rangle$ z prawdopodobieństwem $p_i = |\alpha_i|^2$. Stan układu opisany zespołem wektorów przedstawia się za pomocą macierzy gęstości zdefiniowanej następująco

$$\rho \equiv \sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle \langle \psi_{i}| \,. \tag{3.1}$$

Szczególnym przypadkiem jest stan układu opisany całkowicie przez jeden wektor $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Taki stan nazywa się stanem czystym. Natomiast stan, do opisu którego niezbędnych jest wiele stanów czystych, nazywany jest stanem mieszanym. Nazwa ta jest niezwykle trafna, gdyż sumę w definicji (3.1) faktycznie można traktować jako mieszankę stanów czystych.

Przy określaniu macierzy gęstości opisującej stan podukładu z macierzy gęstości opisującej stan całego układu niezwykle ważna jest operacja nazywana śladem częściowym. Jeśli stan dwóch układów A i B jest określony przez macierz gęstości ρ^{AB} , to wówczas stan układu A można wyznaczyć z tej macierzy gęstości, wyznaczając ślad częściowy po operatorach układu B według wzoru: $\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB})$. Za pomocą bazy ortonormalnej $\{|\psi_i\rangle\}$ przestrzeni układu A oraz bazy ortonormalnej $\{|\phi_k\rangle\}$ przestrzeni układu B macierz gęstości całego układu można przedstawić wyrażeniem

$$\rho^{AB} = \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} \sum_{l} p_{ijkl} |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \otimes |\phi_k\rangle \langle\phi_l|.$$
(3.2)

Wówczas ślad częściowy można zdefiniować następująco

$$\operatorname{tr}_B(\rho^{AB}) \equiv \sum_m \langle \phi_m | \rho^{AB} | \phi_m \rangle \,. \tag{3.3}$$

Wyznaczona za pomocą śladu częściowego macier
z ρ^A nazywana jest zredukowaną macierzą gęstości. W celu zilustrowania własności śladu częściowego warto prześledzić działanie tej operacji na macierz gęstości opisującą stan dwóch maksymalnie splątanych kubitów oznaczonych indeksami
 A i B

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) .$$
(3.4)

Jest oczywiste, że jest to stan czysty, który daje się przedstawić za pomocą macierzy gęstości w postaci

$$\rho^{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \Big[|0\rangle_A |1\rangle_{BB} \langle 1|_A \langle 0| + |0\rangle_A |1\rangle_{BB} \langle 0|_A \langle 1|$$

+ $|1\rangle_A |0\rangle_{BB} \langle 1|_A \langle 0| + |1\rangle_A |0\rangle_{BB} \langle 0|_A \langle 1| \Big].$ (3.5)

3.1. MACIERZ GĘSTOŚCI

Łatwo można sprawdzić, że ślad tej macierzy gęstości jest równy jedności $\operatorname{tr}(\rho^{AB}) = 1$. Oczywiste jest, że entropia von Neumanna przyjmuje dla tego stanu, podobnie jak dla wszystkich czystych stanów, wartość równą zeru. Oznacza to, że stan układu jest całkowicie znany lub inaczej mówiąc oznacza to zerową niewiedzę na ten temat. Niech teraz układ *B* zostanie wyeliminowany z opisu za pomocą śladu częściowego

$$\rho^A = \operatorname{tr}_B(\rho^{AB}) = {}_B\langle 0|\rho^{AB}|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\rho^{AB}|1\rangle_B \,. \tag{3.6}$$

Wtedy otrzymuje się zredukowaną macierz gęstości opisującą stan wyłącznie jednego kubitu

$$\rho^{A} = \frac{|0\rangle_{AA}\langle 0| + |1\rangle_{AA}\langle 1|}{2} = \frac{I}{2}.$$
 (3.7)

Jak widać, jest to stan mieszany. Łatwo można sprawdzić, że po wykonaniu tej operacji ślad nadal jest równy jedności. Ślad częściowy jest zatem operacją zachowującą ślad. Jednak stan wiedzy o stanie układu uległ zmianie. W tym przypadku wartości własne macierzy ρ^A są jednakowe, równe 1/2. Odpowiadają one prawdopodobieństwom znalezienia układu w każdym z dwóch stanów $|0\rangle$ lub $|1\rangle$. Korzystając ze wzoru (2.38), łatwo można ustalić, że entropia von Neumanna oznaczająca stan niewiedzy przybiera teraz maksymalną wartość równą jednemu kubitowi. Ślad częściowy jest zatem operacją zachowującą ślad, ale zmniejszającą wiedzę o układzie. Stąd ślad częściowy jest przykładem operacji, której dotyczy znak "większy" w nierówności (2.29).

Powyższy przykład dostarcza również informacji o skutkach oddziaływania układu otwartego z otoczeniem. Nawet jeśli stan układu początkowo będzie stanem czystym, a więc będzie znany dokładnie, to w wyniku oddziaływania, plączącego układ z otoczeniem, układ ten przejdzie do stanu mieszanego, a wiedza o jego stanie się zmniejszy. Jednak nawet wtedy połączony system układu i otoczenia będzie nadal opisany stanem czystym.

Na koniec warto wspomnieć, że zastosowanie macierzy gęstości nie ogranicza się do opisywania układów otwartych. Można z powodzeniem za pomocą macierzy gęstości sformułować całą mechanikę kwantową. Jednak unika się stosowania macierzy gęstości do opisu układów izolowanych ze względu na to, że liczba elementów macierzy gęstości rośnie z kwadratem rozmiaru przestrzeni Hilberta, podczas gdy liczba elementów wektora rośnie jedynie liniowo. Naturalnie liczba elementów wiąże się bezpośrednio z ilością pamięci i czasem pracy komputera wymaganych przez obliczenia.

3.2 Równanie "master"

W poprzednim podrozdziale pokazano, że stan układu otwartego S może być dobrze opisany za pomocą macierzy gęstości ρ . W tym podrozdziale wyprowadzone zostanie równanie opisujące ewolucję takiego układu [67,68]. W tym celu musi zostać wykorzystany pełen hamiltonian

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \,, \tag{3.8}$$

będący sumą hamiltonianów układu S, otoczenia R oraz hamiltonianu oddziaływania zachodzącego pomiędzy układem a otoczeniem. Na początku niezbędne jest również użycie macierzy gęstości χ opisującej stan sytemu złożonego z układu i otoczenia. Cały system może być traktowany jako układ izolowany i dlatego jego ewolucję opisuje równanie Schrödingera dla macierzy gęstości

$$\dot{\chi} = \frac{1}{i\hbar} [H, \chi] \,. \tag{3.9}$$

Aby uprościć to wyprowadzenie, należy przejść do obrazu oddziaływania, wykonując następujące podstawienie

$$\widetilde{\chi}(t) \equiv e^{(i/\hbar)(H_S + H_R)} \chi(t) e^{-(i/\hbar)(H_S + H_R)} .$$
(3.10)

Różnikując równanie (3.10) względem czasu otrzymuje się

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{i}{\hbar} [(H_S + H_R), \tilde{\chi}] + e^{(i/\hbar)(H_S + H_R)} \dot{\chi} e^{-(i/\hbar)(H_S + H_R)} .$$
(3.11)

Z drugiej strony, wstawiając pełny hamiltonian (3.8) do równania (3.9), a następnie mnożąc to równanie lewostronnie przez $\exp((i/\hbar)(H_S + H_R))$ i prawostronnie przez $\exp(-(i/\hbar)(H_S + H_R))$ dostaje się

$$e^{(i/\hbar)(H_S + H_R)} \dot{\chi} e^{-(i/\hbar)(H_S + H_R)} = -\frac{i}{\hbar} [(H_S + H_R), \tilde{\chi}] + \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{H}_{SR}, \tilde{\chi}], \quad (3.12)$$

gdzie H_{SR} jest zależnym od czasu operatorem zdefiniowanym następująco

$$\widetilde{H}_{SR}(t) \equiv e^{(i/\hbar)(H_S + H_R)} H_{SR} e^{-(i/\hbar)(H_S + H_R)}.$$
(3.13)

Po podstawieniu równania (3.12) do równania (3.11) ostatecznie udaje się sprowadzenie równania opisującego ewolucję całego systemu do postaci

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{H}_{SR}, \tilde{\chi}]. \qquad (3.14)$$

3.2. RÓWNANIE "MASTER"

Powyższe równanie można formalnie scałkować, otrzymując rozwiązanie

$$\widetilde{\chi}(t) = \chi(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\widetilde{H}_{SR}(t'), \widetilde{\chi}(t')], \qquad (3.15)$$

które podstawia się w komutatorze w równaniu (3.14). W wyniku tego podstawienia równanie opisujące ewolucję całego systemu przybiera postać

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar} [\widetilde{H}_{SR}(t), \chi(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\widetilde{H}_{SR}(t), [\widetilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]. \quad (3.16)$$

Równanie (3.16) nie zawiera żadnych przybliżeń. Jest ono tak samo dokładne jak równanie (3.9). Jednak, nie stosując żadnych przybliżeń, nie da się wyprowadzić równania opisującego ewolucję stanu układu otwartego. Zaletą równania (3.16) jest postać znacząco ułatwiająca wprowadzanie tych niezbędnych przybliżeń.

Pierwszym założeniem jest przyjęcie, że w chwili początkowej t = 0 układ nie znajduje się w stanie splątanym z otoczeniem, oraz że oddziaływanie układu z otoczeniem, wprowadzające takie splątanie, rozpoczyna się dopiero w tej chwili. Dzięki temu macierz gęstości całego systemu χ może być przedstawiona jako iloczyn macierzy gęstości układu otwartego $\rho(0)$ oraz macierzy gęstości otoczenia R_0

$$\chi(0) = \rho(0)R_0. \tag{3.17}$$

Założenie to rozpoczyna procedurę eliminacji zmiennych otoczenia z równania (3.16). Następnym krokiem w tym kierunku jest wykonanie śladu częściowego po otoczeniu, wprowadzając przy tym oznaczenie

$$\operatorname{tr}_{R}(\widetilde{\chi}) = e^{(i/\hbar)H_{S}t}\rho(t)e^{-(i/\hbar)H_{S}t} \equiv \widetilde{\rho}(t).$$
(3.18)

Slad częściowy z pierwszego wyrazu we wzorze (3.16) można pominąć przy założeniu tr_R($\widetilde{H}_{SR}R_0$) = 0. Założenie to jest prawdziwe, jeśli wartości oczekiwane operatorów otoczenia, sprzęgające otoczenie z układem są równe zeru. Po wykonaniu operacji śladu częściowego, równanie (3.16) przyjmuje postać

$$\dot{\widetilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \operatorname{tr}_R \left([\widetilde{H}_{SR}(t), [\widetilde{H}_{SR}(t'), \widetilde{\chi}(t')]] \right).$$
(3.19)

Jak widać, eliminacja zmiennych otoczenia udała się w pełni po lewej stronie równania. Do wyeliminowania zmiennych otoczenia po prawej stronie równania niezbędne jest przyjęcie kolejnych założeń. O ile na podstawie pierwszego założenia (3.17) na początku nie było korelacji pomiędzy układem a otoczeniem, to wskutek istnienia oddziaływania ta korelacja będzie z czasem narastać. Zakłada się jednak, że sprzężenie pomiędzy układem a otoczeniem jest tak bardzo słabe, że dla dowolnego czasu macierz gęstości $\chi(t)$ wykazuje tylko odchylenie rzędu H_{SR} od nieskorelowanego stanu. Ponadto zakłada się, że otoczenie jest ogromnym układem i w związku z tym jego stan nie zmienia się wskutek oddziaływania z układem S. Przy tych założeniach macierz gęstości całego systemu można zapisać

$$\widetilde{\chi}(t) = \widetilde{\rho}(t)R_0 + O(H_{SR}). \qquad (3.20)$$

Ponieważ zakłada się tak słabe oddziaływanie, to wyrazy zawierające H_{SR} w potędze wyższej, niż w drugiej można zaniedbać. Przybliżenie to nazywane jest przybliżeniem Borna i pozwala ono na zastąpienie w komutatorze równania (3.19) macierzy gęstości $\tilde{\chi}(t')$ przez wyrażenie $\tilde{\rho}(t')R_0$

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \operatorname{tr}_R \left([\widetilde{H}_{SR}(t), [\widetilde{H}_{SR}(t'), \widetilde{\rho}(t')R_0]] \right).$$
(3.21)

Niestety do pozbycia się zmiennych otoczenia konieczne jest wykonanie następnych założeń. Niezbędne jest przyjęcie bardziej konkretnego modelu oddziaływania układu z otoczeniem. Wykonuje się to, przyjmując następującą postać hamiltonianu oddziaływania

$$H_{SR} = \hbar \sum_{i} s_i \Gamma_i \,, \tag{3.22}$$

gdzie s_i są operatorami działającymi w przestrzeni Hilberta układu, a Γ_i są operatorami działającymi w przestrzeni Hilberta otoczenia. Po prostych przekształceniach otrzymuje się wyrażenie

$$\widetilde{H}_{SR}(t) = \hbar \sum_{i} \left(e^{(i/\hbar)H_S t} s_i e^{-(i/\hbar)H_S t} \right) \left(e^{(i/\hbar)H_R t} \Gamma_i e^{-(i/\hbar)H_R t} \right)$$
$$= \hbar \sum_{i} \widetilde{s}_i(t) \widetilde{\Gamma}_i(t) , \qquad (3.23)$$

które wstawia się do równania (3.21). Wykorzystując własność cykliczności śladu częściowego, czyli tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB), łatwo daje się otrzymać równanie

$$\dot{\tilde{\rho}} = - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \Big(\{ \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_i(t) \} \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R
+ \{ \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \} \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \Big).$$
(3.24)

W powyższym równaniu wykorzystano również oznaczenie wartości oczekiwanej dowolnego operatora A, działającego w przestrzeni Hilberta otoczenia, przez $\langle A \rangle_R = \operatorname{tr}_R(R_0 A)$. Wszystkie wcześniejsze działania pozwoliły jedynie na odseparowanie zmiennych otoczenia od zmiennych układu, a nie ich wyeliminowanie z równania opisującego ewolucję stanu układu otwartego. Kolejnym problemem w równaniu (3.24) jest trudność w obliczeniu całki spowodowana zależnością macierzy gęstości $\tilde{\rho}$ od czasu t', po którym wykonywane jest całkowanie. Zależność ta oznacza, że do wyznaczenia przyszłego stanu układu nie wystarczy wyłącznie znajomość obecnego stanu tego układu, jak można by tego oczekiwać, lecz potrzebna jest znajomość całej historii ewolucji układu. Dlatego potrzebne jest zastąpienie $\tilde{\rho}(t')$ we wzorze (3.24) przez $\tilde{\rho}(t)$. Takie zastąpienie $\tilde{\rho}(t')$ przez $\tilde{\rho}(t)$ nazywane jest przybliżeniem Markowa. Użycie tego przybliżenia jest uzasadnione przy założeniu szybkiego, w skali czasowej zmian $\tilde{\rho}(t)$, zaniku funkcji korelacji $\langle \Gamma_i(t')\Gamma_i(t)\rangle_R$. Na szczęście szybki zanik tychże funkcji jednocześnie zapewnia ostateczną eliminację zmiennych otoczenia z równania (3.24). Dlatego należy przyjąć taki model otoczenia, który zapewniałby takie krótkie czasy korelacji. Idealnie byłoby, gdyby funkcje $\langle \Gamma_i(t')\Gamma_i(t)\rangle_R$ dla tego modelu były proporcjonalne do delty Diraca. Okazuje się, że takie wymagania dobrze spełniają modele otoczenia reprezentowane przez nieskończone zbiory oscylatorów harmonicznych o wszystkich możliwych częstościach, tworzące pewien zbiornik ciepła. Zbiornik ciepła może się znajdować w stanie równowagi termodynamicznej w temperaturze T, badź w stanie próżni. Ze względu na uproszczenie dalszych rozważań zostanie w tym miejscu założone, że każdy z modów zbiornika ciepła znajduje się w stanie próżni. Dalsze uproszczenie uzyska się, przyjmując że do opisu stanu układu otwartego wystarczą tylko dwa operatory s i s^{\dagger} . Wówczas można dokonać następującego przypisania

$$s_1 = s, \qquad s_2 = s^{\dagger}, \Gamma_1 = \Gamma^{\dagger}, \qquad \Gamma_2 = \Gamma.$$
(3.25)

Postać macierzy gęstości R_0 wynikająca z własności zbiornika w stanie próżni pozwala wyznaczyć wartości funkcji korelacji

$$\langle \widetilde{\Gamma}^{\dagger}(t) \widetilde{\Gamma}^{\dagger}(t') \rangle_{R} = \langle \widetilde{\Gamma}(t) \widetilde{\Gamma}(t') \rangle_{R} = \langle \widetilde{\Gamma}^{\dagger}(t) \widetilde{\Gamma}(t') \rangle_{R} = 0 , \langle \widetilde{\Gamma}(t) \widetilde{\Gamma}^{\dagger}(t') \rangle_{R} = \kappa \, \delta(t - t') ,$$
 (3.26)

gdzie κ jest pewnym współczynnikiem proporcjonalności. Należy wspomnieć, że dla takiego modelu otoczenia spełnione jest również przyjęte wcześniej założenie zerowania się wartości oczekiwanych operatorów otoczenia Γ i Γ^{\dagger} , sprzęgających układ z otoczeniem. Wykorzystując (3.25) oraz (3.26), równanie (3.24) daje się już sprowadzić do prostej postaci, niezależnej od zmiennych otoczenia

$$\dot{\widetilde{\rho}} = -\kappa \widetilde{\rho} \widetilde{s}^{\dagger} \widetilde{s} - \kappa \widetilde{s}^{\dagger} \widetilde{s} \widetilde{\rho} + 2\kappa \widetilde{s} \widetilde{\rho} \widetilde{s}^{\dagger} , \qquad (3.27)$$

Można już zatem powrócić z obrazu oddziaływania do obrazu Schrödingera. Związek

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] + e^{-(i/\hbar)H_S t} \dot{\rho} e^{(i/\hbar)H_S t} , \qquad (3.28)$$

umożliwiający przejście z jednego obrazu do drugiego wyprowadza się, różniczkując równanie (3.18) względem czasu. Po wstawieniu (3.27) do (3.28) oraz zdefiniowaniu operatora Lindblada $C = \sqrt{2\kappa s}$ otrzymuje się równanie "master" w postaci Kosakowskiego-Lindblada [69,70]

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] - \frac{1}{2} \{\rho, C^{\dagger}C\}_{+} + C\rho C^{\dagger}, \qquad (3.29)$$

gdzie użyty został antykomutator zdefiniowany następująco $\{A, B\}_+ = AB + BA$. Uogólnienie do przypadku wielu operatorów Lindblada C_i , powoduje jedynie pojawienie się sumowania w równaniu "master"

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] - \frac{1}{2} \sum_i \{\rho, C_i^{\dagger} C_i\}_+ + \sum_i C_i \rho C_i^{\dagger}, \qquad (3.30)$$

Widać, że prawa strona równania "master" jest w istocie pewnym działaniem na macierzy gęstości, które można symbolicznie zapisać

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho \,. \tag{3.31}$$

Takie przedstawienie równania "master" jest bardzo wygodne i pozwala na formalne zapisanie jego rozwiązania

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0) \,. \tag{3.32}$$

W powyższych równaniach \mathcal{L} jest superoperatorem, działającym na operatory i nazywanym Liouvilianem. Jego działanie na dowolny operator A można zdefiniować następująco

$$\mathcal{L}A \equiv -\frac{i}{\hbar}[H_S, A] - \frac{1}{2}\sum_i \{A, C_i^{\dagger}C_i\}_+ + \sum_i C_i A C_i^{\dagger}.$$
 (3.33)

Na koniec tego podrozdziału wypada wrócić do głównego tematu tej pracy. Powodem, dla którego przedstawiona została teoria uwzględniająca dysypację w mechanice kwantowej jest potrzeba prawidłowego opisu ewolucji układu składającego się z atomu uwięzionego wewnątrz wnęki. Jak przedstawiono na rysunku 2.13, układy atom-wnęka są podstawowymi elementami urządzenia do teleportacji stanów atomowych na znaczną odległość. Protokół teleportacji wymaga wykonania połączonego pomiaru i dlatego każda z wnęk musi mieć jedno lustro częściowo przepuszczalne skierowane na detektor. Tak więc używane w propozycji teleportacji układy atom-wnęka są układami otwartymi. Do śledzenia procesu teleportacji niezbędne jest zatem równanie "master" opisujące ewolucję układu atom-wnęka. Z równania (3.30) widać, że aby otrzymać postać równania "master" dla tego konkretnego układu, trzeba znać hamiltonian układu H_S oraz zbiór operatorów Lindblada C_i . Hamiltonian zostanie wyprowadzony w rozdziale 5. Pozostaje więc przedstawienie postaci operatorów Lindblada. Jakąkolwiek postać ma hamiltonian układu atom-wnęka, to na pewno musi mieć zarówno zmienne atomowe i polowe. Na początku rozpatrzone zostanie oddziaływanie pola wewnątrz wnęki rezonansowej z otoczeniem. Jest rzeczą oczywistą, iż w wyniku tego oddziaływania fotony uwiezione we wnęce będą uciekać z wnęki jeden po drugim, aż wnęka pozostanie w stanie próżni fotonowej. Pierwszy z operatorów Lindblada dla takiego układu, opisujący oddziaływanie pola z otoczeniem, jest dany wzorem $C_1 = \sqrt{2\kappa a}$, gdzie a jest operatorem anihilacji, a κ jest współczynnikiem opisującym przejrzystość lustra. Atom również oddziałuje z otoczeniem ponieważ ma poziom wzbudzony $|2\rangle$, z którego w wyniku emisji spontanicznej może przejść do poziomu podstawowego. Z powodów, które zostaną wyjaśnione później, w modelu zaproponowanym przez Bosego i jego kolegów [19] użyty został atom o dwóch podpoziomach stanu podstawowego $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Wszystkie trzy poziomy tworzą schemat, który jak widać na rysunku 3.1, przypomina grecką dużą literę lambda. Powstały w



Rysunek 3.1: Schemat atomu trójpoziomowego typu Λ

emisji spontanicznej foton trafia do modu innego niż mod wnęki i zostaje pochłonięty przez otoczenie. Wówczas atom przechodzi ze stanu wzbudzonego $|2\rangle$ albo do podpoziomu stanu podstawowego $|0\rangle$, co opisuje operator $C_2 = \sqrt{\gamma} |0\rangle \langle 2|$, albo do podpoziomu stanu podstawowego $|1\rangle$, czemu odpowiada operator $C_3 = \sqrt{\gamma} |1\rangle \langle 2|$. W tych dwóch operatorach Lindblada γ jest współczynnikiem emisji spontanicznej Einsteina.

3.3 Rozsupływanie równania "master"

Równanie "master" opisuje ewolucje układu otwartego statystycznie, używając zespołów stanów czystych w macierzy gęstości. Bardzo długo taki statystyczny opis w zupełności wystarczał, ponieważ doświadczalna obserwacja wykonalna była jedynie dla wielkich zespołów układów kwantowych. Chociaż istnienie kwantowych skoków, charakterystycznych dla pojedynczych otwartych układów kwantowych, założone było już dawno w słynnej pracy Einsteina [71] na temat współczynników emisji spontanicznej i wymuszonej, to długo uważano, że pomiary i manipulacja wykonywane na pojedynczych układach kwantowych są niemożliwe. W nieco skrajny sposób ten pogląd został wyrażony w 1952 roku przez Schrödingera [72], który porównał możliwość eksperymentowania z pojedynczymi układami kwantowymi do możliwości przejażdzki w ZOO na Ichtiozaurze. Jednakże szybki rozwój technik eksperymentalnych zdecydowanie zmienił sytuacje. Obecnie możliwa jest zarówno manipulacja pojedynczymi układami kwantowymi, jak i ich efektywna obserwacja. Wykonywano już doświadczenia, w których więziono jony atomów w pułapkach Paula i dowolnie nimi manipulowano, oświetlając wyłącznie wybrane jony laserem. Przykładem wykorzystania pułapki Paula są chociażby ostatnie doświadczalne realizacje teleportacji stanów atomowych [17,18], w których uwięziono i manipulowano trzema jonami. Z punktu widzenia propozycji teleportacji stanów odległych atomów ważniejsze jest jednak to, że wykonywano również i doświadczenia z uwięzieniem jednego jonu [73–76] lub dwóch jonów [77] wewnątrz optycznej wnęki rezonansowej. Efektywna obserwacja jest natomiast możliwa dzięki nowej generacji półprzewodnikowych detektorów lawinowych zdolnych wykryć pojedynczy foton z 88 procentowym prawdopodobieństwem [78-80].

Nowe możliwości techniczne, pozwalające na eksperymentowanie z pojedynczymi układami kwantowymi, wymusiły opracowanie metody trajektorii kwantowych — nowej teoretycznej metody opisu indywidualnych realizacji stanu układu. Trajektorie kwantowe pozwalają na analizowanie ewolucji wyznaczonej przez równanie "master" dla danego układu otwartego w sposób, który upodabnia mechanikę kwantową do klasycznej fizyki statystycznej. W tym podejściu generowany jest zespół trajektorii za pomocą grupy równań stochastycznych. Każda trajektoria opisuje jedną z możliwych ewolucji układu oddziałującego z otoczeniem. Wartości oczekiwane uśrednione po wszystkich trajektoriach są zgodne z wartościami oczekiwanymi otrzymanymi za pomocą równania "master".

Carmichael wraz ze swoimi współpracownikami [81] wyprowadził metodę trajektorii kwantowych z teorii pomiarów wyznaczającej rozkłady prawdopodobieństwa zliczania fotonów, emitowanych przez źródła fotoemisyjne [82].

3.3. ROZSUPŁYWANIE RÓWNANIA "MASTER"

Pełne wyprowadzenie metody trajektorii kwantowych można znaleźć w książce Carmichaela [83] oraz w pracy przeglądowej [84], a tutaj, ze względu na jego obszerność, ograniczone zostanie jedynie do rozsupłania równania "master" bez wyprowadzania fizycznych interpretacji odpowiednich wielkości i wyrażeń.

Procedura rozsupływania zaczyna się od dodania i odjęcia superoperatora S w równaniu (3.31), co prowadzi do następującej postaci równania "master"

$$\dot{\rho} = (\mathcal{L} - \mathcal{S} + \mathcal{S})\rho. \qquad (3.34)$$

Równanie "master" w takiej formie jest tak samo dokładne jak równanie (3.31), ale jego formalne rozwiązanie

$$\rho(t) = e^{[(\mathcal{L} - \mathcal{S}) + \mathcal{S}]t} \rho(0) \tag{3.35}$$

pozwala na użycie poniższej tożsamości

$$\exp[(L+aS)x] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_0^{x_2} dx_1 e^{L(x-x_n)} S e^{L(x_n-x_{n-1})} S \dots S e^{Lx_1},$$
(3.36)

w wyniku czego rozwiązanie równania "master" przyjmuje poniższą postać

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{t} dt_{n} \int_{0}^{t_{n}} dt_{n-1} \dots \int_{0}^{t_{2}} dt_{1} \Big(e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_{n})} \mathcal{S} \\
\times e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t_{n}-t_{n-1})} \mathcal{S} \dots \mathcal{S} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_{1}} \rho(0) \Big).$$
(3.37)

Należy zwrócić uwagę na dowolność, jaka się pojawia przy wyborze superoperatora \mathcal{S} , ponieważ różne superoperatory \mathcal{S} prowadzą do różnych interpretacji równania (3.37). Z punktu widzenia teorii pomiarów wygodnie jest obrać taką postać superoperatora \mathcal{S} , aby opisywał on emisję fotonu z układu otwartego

$$S\rho = \sum_{i} C_{i}\rho C_{i}^{\dagger} \,. \tag{3.38}$$

Wówczas superoperator $\mathcal{L}-\mathcal{S}$ jest zdefiniowany następująco

$$(\mathcal{L} - \mathcal{S})\rho = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho] - \frac{1}{2}\sum_i \{\rho, C_i^{\dagger}C_i\}_+$$
(3.39)

i opisuje ewolucję układu otwartego w okresie czasu, w którym nie następuje żadna emisja. Po ustaleniu postaci superoperatora ${\cal S}$ wyraźnie widać z

równania (3.37), że rozwiązanie równania "master" $\rho(t)$ jest sumą po wszystkich możliwych ścieżkach ewolucji układu otwartego, to znaczy po wszystkich możliwych liczbach emisji i po wszystkich możliwych czasach tych emisji. Jeżeli oddziaływanie układu otwartego z otoczeniem opisuje więcej niż jeden operator Lindblada, to sumuje się również po wszystkich możliwych sekwencjach zadziałania poszczególnych operatorów. Żeby to uwidocznić, równanie (3.37) wystarczy zapisać w postaci

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{t} dt_n \int_{0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{0}^{t_2} dt_1 \Big(e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_n)} \big(\sum_i \mathcal{S}_i\big) \\ \times e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t_n-t_{n-1})} \big(\sum_i \mathcal{S}_i\big) \dots \big(\sum_i \mathcal{S}_i\big) e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_1} \rho(0) \Big), \quad (3.40)$$

gdzie

$$\mathcal{S}_i \rho = C_i \rho C_i^{\dagger} \,. \tag{3.41}$$

Natomiast równanie (3.40) może być przepisane, po wymnożeniu nawiasów z sumami, w następujący sposób

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{i_j\}} \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \Big(e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_n)} \mathcal{S}_{i_n} \\ \times e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t_n-t_{n-1})} \mathcal{S}_{i_{n-1}} \dots \mathcal{S}_{i_1} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_1} \rho(0) \Big).$$
(3.42)

Teraz widać, że każda ścieżka ewolucji układu lub inaczej każda trajektoria kwantowa jest określona przez liczbę emisji, ich czasy oraz rodzaj tych emisji. Stan układu otwartego w czasie t, gdy nastąpi n emisji w oznaczonych czasach, opisanych przez odpowiednie operatory Lindblada dany jest warunkową macierzą gęstości $\rho_c(t)$

$$\rho_c(t) = \frac{\tilde{\rho}_c(t)}{tr(\tilde{\rho}_c(t))}, \qquad (3.43)$$

gdzie $\tilde{\rho}_c(t)$ jest nieunormowaną warunkową macierzą gęstości

$$\widetilde{\rho}_{c}(t) = e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t-t_{n})} \mathcal{S}_{i_{n}} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})(t_{n}-t_{n-1})} \mathcal{S}_{i_{n-1}} \dots \mathcal{S}_{i_{1}} e^{(\mathcal{L}-\mathcal{S})t_{1}} \rho(0) .$$
(3.44)

Powyżej opisaną procedurę nazywa się rozsupływaniem równania "master", ponieważ pozwala ona na przejście od opisu statystycznego równania "master", wspólnego dla wszystkich realizacji układu otwartego, do nieskończonej liczby trajektorii kwantowych opisujących indywidualne realizacje układu otwartego. Przetworzenie dynamiki kwantowej zawartej w równaniu

"master" na nieskończoną liczbę trajektorii kwantowych ma dwie bardzo ważne zalety. Po pierwsze dostarcza gotowego przepisu na obliczanie macierzy gęstości (3.43), opisującej stan pojedynczego układu kwantowego po ewolucji obserwowanej w sposób ciągły przez detektory. Dzięki temu teoretyczny opis, odpowiadający nowym możliwościom eksperymentalnym, jest już dostępny. Po drugie umożliwia stosowanie wektorów zamiast macierzy do określania stanów układów otwartych. Macierze gęstości były niezbędne w podejściu równania "master" ze względu na brak informacji na temat oddziaływania układu otwartego z otoczeniem. Wtedy możliwe było jedynie ustalenie z jakim prawdopodobieństwem układ znajduje się w jakimś stanie czystym po oddziaływaniu z otoczeniem. Tymczasem każda trajektoria kwantowa zawiera w sobie pełna informację o oddziaływaniu układu z otoczeniem i w związku z tym jeśli początkowo układ znajdował się w stanie czystym $\rho(0)$, to w każdej chwili t ewolucji, opisanej przez trajektorię kwantową, również znajduje się w stanie czystym. To prowadzi do znacznego uproszczenia liczenia ewolucji układu otwartego. W przypadku ewolucji bez emisji równanie różniczkowe z superoperatorami działającymi na macierz gęstości daje się sprowadzić do równania różniczkowego z operatorami działającymi na wektory. Superoperatory $\exp\left[(\mathcal{L}-\mathcal{S})\Delta t\right]$, opisujące ewolucję bez emisji w czasie Δt w równaniu (3.44) są rozwiązaniem równania

$$\dot{\rho}_c = (\mathcal{L} - \mathcal{S})\rho_c \,, \tag{3.45}$$

które po uwzględnieniu (3.39) przyjmuje postać

$$\dot{\rho}_c = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_c] - \frac{1}{2} \sum_i \{\rho_c, C_i^{\dagger} C_i\}_+.$$
(3.46)

Odpowiednio porządkując wyrazy w (3.46), otrzymuje się równanie

$$i\hbar\dot{\rho}_c = \left(H_S - \frac{i\hbar}{2}\sum_i C_i^{\dagger}C_i\right)\rho_c - \rho_c\left(H_S + \frac{i\hbar}{2}\sum_i C_i^{\dagger}C_i\right),\qquad(3.47)$$

w którym uwzględnia się fakt, że stan układu jest czysty, czyli $\rho_c = |\tilde{\psi}_c\rangle \langle \tilde{\psi}_c|$. Po prostych przekształceniach równanie wyznaczające ewolucję stanu układu daje się sprowadzić do postaci

$$\left(i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_{c}\rangle\right)\langle\tilde{\psi}_{c}| - \left[\left(i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_{c}\rangle\right)\langle\tilde{\psi}_{c}|\right]^{\dagger} = H_{\text{eff}}|\tilde{\psi}_{c}\rangle\langle\tilde{\psi}_{c}| - \left[H_{\text{eff}}|\tilde{\psi}_{c}\rangle\langle\tilde{\psi}_{c}|\right]^{\dagger},$$
(3.48)

gdzie $H_{\rm eff}$ jest niehermitowskim hamiltonianem efektywnym danym wyrażeniem

$$H_{\text{eff}} = H_S - \frac{i\hbar}{2} \sum_i C_i^{\dagger} C_i \,. \tag{3.49}$$

Z (3.48) wyraźnie widać, że musi być prawdziwe poniższe równanie

$$\left(i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_c\rangle\right)\langle\tilde{\psi}_c| = H_{\text{eff}}|\tilde{\psi}_c\rangle\langle\tilde{\psi}_c|\,,\qquad(3.50)$$

które po obustronnym pomnożeniu przez wektor $|\tilde{\psi}_c\rangle$, a następnie obustronnym podzieleniu przez otrzymany kwadrat normy tego wektora, sprowadza się do równania Schrödingera z hamiltonianem efektywnym

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}_c\rangle = H_{\text{eff}} |\tilde{\psi}_c\rangle.$$
 (3.51)

Równanie Schrödingera z niehermitowskim hamiltonianem efektywnym jest równaniem nieunitarnym, co jest oczywiste, zważywszy na fakt, że pochodzi ono z równania (3.44), które również prowadziło do zaniku normy.

Przypadek emisji jest jeszcze prostszy. Przyjmując że podczas całej ewolucji układ znajduje się w stanie czystym, zmianę stanu spowodowaną emisją można przedstawić następująco

$$|\tilde{\psi}_c'\rangle\langle\tilde{\psi}_c'| = \mathcal{S}_i|\psi_c\rangle\langle\psi_c| = C_i|\psi_c\rangle\langle\psi_c|C_i^{\dagger}.$$
(3.52)

Zatem jeśli przed emisją układ znajdował się w unormowanym stanie $|\psi_c\rangle$, to po emisji znajdować się będzie w stanie $|\tilde{\psi}'_c\rangle = C_i |\psi_c\rangle$. Również podczas tej operacji norma wektora zanika i dlatego wektor $|\tilde{\psi}'_c\rangle$ musi zostać unormowany.

Utrata normy wektora stanu podczas ewolucji warunkowej może być postrzegana jako wada, jednak w rzeczywistości dostarcza bardzo ważnej wiedzy o prawdopodobieństwie wystąpienia emisji fotonu z układu do otoczenia. Teoria pomiarów pozwala zinterpretować ślad z nieunormowanej macierzy gęstości, występującej po lewej stronie równania (3.52), przemnożony przez bardzo mały przedział czasu Δt , jako prawdopodobieństwo emisji opisanej operatorem Lindblada C_i w tym przedział czasu

$$p_i = \operatorname{tr}(S_i \rho_c) \Delta t = \langle \psi_c | C_i^{\dagger} C_i | \psi_c \rangle \Delta t \,. \tag{3.53}$$

Oczywiście prawdopodobieństwo wystąpienia jakiejkolwiek emisji jest dane następującym wzorem

$$p = \operatorname{tr}(S\rho_c)\Delta t = \sum_i \langle \psi_c | C_i^{\dagger} C_i | \psi_c \rangle \Delta t \,. \tag{3.54}$$

Z kolei zmniejszanie się normy wektora stanu podczas liczenia ewolucji z wykorzystaniem nieunitarnego równania Schrödingera (3.51) odpowiada zmniejszaniu się prawdopodobieństwa, że w czasie tej ewolucji nie nastąpi żadna emisja. Jeśli w czasie t stan opisany jest unormowanym wektorem $|\psi_c(t)\rangle$, to kwadrat normy rozwiązania nieunitarnego równania Schrödingera dla czasu $t + \Delta t$ jest równy prawdopodobieństwu braku emisji w tym przedziale czasu

$$P_{\rm be} = \langle \tilde{\psi}_c(t + \Delta t) | \tilde{\psi}_c(t + \Delta t) \rangle$$

= $\langle \psi_c(t) | e^{(i/\hbar)H_{\rm eff}^{\dagger} \Delta t} e^{-(i/\hbar)H_{\rm eff} \Delta t} | \psi_c(t) \rangle$ (3.55)

Ta definicja, w przeciwieństwie do definicji (3.53) oraz (3.54), jest prawidłowa dla dowolnie dużego Δt . Przyjęcie bliskich zera wartości Δt pozwala na powiązanie kwadratu normy wektora stanu z prawdopodobieństwem emisji w czasie Δt . Otóż dla bardzo małych wartości Δt można eksponensy w (3.55) rozwinąć w szereg do wyrazu liniowego względem Δt , to znaczy dokonać podstawienia $\exp(-(i/\hbar)H_{\text{eff}}\Delta t) \approx 1 - (i/\hbar)H_{\text{eff}}\Delta t$. Wówczas daje się równanie (3.55) sprowadzić do prostej postaci

$$P_{\rm be} \approx \langle \psi_c(t) | (1 - \sum_i C_i^{\dagger} C_i \Delta t) | \psi_c(t) \rangle = 1 - p, \qquad (3.56)$$

dowodzącej zgodności interpretacji (3.54) i (3.55).

3.4 Algorytmy trajektorii kwantowych

Dzięki rozsupłaniu równania "master" możliwe się stało łatwe wyznaczanie ewolucji warunkowej układu otwartego, a to z kolei umożliwia w łatwy sposób numeryczne znalezienie rozwiązania równania "master". Na pierwszy rzut oka wydaje się, że równanie (3.42) łączące rozwiązanie równania "master" z warunkowymi macierzami gęstości jest zbyt skomplikowane, by mogło posłużyć w obliczeniach. Jednak występujące w nim sumowania i całki można łatwo obliczyć, stosując numeryczną metodę, nazywaną metodą Monte Carlo. W tym przypadku zastosowanie tej metody polega na losowym wygenerowaniu bardzo wielu macierzy ρ_c , a następnie wyznaczeniu ich średniej arytmetycznej.

Przypadkowe tworzenie ścieżki ewolucji kwantowej można realizować stosując dwa różne, ale też równoważne sobie pod względem otrzymywanych wyników algorytmy. Pierwszy z algorytmów jest przedstawiony w książce Carmichaela [83]. Jest on mniej praktyczny zarówno do zastosowania w programach do obliczeń numerycznych, jak i do analitycznego liczenia ewolucji warunkowej, ale stanowi bardzo dobrą ilustrację działania tej kwantowej wersji metody Monte Carlo. Zanim przedstawiony zostanie ten pierwszy algorytm, należy zebrać warunki umożliwiające policzenie trajektorii. W obu algorytmach do utworzenia trajektorii niezbędna jest znajomość stanu początkowego układu otwartego, hamiltonianu efektywnego $H_{\rm eff}$, rządzącego ewolucją bez emisji oraz kompletu operatorów Lindblada C_i . Jak wspomniano wcześniej, zakłada się że początkowo układ otwarty znajduje się w stanie czystym $|\psi(0)\rangle$. W pierwszym algorytmie niezbędne jest ponadto ustalenie postępu Δt , o jaki będzie zwiększał się czas w każdym kroku liczenia ewolucji stanu układu. Właściwy dobór Δt nie jest łatwym zagadnieniem. Jak dokonać tego wyboru opisane będzie później. Przedział czasu Δt pozwala przejść od czasu zmieniającego się w sposób ciągły do dyskretnego zbioru czasów $t_k = k\Delta t$. Znając stan układu $|\psi_c(t_k)\rangle$ w czasie t_k , można wyznaczyć stan układu w kolejnym czasie, stosując następującą procedurę:

1. wyznacza się prawdopodobieństwo wystąpienia emisji w przedziale czasu od t_k do t_{k+1}

$$p(t_k) = \sum_{i} p_i(t_k) = \sum_{i} \langle \psi_c(t_k) | C_i^{\dagger} C_i | \psi_c(t_k) \rangle \Delta t$$
(3.57)

- 2. losuje się liczbę r_k z przedziału [0, 1]
- 3. jeśli wylosowana liczba spełnia warunek $r_k > p(t_k)$, to oznacza to, że w tym przedziale czasu nie nastąpiła emisja i nieunormowany wektor opisujący stan układu w czasie t_{k+1} oblicza się, rozwiązując nieunitarne równanie Schrödingera

$$\widetilde{\psi}_c(t_{k+1})\rangle = e^{-(i/\hbar)H_{\text{eff}}\Delta t}|\psi_c(t_k)\rangle$$
(3.58)

- 4. jeśli wylosowana liczba spełnia nierówność $r_k \leq p(t_k)$, to oznacza to wystąpienie emisji spontanicznej; należy wówczas ustalić rodzaj emisji i obliczyć nieunormowany wektor stanu w następujący sposób:
 - a) losuje się liczbę l z przedziału [0, 1]
 - b) ustala się którym operatorem Lindblada należy zadziałać, szukając najmniejszej liczby m, dla której spełniony jest warunek

$$l - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i(t_k)}{p(t_k)} \le 0 \tag{3.59}$$

c) oblicza się nieunormowany wektor stanu układu, używając operatora Lindblada ${\cal C}_m$

$$|\hat{\psi}_c(t_{k+1})\rangle = C_m |\psi_c(t_k)\rangle \tag{3.60}$$

5. normuje się wektor opisujący stan układu w czasie t_{k+1}

$$|\psi_c(t_{k+1})\rangle = \frac{|\psi_c(t_{k+1})\rangle}{\sqrt{\langle \tilde{\psi}_c(t_{k+1}) | \tilde{\psi}_c(t_{k+1}) \rangle}}$$
(3.61)

3.4. ALGORYTMY TRAJEKTORII KWANTOWYCH

Stosując powyżej przedstawiony algorytm bez trudu można wygenerować losową trajektorię przedstawiającą ewolucję układu od stanu początkowego do stanu, w jakim układ znajdzie w czasie końcowym. W ten sposób wylicza się kilka tysięcy, bądź nawet kilkadziesiąt tysięcy losowych trajektorii startujących od początkowego stanu $|\psi_c(0)\rangle$. Wówczas można policzyć wartości średnie zgodne z rozwiązaniami równania "master", co łatwo udowodnić dla pojedynczego kroku Δt . Dla wielkiej liczby losowań częstość występowania emisji oraz częstość braku emisji będą, zgodnie z prawem wielkich liczb, dążyć do prawdopodobieństw p oraz 1 - p, odpowiednio. Dlatego dla odpowiednio wielkiej liczby powtórzeń ewolucji układu w wyniku uśrednienia otrzyma się stan mieszany, dany następującą macierzą gęstości

$$\rho(\Delta t) = (1-p) |\psi_{\text{bez emisji}}(\Delta t)\rangle \langle \psi_{\text{bez emisji}}(\Delta t)| + p |\psi_{\text{emisja}}(\Delta t)\rangle \langle \psi_{\text{emisja}}(\Delta t)|
= (1-p) \frac{e^{-(i/\hbar)H_{\text{eff}}\Delta t} |\psi_c(0)\rangle \langle \psi_c(0)| e^{(i/\hbar)H_{\text{eff}}^{\dagger}\Delta t}}{\sqrt{1-p}\sqrt{1-p}}
+ p \sum_i \frac{p_i}{p} \frac{C_i |\psi_c(0)\rangle \langle \psi_c(0)| C_i^{\dagger}}{\sqrt{(p_i/\Delta t)}\sqrt{(p_i/\Delta t)}}.$$
(3.62)

Po rozwinięciu eksponensów w szereg i ucięciu szeregów na wyrazie liniowym względem Δt oraz po uproszczeniu otrzymuje się równanie

$$\rho(\Delta t) = (1 - (i/\hbar)H_{\text{eff}}\Delta t)\rho(0)(1 + (i/\hbar)H_{\text{eff}}^{\dagger}\Delta t)
+ \Delta t \sum_{i} C_{i}\rho(0)C_{i}^{\dagger},$$
(3.63)

które po odrzuceniu wyrazu proporcjonalnego do Δt^2 daje się przedstawić w postaci

$$\frac{\rho(\Delta t) - \rho(0)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho(0)] - \frac{1}{2} \sum_i \{\rho(0), C_i^{\dagger} C_i\}_+ + \sum_i C_i \rho(0) C_i^{\dagger}.$$
(3.64)

Jak widać, w granicy $\Delta t \rightarrow 0$, lewa strona równania (3.64) będzie dążyć do $\dot{\rho}$, a całe równanie do równania "master" (3.30). Zatem dla nieskończenie małej wartości Δt rozwiązanie otrzymane z trajektorii kwantowych jest równe dokładnemu rozwiązaniu równania "master". Oczywiście w algorytmach realizowanych przez komputer nie można używać wielkości nieskończenie małych. Ale nie ma czym się martwić, gdyż nie ma potrzeby używania nieskończenie małej wartości Δt . Co więcej, nierozsądne jest użycie nawet skończonych, lecz tak małych wartości, na jakie pozwala komputer, ponieważ zwiększałyby to tylko niepotrzebnie czas obliczeń, nie zmieniając istotnie wyników. Czym zatem należy się kierować przy wyborze Δt ? Po pierwsze Δt musi być na tyle małe, aby prawdopodobieństwo policzone z równania (3.54) spełniało podstawowy aksjomat, to znaczy nie było większe od jedności. Ponadto należy zadbać o to, by wzór (3.54) był wystarczająco dokładny, co prowadzi do warunku, by wszystkie $p(t_k) \ll 1$. Po drugie, jeśli w skład dynamiki zawartej w równaniu "master" wchodzą oscylacje z częstością Ω , to oscylacje te będą widoczne tylko wtedy, gdy Δt będzie na tyle małe, że będzie spełniać warunek $\Omega \ll 2\pi\Delta t^{-1}$. Podobnie jest ze stałymi tłumienia. Tak więc jeśli γ jest współczynnikiem emisji spontanicznej, to musi być spełniony warunek $\gamma \ll 2\pi\Delta t^{-1}$. Po trzecie krok Δt trzeba dobierać jeszcze ostrożniej w przypadku hamiltonianu efektywnego zależnego od czasu. Okazuje się, że za pomocą trajektorii kwantowych można uzyskać poprawne wyniki również i w tym przypadku, jednak należy przyjąć na tyle małe Δt , aby przybliżenie

$$\begin{aligned} |\widetilde{\psi}(t_0 + \Delta t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt H_{\text{eff}}(t)\right) |\psi(t_0)\rangle \\ &\approx \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}}(t_0) \Delta t\right) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned} (3.65)$$

było wystarczająco dobre.

Drugi algorytm liczenia trajektorii kwantowych wykorzystuje zanik normy do ustalenia czasu wystąpienia emisji. Więc zamiast dzielić czas ewolucji na bardzo małe przedziały Δt i dla każdego z tych przedziałów ustalać, czy nastąpiła emisja, czy nie, losuje się liczbę r_k i tak wydłuża się czas ewolucji bez emisji, aż prawdopodobieństwo nie wystąpienia emisji dane wzorem (3.55) zrówna się z r_k . Kolejność działań jest więc następująca

- 1. losuje się liczbę $r_k \in [0, 1],$
- 2. rozwiązuje się nieunitarne równanie Schrödingera z początkowym stanem opisanym unormowanym wektorem $|\psi_c(t_0)\rangle$; ewolucja bez emisji, którą opisuje to nieunitarne równanie Schrödingera, kończy się dla czasu t_e , dla którego kwadrat normy wektora stanu jest równy wylosowanej liczbie r_k czyli gdy $\langle \tilde{\psi}_c(t_e) | \tilde{\psi}_c(t_e) \rangle = r_k$.
- 3. w czasie t_e następuje emisja; operator odpowiadający jej rodzajowi wyznacza się tak samo, jak w pierwszym algorytmie:
 - a) losuje się liczbę l z przedziału [0, 1],
 - b) ustala się, którym operatorem Lindblada należy zadziałać, szukając najmniejszej liczby m, dla której spełniony jest warunek

$$l - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i(t_e)}{p(t_e)} \le 0, \qquad (3.66)$$
c) oblicza się nieunormowany wektor stanu układu, używając operatora Lindblada ${\cal C}_m$

$$\left|\tilde{\psi}_{c}'(t_{e})\right\rangle = C_{m}\left|\tilde{\psi}_{c}(t_{e})\right\rangle,\tag{3.67}$$

4. normuje się wektor stanu $|\tilde{\psi}'_c(t_e)\rangle$ i wraca się z nim, jako stanem początkowym do punktu pierwszego.

Warto wspomnieć, że do rozwiązania nieunitarnego równania Schrödingera możliwe jest użycie wszystkich standardowych technik stosowanych do rozwiązywania zwykłego równania Schrödingera. W obliczeniach numerycznych można się zatem posłużyć, na przykład, algorytmem rozwiązywania równań różniczkowych Rungego-Kutty.

Każdy z przedstawionych algorytmów pozwala wyznaczyć warunkowy wektor stanu układu $|\psi_c(t)\rangle$ dla dowolnego czasu t. Wyliczenie wielu przypadkowych trajektorii pozwala wyznaczyć, za pomocą uśrednienia, macierz gęstości $\rho(t)$, będącą rozwiązaniem równania "master". Jednak powracanie do opisu stanu macierzą gęstości nie jest konieczne. Do otrzymania wszystkich możliwych wyników wystarczy posługiwanie się wyłącznie warunkowymi wektorami stanu. Wartość oczekiwaną dowolnego operatora A(t) daje się policzyć, wyznaczając najpierw wartości oczekiwane tego operatora dla każdej trajektorii według wzoru

$$\langle A(t) \rangle_c \equiv \langle \psi_c(t) | A(t) | \psi_c(t) \rangle , \qquad (3.68)$$

a następnie licząc wartość średnią ze wszystkich N trajektorii

$$\langle A(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{c=1}^{N} \langle A(t) \rangle_c \,. \tag{3.69}$$

Bardzo ciekawą metodą otrzymywania wyników jest zapisywanie i analizowanie czasów wystąpienia emisji. Ten sposób otrzymywania danych bardzo przypomina doświadczenie, ponieważ wynikami eksperymentu również są zarejestrowane czasy wykrycia fotonów przez detektory. Analizując czasy emisji, można otrzymać wiele różnych informacji o układzie. Co ciekawe, niektóre z tych informacji są trudne do otrzymania innymi metodami. Przykładem zadania łatwego wyłącznie z wykorzystaniem tej metody jest wyznaczenie rozkładu czasów oczekiwania, czyli rozkładu prawdopodobieństwa, mówiącego po jakim czasie po pierwszej emisji można się spodziewać emisji drugiej.

Rozdział 4

Interferencja pól na płytce światłodzielącej

W urządzeniach służących do teleportacji jednym z najistotniejszych elementów jest układ pozwalający wykonać połączony pomiar stanu dwóch kubitów. Taki pomiar zmienia przypadkowo na cztery możliwe sposoby stan tych kubitów. Kolejność działań w procesie teleportacji jest warunkowa, ponieważ jest uzależniona od wyniku połączonego pomiaru. Dzięki trajektoriom kwantowym możliwe jest śledzenie ewolucji warunkowej. Trzeba jednak w tym celu dysponować hamiltonianem układu oraz operatorami opisującymi zmianę stanu układu kubitów podczas wykrycia przez różne detektory fotonu. W przypadku urządzenia do teleportacji stanów atomowych, uwidocznionego na rysunku 2.13, a będącego głównym przedmiotem badań przedstawionych w tej rozprawie, detektory mierzą stan pól wnęk rezonansowych. Gdyby na schemacie 2.13 nie było płytki półprzepuszczalnej, to zdarzeniu wykrycia emisji przez detektory D_+ lub D_- odpowiadałby jeden z operatorów Lindblada

$$C_A = \sqrt{2\kappa}a_A$$
 lub $C_B = \sqrt{2\kappa}a_B$, (4.1)

odpowiednio. Jak napisano wcześniej, κ jest współczynnikiem opisującym przejrzystość lustra. Natomiast a_A i a_B są operatorami anihilacji pola w odpowiednich wnękach. Sytuacja się jednak zmienia po wprowadzeniu płytki światłodzielącej, na której interferują pola wychodzące z obu rezonatorów. Dzięki tej interferencji daje się zrealizować połączony pomiar stanu obu kubitów, ale obecność tej interferencji zmienia postaci operatorów odpowiadających zasygnalizowaniu emisji przez każdy z detektorów. W rozdziale tym wyprowadzone zostaną operatory emisji dla układu pomiarowego złożonego z płytki światłodzielącej i dwóch detektorów [85]. Poza tym zostanie pokazane, że płytka światłodzieląca może posłużyć do modelowania działania

detektorów o mniejszej niż stuprocentowa efektywności wykrywania fotonów.

4.1 Kwantowy opis działania płytki światłodzielącej

Niech na płytce światłodzielącej interferują dwa mody pola elektromagnetycznego, opisane operatorami anihilacji a_1 i a_2 , jak przedstawiono na rysunku 4.1. W wyniku tej interferencji pojawiają się dwa mody wychodzące z



Rysunek 4.1: Płytka światłodzieląca z kwantowymi modami pola elektromagnetycznego na wejściach i wyjściach.

płytki światłodzielącej. Opisane są one operatorami anihilacji a_3 i a_4 . Oczywiście mody wychodzące muszą się dać przedstawić superpozycjami modów wchodzących. Jeśli przez t oznaczy się zespolony współczynnik proporcjonalności dla promienia przechodzącego, a przez r dla promienia odbitego, to superpozycje te przybierają postać

$$\begin{array}{rcl}
a_3 &=& ta_1 + ra_2 \,, \\
a_4 &=& ta_2 + ra_1 \,. \\
\end{array} \tag{4.2}$$

Współczynniki t i r muszą być tak dobrane, aby operatory anihilacji a_3 i a_4 były prawidłowo określone, to znaczy, że muszą być spełnione następujące związki komutacyjne

$$[a_3, a_3^{\dagger}] = [a_4, a_4^{\dagger}] = 1, \qquad (4.3)$$

oraz

$$[a_3, a_4^{\dagger}] = 0. (4.4)$$

Ze związku (4.3) można wyprowadzić pierwsze z równań, w którym współczynniki t i r muszą spełniać zależność

$$|t|^2 + |r|^2 = 1. (4.5)$$

Równanie (4.5) oznacza, że współczynniki t i r muszą być unormowane. Zatem dla fotonu padającego na płytkę suma prawdopodobieństwa odbicia $|r|^2$ i prawdopodobieństwa przeniknięcia $|t|^2$ jest równa jedności. Oczywiście w doświadczeniu występować też będą przypadki pochłonięcia fotonu przez płytkę. Jednak są to na tyle rzadkie przypadki, że nie uwzględnienie procesu absorpcji w superpozycjach (4.2) jest przybliżeniem jak najbardziej uzasadnionym.

Kolejne równanie które musi być spełnione przez współczynnik
itirwynika ze związku (4.4)

$$tr^* + t^*r = 0. (4.6)$$

Aby móc wykorzystać to równanie, konieczne jest wyrażenie liczb zespolonych t i r przez ich wartości bezwzględne i ich fazy, czyli

$$t = |t|e^{i\phi_t}, \qquad r = |r|e^{i\phi_r}.$$
 (4.7)

Po podstawieniu (4.7) do (4.6) i wykorzystaniu wzoru Eulera otrzymuje się następujące równanie

$$|t||r|\cos(\phi_r - \phi_t) = 0.$$
(4.8)

Wartości |t| i |r| w granicach wyznaczonych przez unormowanie (4.5) mogą być dowolne. Zatem rozwiązaniem równania (4.8) jest różnica faz taka, że $\phi_r - \phi_t = \pi/2 + n\pi$, gdzie *n* jest dowolną liczbą całkowitą. Z tej nieskończonej liczby rozwiązań zostanie w dalszych obliczeniach wybrane jedno dla n = 0. Ponadto dla uproszczenia dalszych wzorów zostanie założone, że $\phi_t = 0$. Prowadzi to do wartości drugiej fazy równej $\phi_r = \pi/2$. Znajomość wartości faz pozwala zapisać współczynniki *t* i *r* następującymi wzorami

$$t = |t|, \quad r = i|r|.$$
 (4.9)

Te postaci współczynników można już z powrotem podstawić do równań (4.2). Jednak aby móc wykorzystać również warunek unormowania, rozpatrzony zostanie bardziej szczególny przypadek. W urządzeniu do teleportacji, przedstawionym na rysunku 2.13, użyta została płytka światłodzieląca półprzepuszczalna, to znaczy taka, że $|t|^2 = |r|^2 = 1/2$. Dla takiej płytki równania (4.2) przybierają postać

$$a_{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1} + ia_{2}),$$

$$a_{4} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_{1} - ia_{2}).$$
(4.10)

Łatwo zauważyć, że przedstawienie tych dwóch równań w postaci macierzowej prowadzi do opisu działania 50 procentowej płytki światłodzielącej macierzą \sqrt{X} (2.13). Dowodzi to możliwości zrealizowania półprzepuszczalnym lustrem bramki kwantowej $\sqrt{\text{NOT}}$. Jednak głównym celem tego podrozdziału jest wyprowadzenie postaci operatorów emisji związanych z układem z rysunku 2.13. Zatem potrzebne są podstawienia: $a_1 = a_A$ i $a_2 = a_B$, a także obustronne pomnożenie (4.10) przez czynnik $\sqrt{2\kappa}$. W wyniku tych działań otrzymuje się równania

$$\sqrt{2\kappa}a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_A + iC_B), \qquad (4.11)$$

$$\sqrt{2\kappa}a_4 = \frac{i}{\sqrt{2}}(C_A - iC_B), \qquad (4.12)$$

z których widać, że operatory emisji związane z każdym z dwóch detektorów są dane wyrażeniami $C_1 = \sqrt{2\kappa a_3}$ i $C_2 = \sqrt{2\kappa a_4}$. Ostatecznie operatory emisji dla tego układu przyjmują następującą postać

$$C_1 = \sqrt{\kappa}(a_A + ia_B), \qquad (4.13)$$

$$C_2 = \sqrt{\kappa}(a_A - ia_B). \tag{4.14}$$

W powyższych równaniach uwzględnione są wszystkie mody występujące w układzie i dlatego czynnik *i* występujący przed nawiasem w równaniu (4.12) jest czynnikiem globalnym, nie związanym z żadnym obserwowalnym efektem. W związku z tym, ten globalny czynnik fazowy został pominięty w równaniu (4.14).

4.2 Detektory z efektywnością mniejszą od jedności

Zwykle w modelach zakłada się, że detektory są doskonałe, ale w rzeczywistości posiadają one istotne wady, które muszą być wzięte pod uwagę przy realizacji doświadczeń. Pierwszą z wad jest istnienie tak zwanych ciemnych zliczeń. Wada ta polega na sygnalizowaniu od czasu do czasu wykrycia fotonu pomimo braku jakiejkolwiek emisji fotonu. Jeśli dalszą ewolucją eksperymentator kieruje, uzależniając ją od wystąpienia emisji fotonu z układu, to wystąpienie ciemnego zliczenia spowoduje wystąpienie błędu. Wpływ ten można znacząco osłabić, ustalając czas całej ewolucji, który jest znacznie krótszy od średniego czasu, dzielącego jedno ciemne zliczenie od drugiego. Drugą wadą rzeczywistych detektorów jest to, że nie zawsze sygnalizują wykrycie wyemitowanego przez układ fotonu. Jest oczywiste, że i ta niedoskonałość będzie prowadzić do otrzymywania błędnych wyników. Najlepsze z obecnie istniejących detektorów mają efektywność wykrywania fotonów równą 88% [78–80]. Jest to zbyt mało, aby móc zignorować wpływ skończonej efektywności detektorów na wyniki. Co gorsza, najczęściej używane detektory mają efektywność nie przekraczającą 50%. Ujęcie tego zagadnienia za pomocą klasycznego podejścia probabilistycznego nie zawsze wystarcza do przewidywania zachowania układów kwantowych i dlatego potrzebny jest kwantowy model detektora nieefektywnego. Takim modelem jest układ złożony z doskonałego detektora i płytki światłodzielącej. Układ taki przedstawiony jest na rysunku 4.2. Promień wychodzący z badanego układu tra-



Rysunek 4.2: Model niedoskonałego detektora.

fia na płytkę światłodzielącą. Operator a_U jest operatorem anihilacji modu pola elektromagnetycznego opisującego ten promień. Zwykle zakłada się, dla uproszczenia wzorów, że mod drugiego promienia wchodzącego znajduje się w stanie próżni. Operator anihilacji działający na ten drugi mod został oznaczony przez a_P . Jeden z promieni wychodzących z płytki światłodzielącej trafia na doskonały detektor. Każdy foton pojawiający się w tym modzie jest wykrywany, co odpowiada zadziałaniu operatora a_D . Jednak drugi promień trafia do zbiornika ciepła, którym jest otoczenie. Jeśli foton znajdzie się w tym modzie, to zostanie pochłonięty przez otoczenie, lecz nie zostanie wykryty. Taka emisja fotonu z układu do otoczenia jest opisana operatorem anihilacji a_Z . Modelowanie niedoskonałego detektora o efektywności η wykonuje się za pomocą takiego doboru współczynników t i r, że

$$|t|^2 = \eta$$
, $|r|^2 = 1 - \eta$. (4.15)

Równania (4.2) oraz (4.9) pozwalają na szybkie ustalenie postaci operatorów anihilacji promieni wychodzących z płytki światłodzielącej

$$a_D = \sqrt{\eta} a_U + i \sqrt{1 - \eta} a_P \,,$$

ROZDZIAŁ 4. INTERFERENCJA PÓL NA PŁYTCE...

$$a_Z = i\sqrt{1-\eta}a_U + \sqrt{\eta}a_P.$$
 (4.16)

Znając a_D i a_Z , łatwe jest wyznaczenie operatorów emisji. Pierwszy z nich, oznaczony symbolem C_D związany jest z emisją fotonu z układu, która została zarejestrowana przez detektor. Drugi z nich, C_Z związany z ucieczką fotonu z układu, nie zarejestrowaną przez detektor. Postać tych operatorów emisji dana jest wyrażeniami

$$C_D = \sqrt{\eta} C_U + i \sqrt{2\kappa} (1-\eta) a_P,$$

$$C_Z = i \sqrt{1-\eta} C_U + \sqrt{2\kappa \eta} a_P,$$
(4.17)

gdzie $C_U = \sqrt{2\kappa}a_U$. Jak wspomniano wcześniej, założenie stanu próżni na drugim wejściu płytki światłodzielącej prowadzi do uproszczenia rachunków. Zostanie to założenie teraz wykorzystane. Ponieważ drugi mod wejściowy zawsze znajduje się w stanie próżni, to stan całego układu jest dany iloczynem stanu badanego układu $|\psi\rangle$ i stanu $|0\rangle_P$. Zatem wynik działania operatorów emisji na dowolny stan jest następujący

$$C_D |\psi\rangle \otimes |0\rangle_P = (\sqrt{\eta} C_U |\psi\rangle) \otimes |0\rangle_P,$$

$$C_Z |\psi\rangle \otimes |0\rangle_P = (i\sqrt{1-\eta} C_U |\psi\rangle) \otimes |0\rangle_P.$$
(4.18)

Ponieważ drugi mod wejściowy zawsze znajduje się w stanie próżni, to $|0\rangle_P$ można pominąć i zapisać

$$C_D = \sqrt{\eta} C_U,$$

$$C_Z = i\sqrt{1-\eta} C_U.$$
(4.19)

Jak widać, nieefektywność detektora prowadzi do konieczności zastąpienia jednego operatora emisji z układu C_U dwoma operatorami C_D i C_Z . Brak pełnej wiedzy o oddziaływaniu układu z otoczeniem powoduje, że układ znajduje się, po ewolucji śledzonej przez niedoskonały detektor, w stanie mieszanym. Nie jest to jednak problemem, gdy stosuje się trajektorie kwantowe. Wartości średnie otrzymane z wielu trajektorii kwantowych będą odpowiadać wartościom uśrednionym z wielu eksperymentów.

Jest rzeczą oczywistą, że również proces teleportacji będzie ulegać wpływowi skończonej efektywności detektorów. Dlatego należy wyprowadzić odpowiednie operatory emisji dla układu teleportującego stany atomowe z rysunku 2.13. Można to zrobić bez trudu, korzystając z równań (4.19), (4.11) i (4.12). Operatory emisji wykrytych przez detektory D_+ i D_- są odpowiednio równe

$$C_1 = \sqrt{\kappa \eta} (a_A + ia_B),$$

$$C_2 = \sqrt{\kappa \eta} (a_A - ia_B).$$
(4.20)

80

Zaś operatory emisji nie zarejestrowanych przez żaden z detektorów są dane wyrażeniami

$$C_{3} = \sqrt{\kappa(1-\eta)}(a_{A}+ia_{B}),$$

$$C_{4} = \sqrt{\kappa(1-\eta)}(a_{A}-ia_{B}).$$
(4.21)

Rozdział 5

Atomy we wnęce rezonansowej

W celu przeanalizowania zmiany stanu układu, która następuje podczas wykrycia emisji, niezbedne było rozważenie działania części aparatury, złożonej z płytki półprzepuszczalnej i dwóch detektorów. Z kolei podczas ewolucji bez emisji najistotniejszymi elementami urządzenia są układy atom-wnęka. Tą ewolucją rządzi niehermitowski hamiltonian efektywny $H_{\rm eff}$. Nie jest konieczne wyprowadzenie od razu hamiltonianu efektywnego dla obu wnęk z uwięzionymi atomami. Znacznie łatwiej jest wyprowadzić hamiltonian efektywny opisujący ewolucję pojedynczego układu atom-wnęka, a później w obliczeniach zastosować iloczyn Kroneckera (2.16). Warto natomiast uogólnić obliczenia do przypadku wielu atomów uwięzionych w jednej optycznej wnęce rezonansowej, ponieważ pozwala to na rozbudowanie modelu zaproponowanego przez Bosego i innych. Autor tej pracy doktorskiej dzięki wykonaniu tego uogólnienia otrzymał nowe wyniki, opisane w dwóch artykułach [86,87] i przedstawione w dalszych rozdziałach tej pracy. Dlatego w tym rozdziale zostanie wyprowadzona, a następnie uproszczona postać hamiltonianu efektywnego dla układu, składającego się z N atomów uwięzionych w jednej wnęce. Bardzo istotne jest użycie w tym modelu atomów trójpoziomowych typu Λ , gdyż mają one dwa podpoziomy stanu podstawowego, z których atom nie może przejść spontanicznie do żadnych innych poziomów. Ponadto pomiędzy oboma podpoziomami stanu podstawowego nie ma żadnego bezpośredniego przejścia. Dzieki temu kubit zakodowany w superpozycji tych dwóch podpoziomów pozostanie nienaruszony przez bardzo długi czas. Czyni to atom typu Λ idealnym kandydatem na kwantową pamięć. Również wykonywanie operacji na tak zakodowanym kubicie nie jest żadnym problemem, ponieważ istnieje przejście pomiędzy tymi dwoma podpoziomami stanu podstawowego poprzez stan wzbudzony. Co prawda, podczas takich operacji może nastapić emisja spontaniczna z górnego poziomu i związana z nią utrata informacji kwantowej, ale prawdopodobieństwo takiego zdarzenia można sprowadzić do zaniedbywalnie małych wielkości, dobierając częstości pól wzbudzających odpowiednie przejścia tak, aby były odpowiednio odstrojone od rezonansu.

5.1 Hamiltonian trójpoziomowego atomu typu Λ

Niech N atomów trójpoziomowych typu Λ będzie ulokowanych we wnęce rezonansowej wzdłuż jednej linii, każdy w ustalonej pozycji. Niech też będą dostępne dwa różne lasery. Posłużą one do manipulacji stanem układu atomywnęka. Atomy muszą być oddalone od siebie przynajmniej o jedną długość fali, tak aby mogły być oświetlane laserami indywidualnie. Kierunki rozchodzenia się obu promieni laserowych muszą być do siebie bardzo zbliżone, żeby umożliwić transfer fotonów z jednej wiązki do drugiej za pośrednictwem atomu. Dla uproszczenia pola emitowane przez oba lasery potraktowane zostaną klasycznie. W celu dalszego uproszczenia problemu założone zostanie, że wszystkie atomy we wnęce rezonansowej dają się opisać dokładnie takim samym modelem, który przedstawiony jest na rysunku 5.1. Każdy



Rysunek 5.1: Schemat poziomów energetycznych jednego z wielu atomów trójpoziomowych typu Λ umieszczonych we wnęce rezonansowej i oświetlanych laserami.

z atomów posiada trzy poziomy $|0\rangle$, $|1\rangle$ i $|2\rangle$ o energiach E_0 , E_1 i E_2 , odpowiednio. Dzięki indywidualnemu adresowaniu dwoma różnymi polami laserowymi możliwe jest wzbudzanie dowolnego przejścia tylko w wybranym atomie. Pierwszy z laserów emituje pole o częstości $\omega_{\rm L}$, będące spolaryzowane kołowo lewoskrętnie. Taka polaryzacja powoduje, że pole pierwszego lasera zostaje sprzężone wyłącznie z przejściem $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Stała opisująca to sprzężenie, oznaczona zostanie przez Ω . Ponieważ pożądane jest jak najmniejsze obsadzenie poziomu wzbudzonego, częstość $\omega_{\rm L}$ jest odstrojona od rezonansu o wielkość $\Delta = (E_2 - E_1)/\hbar - \omega_{\rm L}$. Drugie przejście $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ jest sprzężone z dwoma polami o polaryzacji kołowej prawoskrętnej. Pierwsze z tych pól jest klasycznym polem o częstości $\omega'_{\rm L}$, emitowanym przez drugi laser. Wzbudzanie przejścia $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ przez pole drugiego lasera opisane jest stała sprzeżenia Ω' . Drugim polem sprzeżonym z tym przejściem jest traktowany kwantowo mod pola elektromagnetycznego o częstości $\omega_{\rm w}$, uwięzionego we wnęce rezonansowej. Stała sprzężenia w tym przypadku opisana jest przez g. W ogólności, częstość pola drugiego lasera $\omega'_{\rm L}$ i częstość pola wnęki $\omega_{\rm w}$ mogą przyjmować różne wartości, jednak wówczas nie jest możliwe sprowadzenie hamiltonianu efektywnego do postaci niezależnej od czasu. Istnieje co prawda możliwość prowadzenia obliczeń numerycznych dla hamiltonianu zależnego od czasu, jak widać we wzorze (3.65), ale w obliczeniach analitycznych zależność ta jest poważnym utrudnieniem. Dlatego założone zostanie w dalszej cześci wyprowadzenia, że obie te częstości sa sobie równe. W zwiazku z tym jest tylko jedno odstrojenie od rezonansu dla przejścia $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ oznaczone przez Δ' . Dla odpowiednio dużych wartości odstrojeń Δ i Δ' obsadzenie poziomu wzbudzonego $|2\rangle$ jest zaniedbywalnie małe. Jednak nawet wtedy może nastąpić emisja spontaniczna z poziomu $|2\rangle$ do jednego z podpoziomów stanu podstawowego. Dlatego zjawisko emisji spontanicznej musi zostać uwzględnione w obliczeniach. W tym celu wprowadzono współczynnik emisji spontanicznej Einsteina γ .

W tym miejscu należy wspomnieć o jeszcze kilku problemach, związanych z przyjęciem niektórych z założeń. Otóż założono, że wszystkie atomy tak samo oddziałują z polem wnęki i że w dodatku g jest wielkością stałą. W rzeczywistości g zależy od położenia atomu we wnęce. Dlatego sporym utrudnieniem są ruchy termiczne uwięzionych atomów. Ten problem w eksperymentach jest pokonywany poprzez schłodzenie atomów poniżej temperatury wyznaczonej przez granicę Lamba-Dickego. Wówczas amplituda oscylacji atomowych w pułapce jest znacznie mniejsza od długości fali modu wnęki rezonansowej. Guthöhrlein i inni [77] wykonali doświadczenie, w którym zostały uwięzione wewnątrz wnęki aż dwa tak schłodzone jony. Druga istotna trudność wynika z kształtu optycznych wnęk rezonansowych cechujących się bardzo dużymi dobrociami. W takich wnękach stała sprzężenia qprzyjmuje różne wartości w różnych położeniach atomów. Dlatego w rzeczywistości każdy z atomów ulokowanych we wnęce wzdłuż jednej linii będzie mieć inną wartość q. Oczywiście wyjątkiem jest przypadek tylko dwóch atomów umieszczonych symetrycznie we wnęce rezonansowej. Nie oznacza to jednak, że przyjęcie określonej liczby identycznych atomów większej niż dwa prowadzi do wyników, nie mających żadnego sensu. Dzięki temu przybliżeniu, używając stosunkowo prostych formuł, można sprawdzić wykonalność różnych algorytmów lub protokołów, operujących na wiekszej liczbie atomów, a następnie uogólnić obliczenia do przypadku różnych q.

Dla takiego modelu hamiltonian jest złożony z części atomowej H_A , części

polowej H_P oraz części oddziaływania pomiędzy atomami i modem wnęki rezonansowej H_{AP} , a więc ma następującą postać

$$H = H_A + H_P + H_{AP} \,. \tag{5.1}$$

Poszczególne hamiltoniany daje się przedstawić w bardziej zwartej formie, gdy zdefiniuje się operator atomowy $\sigma_{ij}^{(k)} = |i\rangle_{kk}\langle j|$, gdzie i, j = 0, 1, 2,a k wskazuje na odpowiedni atom. Ponadto przyjęto w dalszych obliczeniach pewne uproszczenie zapisu. Występująca w każdym wyrazie hamiltonianu stała \hbar i tak się upraszcza po podstawieniu do operatora ewolucji $\exp(-(i/\hbar)Ht)$. To uproszczenie symbolicznie przedstawia przypisanie $\hbar = 1$. Korzystając z tej konwencji, hamiltoniany można zapisać następującymi wyrażeniami

$$H_P = \omega_{\rm w} a^{\dagger} a \tag{5.2}$$

$$H_A = \sum_{k} (E_0 \sigma_{00}^{(k)} + E_1 \sigma_{11}^{(k)} + E_2 \sigma_{22}^{(k)})$$
(5.3)

$$H_{AP} = \sum_{k} (\Omega \sigma_{21}^{(k)} e^{-i\omega_{\rm L}t} + ga\sigma_{20}^{(k)} + \Omega' \sigma_{20}^{(k)} e^{-i\omega_{\rm L}'t} + \text{H.c.}), \qquad (5.4)$$

gdzie *a* oznacza operator anihilacji modu pola wnęki rezonansowej. Jak widać hamiltonian ten jest zależny od czasu, co utrudnia obliczenia analityczne. Byłoby zatem bardzo pożądane sprowadzenie hamiltonianu do postaci niezależnej od czasu. Pierwszym krokiem do osiągnięcia tego celu jest modyfikacja części atomowej, polegająca na przesunięciu zera na skali energii

$$H'_{A} = H_{A} - E_{1}I = \sum_{k} (E_{2} - E_{1})\sigma_{22}^{(k)} + \sum_{k} (E_{0} - E_{1})\sigma_{00}^{(k)}.$$
 (5.5)

Korzystając ze schematu poziomów energetycznych 5.1, łatwo przekształcić równanie (5.5) do postaci

$$H'_{A} = \sum_{k} (\omega_{\rm L} + \Delta) \sigma_{22}^{(k)} + \sum_{k} (\omega_{\rm L} - \omega_{\rm w} - \Delta_{r}) \sigma_{00}^{(k)}, \qquad (5.6)$$

gdzie wprowadzone zostało oznaczenie $\Delta_r = \Delta' - \Delta$. Jest rzeczą oczywistą, że powyżej przeprowadzona operacja tak samo zmieni zarówno hermitowski hamiltonian jak i niehermitowski hamiltonian efektywny. Jednak następna operacja jest nieco bardziej skomplikowana i dlatego warto ją wykonać już na H_{eff} , rządzącym ewolucją warunkową pod nieobecność emisji. Do wyznaczenia postaci hamiltonianu efektywnego niezbędna jest znajomość postaci hermitowskiego hamiltonianu i wszystkich operatorów emisji. Jako pierwszy przedstawiony zostanie operator opisujący emisję fotonu z pola wnęki do otoczenia. Jest on dany wyrażeniem

$$C_1 = \sqrt{2\kappa}a. \tag{5.7}$$

Zakłada się, że każdy z atomów oddziałuje bezpośrednio z otoczeniem. Każdy atom znajdujący się na poziomie wzbudzonym może spontanicznie przejść do jednego z dwóch podpoziomów stanu podstawowego. Stąd z każdym atomów związane są aż dwa operatory emisji

$$C_{k+1} = \sqrt{\gamma} \sigma_{02}^{(k)}, C_{k+2} = \sqrt{\gamma} \sigma_{12}^{(k)}.$$
 (5.8)

Teraz postać niehermitowskiego hamiltonianu efektywnego łatwo można otrzymać, stosując wzór (3.49), co prowadzi do wyrażenia

$$H_{\text{eff}} = H'_A + H_P + H_{AP} - i\kappa a^{\dagger}a - i\gamma \sum_k \sigma_{22}^{(k)}.$$
 (5.9)

Kontynuując procedurę wyeliminowania zależności czasowej, trzeba rozdzielić hamiltonian efektywny na dwie części

$$H_{\rm eff} = H_I + H_0,$$
 (5.10)

które pozwolą na przejście do obrazu oddziaływania [88], w którym ta zależność znika. Podział ten wykonany zostanie w następujący sposób:

$$H_{0} = \omega_{w}a^{\dagger}a + \sum_{k}\omega_{L}\sigma_{22}^{(k)} + \sum_{k}(\omega_{L} - \omega_{w})\sigma_{00}^{(k)},$$

$$H_{I} = H_{AP} + \sum_{k}(\Delta\sigma_{22}^{(k)} - \Delta_{r}\sigma_{00}^{(k)}) - i\kappa a^{\dagger}a - i\gamma\sum_{k}\sigma_{22}^{(k)}$$
(5.11)

W obrazie oddziaływania ewolucję opisuje hamiltonian efektywny, który otrzymać można, działając operatorem transformacji $U = \exp(-iH_0t)$ na H_I według wzoru

$$H'_{\rm eff} = U^{-1} H_I U \,. \tag{5.12}$$

Rezultatem powyższej transformacji jest niehermitowski hamiltonian efektywny w obrazie oddziaływania

$$H'_{\text{eff}} = \sum_{k} (\Delta - i\gamma) \sigma_{22}^{(k)} - \sum_{k} \Delta_{r} \sigma_{00}^{(k)} - i\kappa a^{\dagger} a + \sum_{k} (\Omega \sigma_{21}^{(k)} + g \sigma_{20}^{(k)} a + \Omega' \sigma_{20}^{(k)} + \text{H.c.}).$$
(5.13)

Jak widać, w powyższym hamiltonianie efektywnym nie ma już żadnej zależności od czasu, a więc cel powyższych zabiegów został osiągnięty. Odtąd stosowany będzie wyłącznie hamiltonian efektywny w obrazie oddziaływania i dlatego bez ryzyka doprowadzenia do nieporozumienia będzie od tej pory pominięty znak prim.

5.2 Adiabatyczna eliminacja poziomu wzbudzonego

Do obliczeń numerycznych, z wykorzystaniem trajektorii kwantowych, hamiltonian efektywny (5.13) jest idealny. Brak zależności czasowej oznacza, że nie trzeba stosować przybliżenia (3.65), co znacząco ułatwia zadanie wyboru wielkości Δt . Jednak prowadzenie analitycznych rachunków nadal jest niezwykle skomplikowane. Konieczne jest więc dalsze uproszczenie zagadnienia. Takiej możliwości dostarcza przyjęcie dużych odstrojeń od rezonansu. Związane z tym bardzo małe obsadzenie stanu wzbudzonego $|2\rangle$ oznacza, że nie popełni się wielkiego błędu, jeśli wyeliminuje się ten stan z rachunków. W ten sposób stan układu można opisać wektorem z przestrzeni Hilberta o mniejszym wymiarze. Matematycznie stan wzbudzony eliminuje się z rachunków, stosując technikę adiabatycznej eliminacji [67,89–93]. Jest to najstarsza i najczęściej stosowana technika, ale nie jedyna. Moorad Alexanian i Subir Bose [94] udowodnili, że stan wzbudzony daje się usunąć również przekształceniem przez podobieństwo hamiltonianu. W tej pracy przedstawione są obie metody, choć bardziej szczegółowo opisana jest metoda adiabatycznej eliminacji.

Procedurę zaczyna się od napisania równania "master" dla danego układu otwartego. Równanie "master" dane wzorem (3.30) można bez trudu przeprowadzić do postaci

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} (H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^{\dagger}) + \sum_{i} C_{i}\rho C_{i}^{\dagger}, \qquad (5.14)$$

umożliwiającej wykorzystanie znajomości hamiltonianu efektywnego oraz kompletu operatorów Lindblada. W dalszej części ponownie przyjęte zostanie, że $\hbar = 1$. Wówczas po podstawieniu operatorów emisji (5.7) i (5.8) równanie "master" przyjmuje postać

$$\dot{\rho} = -i(H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^{\dagger}) + \sum_{k} (\gamma \sigma_{12}^{(k)} \rho \sigma_{21}^{(k)} + \gamma \sigma_{02}^{(k)} \rho \sigma_{20}^{(k)}) + 2\kappa a \rho a^{\dagger}.$$
(5.15)

Z obrazu równania "master" trzeba teraz przejść do obrazu Heisenberga, w którym to nie macierz gęstości, ale operatory zależą od czasu. Przejście to łatwo wykonać, wykorzystując następujące związki

$$\langle A \rangle = \operatorname{tr}(A\dot{\rho}) = \operatorname{tr}(A\rho),$$
 (5.16)

gdzie A jest dowolnym operatorem. Pierwszy z tych związków, to znaczy

$$\langle \dot{A} \rangle = \operatorname{tr}(A\dot{\rho}), \qquad (5.17)$$

oraz równanie "master" (5.15) pozwala na napisanie równania na wartość oczekiwaną operatora \dot{A}

W równaniu (5.18) wykorzystano fakt, że ślad sumy jest równy sumie śladów. Natomiast własność cykliczności śladu pozwala przekształcić (5.18) do

Ostatecznie, porównanie (5.19) z drugim równaniem na wartość oczekiwaną \dot{A}

$$\langle \dot{A} \rangle = \operatorname{tr}(\dot{A}\rho), \qquad (5.20)$$

prowadzi do równania na pochodną po czasie operatora A

$$\dot{A} = i(H_{\text{eff}}^{\dagger}A - AH_{\text{eff}}) + 2\kappa a^{\dagger}Aa + \sum_{k} \gamma(\sigma_{21}^{(k)}A\sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{20}^{(k)}A\sigma_{02}^{(k)}).$$
(5.21)

Poziom wzbudzony $|2\rangle$ można wyeliminować tylko wtedy, gdy jego obsadzenie będzie bardzo małe podczas całej ewolucji. Populacja stanu wzbudzonego ktego atomu jest opisywana przez operator $\sigma_{22}^{(k)}$. Zatem, aby ta populacja dla każdego atomu była utrzymana na niezmiennie małym poziomie przez cały czas, konieczne jest zerowanie się pochodnej po czasie z operatora $\sigma_{22}^{(k)}$ dla wszystkich k. Wspomnianą pochodną łatwo otrzymuje się, zapisując równanie (5.21) z hamiltonianem efektywnym (5.13) dla $A = \sigma_{22}^{(k)}$

$$\dot{\sigma}_{22}^{(k)} = -2\gamma \sigma_{22}^{(k)} - i\Omega \sigma_{21}^{(k)} + i\Omega^* \sigma_{12}^{(k)} - ig\sigma_{20}^{(k)}a + ig^* a^{\dagger} \sigma_{02}^{(k)} -i\Omega' \sigma_{20}^{(k)} + i\Omega'^* \sigma_{02}^{(k)}.$$
(5.22)

Przyrównanie otrzymanej pochodnej do zera prowadzi do wyrażenia operatora $\sigma_{22}^{(k)}$ przez inne operatory

$$2\gamma\sigma_{22}^{(k)} = -i\Omega\sigma_{21}^{(k)} - ig\sigma_{20}^{(k)}a - i\Omega'\sigma_{20}^{(k)} + \text{H.c.}.$$
(5.23)

Jak widać, niestety, ta jedna operacja nie wystarcza do wyeliminowania poziomu wzbudzonego, ponieważ po prawej stronie pojawiają się operatory związane z tym poziomem. Poza tym te same operatory pojawiają się również w hamiltonianie efektywnym, skąd powinny być usunięte. Dlatego należy teraz także i te operatory wyrazić za pomocą pozostałych operatorów. W tym celu przyjmuje się założenie, że nie tylko populacja poziomu wzbudzonego nie zmienia się w czasie, ale i każdy z procesów prowadzących do zmiany tej populacji pozostaje stały. Matematycznie oznacza to zerowanie się pochodnych następujących operatorów $\dot{\sigma}_{12}^{(k)} = 0$, $\dot{\sigma}_{21}^{(k)} = 0$, $\dot{\sigma}_{02}^{(k)} = 0$ oraz $\dot{\sigma}_{20}^{(k)} = 0$. Wówczas wykorzystanie (5.21) prowadzi do wyrażenia operatorów związanych z poziomem wzbudzonym przez

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(k)} &= \frac{i\Omega}{\gamma + i\Delta} (\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)}) - \frac{ig}{\gamma + i\Delta} a \sigma_{10}^{(k)} - \frac{i\Omega'}{\gamma + i\Delta} \sigma_{10}^{(k)} \\
\sigma_{21}^{(k)} &= (\sigma_{12}^{(k)})^{\dagger} \\
\sigma_{02}^{(k)} &= \frac{ig}{\gamma + i\Delta'} a (\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{00}^{(k)}) + \frac{i\Omega'}{\gamma + i\Delta'} (\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{00}^{(k)}) - \frac{i\Omega}{\gamma + i\Delta'} \sigma_{01}^{(k)} \\
\sigma_{20}^{(k)} &= (\sigma_{02}^{(k)})^{\dagger}.
\end{aligned}$$
(5.24)

Teraz można przeprowadzić kolejny krok w wyeliminowaniu poziomu wzbudzonego, to znaczy podstawić (5.24) do (5.23). Niestety, aby otrzymać proste wyniki, konieczne jest zrezygnowanie z dotychczasowej ogólności modelu. Jednym z możliwych szczególnych przypadków, jaki upraszcza wyniki jest model z identycznymi wartościami obu odstrojeń. Przyjęcie $\Delta = \Delta'$ pozwala $\sigma_{22}^{(k)}$ wyrazić przez

$$\sigma_{22}^{(k)}(1+\alpha) = \left(\frac{g\Omega'^{*}}{\Delta^{2}+\gamma^{2}}a\sigma_{00}^{(k)} + \frac{\Omega^{*}\Omega'}{\Delta^{2}+\gamma^{2}}\sigma_{10}^{(k)} + \frac{g\Omega^{*}}{\Delta^{2}+\gamma^{2}}a\sigma_{10}^{(k)} + \text{H.c.}\right) \\
+ \frac{|\Omega|^{2}}{\Delta^{2}+\gamma^{2}}\sigma_{11}^{(k)} + \frac{|g|^{2}}{\Delta^{2}+\gamma^{2}}a^{\dagger}a\sigma_{00}^{(k)} + \frac{|\Omega'|^{2}}{\Delta^{2}+\gamma^{2}}\sigma_{11}^{(k)}, \quad (5.25)$$

gdzie symbolowi α zostało przypisane wyrażenie

$$\alpha = \frac{|\Omega|^2}{\Delta^2 + \gamma^2} + \frac{|g|^2}{\Delta^2 + \gamma^2} a^{\dagger}a + \frac{|\Omega'|^2}{\Delta^2 + \gamma^2} + \left(\frac{g\Omega'^*}{\Delta^2 + \gamma^2}a + \text{H.c.}\right). (5.26)$$

W powyższym wyrażeniu pojawiają się czynniki nasycenia poziomu wzbudzonego wywołanego oddziaływaniem atomu z różnymi polami. Aby ostatecznie móc wyeliminować z obliczeń poziom wzbudzony, trzeba założyć, że każdy z tych czynników jest dużo mniejszy od jedności i że w związku z tym $\alpha \ll 1$. Przy takim założeniu α może być zaniedbana w równaniu (5.25). Wtedy również można zaniedbać operator $\sigma_{22}^{(k)}$ w równaniach (5.24). Po wykonaniu tego przybliżenia, ostatecznie można się pozbyć operatorów związanych z poziomem $|2\rangle$ z hamiltonianu efektywnego (5.13) poprzez podstawienie (5.24) oraz (5.25). Hamiltonian efektywny po adiabatycznej eliminacji przyjmuje postać

$$H_{\text{eff}} = -\sum_{k} (\Delta + i\gamma) (s_1 \sigma_{11}^{(k)} + s_2 a^{\dagger} a \sigma_{00}^{(k)} + s_3 \sigma_{00}^{(k)}) - i\kappa a^{\dagger} a -\sum_{k} (\Delta + i\gamma) (s_4 a \sigma_{00}^{(k)} + s_5 \sigma_{10}^{(k)} + s_6 a \sigma_{10}^{(k)} + \text{H.c.}), \quad (5.27)$$

gdzie poszczególne parametry nasyceniowe zostały oznaczone przez

$$s_{1} = |\Omega|^{2}/(\Delta^{2} + \gamma^{2}) \qquad s_{2} = |g|^{2}/(\Delta^{2} + \gamma^{2}) s_{3} = |\Omega'|^{2}/(\Delta^{2} + \gamma^{2}) \qquad s_{4} = g\Omega'^{*}/(\Delta^{2} + \gamma^{2}) s_{5} = \Omega^{*}\Omega'/(\Delta^{2} + \gamma^{2}) \qquad s_{6} = g\Omega^{*}/(\Delta^{2} + \gamma^{2}).$$
(5.28)

Zupełnie inaczej wygląda procedura zaproponowana przez Alexaniana i Bosego [94]. Jak wspomniano wcześniej, w tej metodzie wykonuje się przekształcenie przez podobieństwo hamiltonianu efektywnego. Operator służący do tego przekształcenia ma następującą postać

$$S = s_{\alpha}(\sigma_{21}^{(k)} - \sigma_{12}^{(k)}) + s_{\beta}(a\sigma_{20}^{(k)} - a^{\dagger}\sigma_{02}^{(k)}) + s_{\gamma}(\sigma_{20}^{(k)} - \sigma_{02}^{(k)}).$$
(5.29)

Każdy z wyrazów w wyrażeniu (5.29) jest związany z jednym rodzajem wzbudzania poziomu $|2\rangle$, a współczynniki s_{α} , s_{β} i s_{γ} są odpowiednimi parametrami nasyceniowymi. Jeśli obsadzenie poziomu wzbudzonego będzie bardzo małe i gdy s_{α} , s_{β} , $s_{\gamma} \ll 1$, to poziom wzbudzony można wyeliminować, wykonując przekształcenie przez podobieństwo w przybliżeniu liniowym

$$H'_{\rm eff} = e^S H_{\rm eff} e^{-S} \approx H_{\rm eff} + [S, H_{\rm eff}].$$
 (5.30)

Również i w tej metodzie konieczne jest przyjęcie szczególnego przypadku, aby uprościć rachunki i otrzymać prostą postać hamiltonianu efektywnego. Tym razem wygodne jest przyjęcie modelu, w którym spełnione są warunki $\Delta \gg \gamma$ i $\Delta' \gg \gamma$ i w związku z tym można zaniedbać współczynnik emisji spontanicznej γ . Konieczne jest także założenie, że Ω , Ω' i g są liczbami rzeczywistymi. Wykonanie takiej transformacji przy założeniach: $s_{\alpha} = \Omega/\Delta$, $s_{\beta} = g/\Delta'$ i $s_{\gamma} = \Omega'/\Delta'$ prowadzi do hamiltonianu efektywnego danego wzorem

$$H_{\text{eff}} = -\sum_{k} \Delta_{r} \sigma_{00}^{(k)} - i\kappa a^{\dagger} a -\sum_{k} (\delta_{1} \sigma_{11}^{(k)} + \delta_{2} \sigma_{00}^{(k)} + \delta_{3} a^{\dagger} a \sigma_{00}^{(k)}) -\sum_{k} (\delta_{4} \sigma_{10}^{(k)} + \delta_{5} a \sigma_{10}^{(k)} + \delta_{6} a \sigma_{00}^{(k)} + \text{H.c.}), \qquad (5.31)$$

gdzie $\delta_1 = \Omega^2 / \Delta$, $\delta_2 = {\Omega'}^2 / {\Delta'}$, $\delta_3 = g^2 / {\Delta'}$, $\delta_4 = \Omega \Omega' (\Delta^{-1} + {\Delta'}^{-1}) / 2$, $\delta_5 = g \Omega (\Delta^{-1} + {\Delta'}^{-1}) / 2$ i $\delta_6 = g \Omega' / {\Delta'}$.

Rozdział 6

Manipulowanie stanem układu

W poprzednim rozdziale wyprowadzony został niehermitowski hamiltonian efektywny rządzący ewolucją pod nieobecność emisji spontanicznych. Zastosowanie eliminacji adiabatycznej poziomu wzbudzonego znacznie uprościło problem i tym samym umożliwiło analityczne rozwiązanie nieunitarnego równania Schrödingera dla pewnych szczególnych przypadków. W tym rozdziale wykorzystane zostaną wyprowadzone wcześniej postaci hamiltonianu efektywnego (5.27) oraz (5.31) do wyznaczenia ewolucji stanu układu. Jest rzeczą oczywistą, że ewolucja stanu układu będzie zależeć od wartości przyjętych parametrów. Stwarza to możliwość manipulowania stanem układu, ponieważ niektóre parametry, takie jak na przykład natężenie pola laserowego, można zmieniać w trakcie eksperymentu. Wyznaczenie rozwiązań nieunitarnego równania Schrödingera dla różnych parametrów umożliwia określenie podstawowych operacji, jakie moga być wykonane na układzie. Te podstawowe operacje są bardzo ważne, gdyż z nich budować można bardziej skomplikowane operacje, takie jak bramki kwantowe. Aby maksymalnie ułatwić proces konstruowania różnych algorytmów i protokołów, oraz by uprościć otrzymywane wyrażenia, autor tej pracy wprowadził pewną formę zapisu działania poszczególnych operacji. Formalizm ten został przedstawiony i wykorzystany w artykule [86].

6.1 Ewolucja stanu pojedynczego atomu we wnęce

Jako pierwsze zostaną przedstawione operacje, jakie można wykonać manipulując polem laserowym na stanie układu, opisanego najprostszym możliwym modelem. A zatem niech we wnęce będzie uwięziony tylko jeden atom typu Λ , a laser o polaryzacji kołowej prawoskrętnej będzie wyłączony ($\Omega' = 0$). Częstość pola drugiego lasera zostanie tak dobrana, że oba odstrojenia od rezonansu będą sobie równe ($\Delta = \Delta'$), a jego natężenie będzie takie, że równe będą stałe sprzężeń pola lasera i pola wnęki z odpowiednimi przejściami ($\Omega = g$). Ponadto założone zostanie, że g i Ω są liczbami rzeczywistymi oraz przyjęty zostanie warunek $\Delta \gg \gamma$, pozwalający zaniedbać γ w hamiltonianie efektywnym. Przy takich założeniach obie postaci hamiltonianu efektywnego po adiabatycznej eliminacji (5.27) i (5.31) przechodzą natychmiast do następującej postaci

$$H_{\text{eff}} = -\delta\sigma_{11} - \delta a^{\dagger} a\sigma_{00} - (\delta a\sigma_{10} + \text{H.c.}) - i\kappa a^{\dagger} a, \qquad (6.1)$$

gdzie $\delta = g^2/\Delta$. Jak widać, hamiltonian efektywny (6.1) jest bardzo prosty, dzięki czemu można wyznaczyć ewolucję dla dowolnego stanu początkowego układu. W celu skrócenia wzorów użyty zostanie zapis stanu, w którym w nawiasie "ket" pierwsza od lewej cyfra oznacza obsadzony poziom atomowy, zaś druga cyfra oznacza liczbę fotonów uwięzionych we wnęce rezonansowej. Zatem jeśli we wnęce znajdować się będzie *n* fotonów, a atom będzie przygotowany w stanie $|1\rangle$, to zapis skrótowy będzie następujący:

$$|1n\rangle = |1\rangle_{\text{atom}} \otimes |n\rangle_{\text{pole}}.$$
 (6.2)

Na początek warto wziąć pod uwagę najbardziej prawdopodobne stany początkowe, gdy wnęka rezonansowa znajduje się w stanie próżni, a atom w jednym z dwóch podpoziomów stanu podstawowego. Niech atom będzie na początku przygotowany w stanie $|1\rangle$. Wówczas ewolucja stanu układu jest dana równaniem

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|10\rangle = e^{i\delta t}e^{-\frac{\kappa t}{2}} \left[\left(\cos\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right) + \frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right) \right) |10\rangle + i\frac{2\delta}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right) |01\rangle \right], \qquad (6.3)$$

gdzie $\Omega_{\kappa} = \sqrt{4\delta^2 - \kappa^2}$ jest częstością Rabiego. Łatwo zauważyć, że gdy laser jest włączony to układ ze stanu $|10\rangle$ przejdzie po pewnym czasie do stanu $|01\rangle$. Stanie się tak w czasie t_1 spełniającym warunek

$$\cos\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right) + \frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right) = 0.$$
(6.4)

Stąd wyznaczyć można $t_1 = 2/\Omega_{\kappa}[\pi - \operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/\kappa)]$. Można też dowieść, że gdy spełniony jest warunek (6.4), to spełnione jest poniższe równanie

$$\frac{2\delta}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right) = 1.$$
(6.5)

Równanie (6.5) jest bardzo ważne, ponieważ pozwala na znaczące uproszczenie wzorów względem wzorów występujących w oryginalnej pracy Bosego i innych [19]. Dowód zaczyna się od założenia prawdziwości równania (6.5), by następnie przekształcić je do równania (6.4). W pierwszym kroku przekształcania równanie (6.5) podnosi się obustronnie do kwadratu, otrzymując

$$\frac{4\delta^2}{4\delta^2 - \kappa^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_\kappa t_1}{2}\right) = 1.$$
(6.6)

Następnie dodaje się i odejmuje takie wyrażenie po lewej stronie równania, by w jednym z wyrazów pozostał sam kwadrat sinusa

$$\frac{4\delta^2 - \kappa^2}{4\delta^2 - \kappa^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right) + \frac{\kappa^2}{4\delta^2 - \kappa^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right) = 1.$$
(6.7)

Wykorzystanie wzoru jedynkowego pozwala wówczas na przekształcenie (6.7) do postaci

$$\frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right)} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_1}{2}\right)}.$$
(6.8)

Dla fazy $\Omega_{\kappa} t_1/2$ należącej do drugiej ćwiartki, co wynika z wyrażenia na czas t_1 , równanie (6.8) upraszcza się do równania

$$\frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_{1}}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_{1}}{2}\right),\tag{6.9}$$

dowodzącego spełnienia warunku (6.4). Czytelnikowi przyzwyczajonemu do zwykłych funkcji falowych przedstawiony wcześniej dowód może wydawać się niepotrzebny. W normalnej funkcji falowej znacznie łatwiej byłoby w takim samym przypadku wykorzystać fakt unormowania funkcji falowej. Jednak (6.3) jest warunkową funkcją falową pochodzącą z nieunitarnego równania Schrödingera, która nie jest unormowana.

Ostatecznie, operację wykonywaną na stanie układu przez włączenie lasera na czas t_1 można przedstawić w bardzo prostej postaci. Wstawienie warunku (6.4) oraz wynikającego z niego równania (6.5) do równania ewolucji (6.3) pozwala na zapis tej operacji w formie

$$|10\rangle \rightarrow i e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} |01\rangle.$$
(6.10)

Patrząc na (6.3) widać, że możliwa jest też operacja odwrotna, ponieważ po pewnym czasie układ wraca z powrotem do stanu początkowego. Rozwiązanie nieunitarnego równania Schrödingera dla początkowego stanu $|01\rangle$

prowadzi do równania

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|01\rangle = e^{i\delta t}e^{-\frac{\kappa t}{2}} \left[\left(\cos\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right) - \frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right) \right) |01\rangle + i\frac{2\delta}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right) |10\rangle \right], \qquad (6.11)$$

które potwierdza istnienie takiej operacji. Jednak czas po którym nastąpi przejście do stanu $|10\rangle$ będzie się różnić od t_1 , ponieważ tym razem musi być spełniony inny warunek

$$\cos\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_2}{2}\right) - \frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_2}{2}\right) = 0.$$
(6.12)

Po przekształceniu warunku (6.12) otrzymuje się $t_2 = 2/\Omega_{\kappa} \operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/\kappa)$. Natomiast wykorzystując ten sam warunek i zauważając, że tym razem faza $\Omega_{\kappa}t_2/2$ należy do pierwszej ćwiartki, wzór (6.11) daje się mocno uprościć i przedstawić w następującej formie

$$|01\rangle \rightarrow i e^{i\delta t_2} e^{-\frac{\kappa t_2}{2}} |10\rangle.$$
 (6.13)

Drugim naturalnym stanem początkowym jest stan $|00\rangle$. Okazuje się jednak, że taki stan nie zmienia się w czasie. Hamiltonian efektywny (6.1), rządzący ewolucją, nie ma takiego wyrazu, który działałby na stan $|00\rangle$. Zatem ewolucja tego stanu dana jest równaniem

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|00\rangle = |00\rangle. \tag{6.14}$$

Wszystkie przedstawione wcześniej operacje mają niezwykle ważne zastosowanie. Otóż z własności operacji (6.10), (6.13) i (6.14) wynika możliwość "przepisywania" kubitu ze stanu atomu na stan pola. Jeśli bowiem informacja kwantowa będzie zapisana w amplitudach podpoziomów stanu podstawowego atomu ($\alpha |0\rangle_{\text{atom}} + \beta |1\rangle_{\text{atom}}$), a wnęka będzie się znajdować w stanie próżni $|0\rangle_{\text{pole}}$, to włączenie lasera na czas t_1 spowoduje następującą zmianę stanu

$$e^{-iH_{\text{eff}}t_1}(\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle) = \alpha|00\rangle + ie^{i\delta t_1}e^{-\frac{\kappa t_1}{2}}\beta|01\rangle.$$
(6.15)

A zatem po wykonaniu takiej operacji atom będzie w stanie $|0\rangle_{\text{atom}}$, natomiast amplitudy α i β są zakodowane w stanie pola wnęki. Czynnik fazowy nie jest problemem, ponieważ jest możliwe jego usunięcie. Jednak czynnik tłumiący $\exp(-\kappa t_1/2)$ jest istotnym problemem. Kolejną trudnością jest możliwość wystąpienia emisji. Każda z opisanych operacji zakończona będzie sukcesem tylko i wyłącznie w przypadku ewolucji bez emisji. Na szczęście oba problemy mają jedno rozwiązanie — nałożenie na parametry dodatkowego warunku $\delta \gg \kappa$. Wtedy również i częstość Rabiego Ω_{κ} będzie dużo większa od κ , a wówczas czasy trwania różnych operacji będą znacznie mniejsze od średniego czasu wystąpienia ucieczki fotonu z wnęki rezonansowej. A zatem prawdopodobieństwo zakłócenia operacji przez emisję fotonu będzie bardzo małe. Również czynnik tłumiący przestaje być problemem, gdy spełniony jest warunek $\delta \gg \kappa$. Żeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że dla tego warunku $\operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/\kappa) \approx \pi/2$, a następnie zastosować to przybliżenie do wyznaczenia czasów operacji

$$t_1 \approx t_2 \approx \frac{2}{\Omega} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\Omega} \approx \frac{\pi}{2\delta}.$$
 (6.16)

Po podstawieniu przybliżonego wyrażenia, określającego czas operacji okazuje się, że czynnik tłumiący będzie mieć zaniedbywalnie mały wpływ na otrzymany stan, bo $\exp(-\kappa t_1/2) \approx 1$. Poza tym, stosując przybliżenie (6.16), można też skrócić formuły na operacje (6.10) i (6.13), ponieważ czynniki fazowe upraszczają się wówczas do

$$e^{i\delta t_1} \approx e^{i\delta t_2} \approx e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$
(6.17)

Jednakże, dla zachowania ogólności obliczeń, w dalszej części tej pracy stosowane będą wzory (6.10) i (6.13) z dokładnymi wartościami czasów t_1 i t_2 .

Można wykonać znacznie więcej operacji niż trzy przedstawione, wykorzystując ewolucję układu przy włączonym laserze. Równania (6.3), (6.11) i (6.14) umożliwiają na przykład wykonanie bramki kwantowej Z. Jednak przedstawione będą dla tego modelu jeszcze tylko dwie operacje. Są to bardzo ważne operacje, gdyż prowadzą do wytworzenia maksymalnie splątanego stanu atomu i pola. Gdy stanem początkowym układu jest stan $|10\rangle$, to do maksymalnego splątania doprowadzi włączenie lasera na czas t_3 , spełniający warunek

$$\cos\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_3}{2}\right) + \frac{\kappa}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_3}{2}\right) = \frac{2\delta}{\Omega_{\kappa}}\sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t_3}{2}\right). \tag{6.18}$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się wyrażenie na czas operacji splątania $t_3 = 2/\Omega_{\kappa} \operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/(2\delta-\kappa))$. Przybliżoną wartość czasu t_3 można łatwo otrzymać, wykorzystując ponownie warunek $\delta \gg \kappa$. Przybliżenie $t_3 \approx \pi/(4\delta)$ pozwala ustalić, że obie strony równania (6.18) są bliskie $1/\sqrt{2}$. Przyjęcie tej wartości uprościłoby wzory, ale kosztem dokładności. Dlatego na razie pozostawione zostaną bardziej ogólne wyrażenia, a ewentualne przybliżenia będą czynione do oszacowania wartości końcowych takich wielkości, jak prawdopodobieństwo sukcesu lub wierność. W związku z tym operacja plątania stanu atomu i pola z równania (6.3) zostanie uproszczona jedynie do wyrażenia

$$|10\rangle \rightarrow e^{i\delta t_3} e^{-\frac{\kappa t_3}{2}} \theta(t_3) (|10\rangle + i|01\rangle), \qquad (6.19)$$

gdzie

$$\theta(t) = \frac{2\delta}{\Omega_{\kappa}} \sin\left(\frac{\Omega_{\kappa}t}{2}\right). \tag{6.20}$$

Druga operacja wytwarza stan splątany atomu i pola ze stanu początkowego $|01\rangle$. Z równania ewolucji (6.11) widać, że operacja ta daje się przedstawić następująco

$$|01\rangle \rightarrow e^{i\delta t_4} e^{-\frac{\kappa t_4}{2}} \theta(t_4) (|01\rangle + i|10\rangle),$$
 (6.21)

gdzie $t_4 = 2/\Omega_{\kappa} \operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/(2\delta + \kappa))$ jest czasem, na który laser musi zostać włączony.

Drugim typem ewolucji układu jest ewolucja z wyłączonym laserem. W tym przypadku hamiltonian efektywny przyjmuje jeszcze prostszą postać, ponieważ wyłączony laser oznacza, że należy przyjąć $\Omega = 0$ i w związku z tym pozostają tylko dwa niezerowe wyrazy

$$H_{\rm eff} = -\delta a^{\dagger} a \sigma_{00} - i \kappa a^{\dagger} a \,. \tag{6.22}$$

Oba wyrazy odpowiadają elementom diagonalnym w reprezentacji macierzowej hamiltonianu efektywnego i dlatego wyznaczenie ewolucji stanu układu dla przypadku wyłączonego lasera jest zadaniem trywialnym. Jak widać, w każdym z wyrazów znajduje się operator liczby fotonów $a^{\dagger}a$. Zatem jeśli wnęka znajdzie się w stanie próżni, to stan układu nie będzie się zmieniać. Stąd ewolucję takich stanów można zapisać następująco

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|00\rangle = |00\rangle, \qquad (6.23)$$

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|10\rangle = |10\rangle. \qquad (6.24)$$

Wyznaczenie ewolucji dla stanu $|01\rangle$, w którym uwięziony jest we wnęce rezonansowej jeden foton, jest równie proste i sprowadza się do wykonania funkcji eksponens z odpowiedniego elementu diagonalnego przemnożonego przez czynnik -it, w wyniku czego otrzymuje się

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|01\rangle = e^{i\delta t}e^{-\kappa t}|01\rangle. \qquad (6.25)$$

Symbol	Operacja	Ze wzoru
O_1	$ 00 angle \rightarrow 00 angle$	6.14
O_2	$ 10\rangle \rightarrow i e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} 01\rangle$	6.10
O_3	$ 01\rangle \rightarrow i e^{i\delta t_2} e^{-\frac{\kappa t_2}{2}} 10\rangle$	6.13
O_4	$ 10\rangle \rightarrow e^{i\delta t_3} e^{-\frac{\kappa t_3}{2}} \theta(t_3)(10\rangle + i 01\rangle)$	6.19
O_5	$ 01\rangle \rightarrow e^{i\delta t_4} e^{-\frac{\kappa t_4}{2}} \theta(t_4) (01\rangle + i 10\rangle)$	6.21

Tablica 6.1: Podstawowe operacje wykonywane przy włączonym laserze.

Postaci przedstawionych w tym podrozdziale operacji zostały na tyle uproszczone przez autora tej rozprawy, że można zestawić je w tabelce. Natomiast fakt ich niewielkiej ilości skłania do nadania im symboli, które ułatwią posługiwanie się tymi operacjami przy opisywaniu protokołu teleportacyjnego. W tabeli 6.1 przedstawione zostały operacje, które można wykonać, wykorzystując ewolucję układu z włączonym laserem. Natomiast w tabeli 6.2

Symbol	Operacja	Ze wzoru
O_6	$ 00\rangle \rightarrow 00\rangle$	6.23
O_7	$ 10\rangle \rightarrow 10\rangle$	6.24
O_8	$ 01\rangle \rightarrow e^{i\delta t}e^{-\kappa t} 01\rangle$	6.25

Tablica 6.2: Operacje transformujące stany wykonywane przez wyłączenie lasera.

umieszczone są podstawowe operacje wykonywane, gdy laser zostanie wyłączony. Chociaż operacji podsumowanych w obu tabelkach jest niewiele, to uproszczenie obliczeń wykonanych przez Bosego i innych nie jest ich jedynym zastosowaniem. Autor tej rozprawy z powodzeniem wykorzystał ten skromny zestaw operacji do zaprojektowania protokołu plączącego stany dwóch odległych atomów z prawdopodobieństwem sukcesu bliskim jedności [87].

6.2 Ewolucja stanu wielu atomów we wnęce

Drugi model, dla którego możliwe jest uzyskanie prostych postaci wzorów na operacje wykonywane na stanach układu, zakłada uwięzienie N atomów wewnątrz optycznej wnęki rezonansowej. Uwięzienie wielu atomów wewnątrz wnęki rezonansowej nie jest zadaniem łatwym, ale większość nietrywialnych algorytmów kwantowych operuje na rejestrach kwantowych złożo-

nych z wielu kubitów. Dlatego autor tej rozprawy opracował formalizm, ułatwiający projektowanie algorytmów kwantowych wykonywanych przez układ atomów uwięzionych we wnęce rezonansowej. Podstawą tego formalizmu są operacje kwantowe, dające się wykonać na stanach bazowych układu wielu atomów i wnęki rezonansowej. Liniowość mechaniki kwantowej pozwala wykorzystać te operacje również na superpozycjach stanów bazowych. Już zastosowanie takiego formalizmu w przypadku pojedynczego atomu nie tylko uprościło obliczenia dla protokołu teleportacyjnego, ale i pozwoliło na zaproponowanie nowego protokołu plątania odległych atomów. Jednak dopiero zastosowanie operacji na wielu atomach daje bardzo duże możliwości. Formalizm dla układu wielu atomów we wnęce został zaprezentowany w publikacji [86].

Przyjęcie układu N atomów i wnęki wymusza wprowadzenie ogólniejszego zapisu stanów bazowych. Tak jak poprzednio, ostatnia cyfra po prawej stronie w nawiasie "ket" oznaczać będzie liczbę fotonów uwięzionych pomiędzy lustrami optycznej wnęki rezonansowej. Jednak po lewej stronie pojawi się w tym nawiasie wiele cyfr, które oznaczać będą stany kolejnych atomów. Jak wspomniano w poprzednim rozdziale, wszystkie atomy są ulokowane w ustalonych pozycjach wzdłuż jednej linii i dlatego mogą być im przypisane numery. Pierwsza cyfra po lewej stronie nawiasu "ket" oznaczać będzie stan bazowy, w którym znajduje się pierwszy atom. Każda następna cyfra, z wyjątkiem ostatniej, określać będzie stan kolejnych atomów. Tak więc jeśli układ będzie się składać z trzech atomów uwięzionych we wnęce, to zapis $|100n\rangle$ wskazywać będzie, że atom pierwszy znajduje się w stanie $|1\rangle$, dwa następne w stanie $|0\rangle$, a we wnęce jest n fotonów. Zeby nie powtarzać wielu wzorów, które będą wspólne dla wielu stanów bazowych, będzie przede wszystkim stosowany bardziej ogólny zapis. Dla przytoczonego przed chwila przykładowego układu trzech atomów takim ogólnym zapisem będzie $|x_1x_2x_3n\rangle$, gdzie x_k oznaczać będzie stan k-tego atomu.

Wprowadzenie więcej niż jednego atomu we wnęce prowadzi do poważnego problemu. Otóż hamiltonian efektywny (5.31) zawiera wyrazy $\delta_3 a^{\dagger} a \sigma_{00}^{(k)}$, które opisują oddziaływanie każdego atomu, znajdującego się w stanie $|0\rangle$ z modem pola wnęki rezonansowej. Niestety zjawisko to prowadzi do niemożności niezależnego wykonywania jakiejkolwiek operacji na wybranym atomie bez zmiany stanu innych atomów, nawet gdy wzbudzany jest laserem tylko i wyłącznie jeden atom. Na szczęście wzajemne oddziaływanie atomów przez pole wnęki można bardzo osłabić, gdy użyje się pola lasera na tyle silnego, że spełniony będzie warunek $\Omega \gg g$. Wówczas wpływ kłopotliwych wyrazów będzie na tyle mały, że nie przeszkodzi w niezależnym manipulowaniu stanami atomów. Jednak, aby móc otrzymać proste postaci równań na ewolucje, konieczne jest jednoczesne założenie również drugiego warunku $\Delta_r = \delta_1$.

Kolejnym uogólnieniem modelu jednoatomowego, obok zwiększenia liczby atomów, jest wprowadzenie drugiego lasera L', emitującego światło spolaryzowane kołowo prawoskrętnie. Dlatego teraz będą możliwe aż trzy typy ewolucji stanu układu. Pierwszy, najprostszy typ ewolucji, dotyczy przypadku, gdy oba lasery są wyłączone. Drugi rodzaj ewolucji będzie miał miejsce wtedy, gdy jeden z atomów będzie wzbudzany polem lasera L, emitującym pole spolaryzowane kołowo lewoskrętnie. Trzeci typ ewolucji zachodzić będzie, gdy wybrany atom oświetlany będzie przez oba lasery L i L'. W rozważaniach nie będą brane pod uwagę operacje wzbudzania więcej niż jednego atomu na raz. Trzeci typ ewolucji dostarcza dodatkowej możliwości manipulacji stanem układu. Jednak aby wykorzystać ten dodatkowy sposób manipulacji, trzeba założyć, że $\Omega \gg \Omega' \gg g$.

Przedstawianie operacji zostanie rozpoczęte od tych najprostszych, odpowiadających czekaniu przez czas t z wyłączonymi laserami. Po założeniu że $\Omega = 0$ oraz $\Omega' = 0$, hamiltonian efektywny (5.31) przyjmuje postać

$$H = -\sum_{k=1}^{n} (\Delta_r \sigma_{00}^{(k)} + \delta_3 a^{\dagger} a \sigma_{00}^{(k)}) - i \kappa a^{\dagger} a \,. \tag{6.26}$$

Wszystkie wyrazy tego hamiltonianu efektywnego odpowiadają elementom diagonalnym w reprezentacji macierzowej i dlatego łatwo jest otrzymać poniższe wyrażenie na ewolucję dowolnego stanu bazowego

$$e^{-iHt}|x_1\dots n\rangle = e^{iN_0(\Delta_r + n\delta_3)t}e^{-n\kappa t}|x_1\dots n\rangle.$$
(6.27)

W równaniu (6.27) wprowadzony został symbol N_0 , który będzie odgrywać ważną rolę we wszystkich operacjach. Oznacza on liczbę atomów nie wzbudzanych żadnym laserem i znajdujących się w stanie $|0\rangle$. Jak widać, z równania (6.27) od liczby N_0 zależy czynnik fazowy, który z jednej strony jest pewnym utrudnieniem, ale z drugiej strony może być wykorzystany do realizowania bramek fazowych.

Dla pewnych przypadków równanie (6.27) można jeszcze uprościć. Tak jak w poprzednim modelu również i teraz prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia operacji zależy od tego, czy czas trwania operacji jest znacznie krótszy od średniego czasu wystąpienia emisji fotonu. Dlatego konieczne jest przyjęcie warunku $\delta_5 \gg \kappa$, gwarantującego bliską jedności wartość prawdopodobieństwa sukcesu. Po uwzględnieniu wcześniejszych założeń, widać że przyjęty przed chwilą warunek prowadzi do następujących relacji $\Delta_r \gg \kappa, \delta_3$. A zatem dla bardzo krótkich operacji, gdy $t \approx \Delta_r^{-1}$, hamiltonian efektywny (6.26) może zostać dobrze przybliżony przez $H = -\Delta_r \sigma_{00}^{(k)}$, a równanie (6.27) upraszcza się wtedy do postaci

$$e^{-iHt}|x_1\dots n\rangle = \varphi^{N_0}(t)|x_1\dots n\rangle, \qquad (6.28)$$

gdzie $\varphi(t) = e^{i\Delta_r t}$.

Kolejny typ ewolucji, który zostanie wykorzystany do realizacji wielu bardzo przydatnych operacji, ma miejsce, gdy zostanie włączony laser L ($\Omega \neq 0$), aby wzbudzać przejście $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ wybranego atomu o numerze k. Drugi z laserów, emitujący światło spolaryzowane kołowo prawoskrętnie jest podczas tego typu ewolucji wyłączony ($\Omega' = 0$). Niestety, w tym przypadku, za mało wyrazów hamiltonianu efektywnego (5.31) się zeruje, by rozwiązanie nieunitarnego równania Schrödingera było proste. Chcąc otrzymać proste równania, opisujące ewolucję stanu układu, trzeba narzucić na parametry wspomniany wcześniej warunek $\Delta_r = \delta_1$. Ostatecznie hamiltonian efektywny (5.31) przyjmuje następującą postać

$$H_{\text{eff}} = -\sum_{j} (\Delta_{r} \sigma_{00}^{(j)} + \delta_{3} a^{\dagger} a \sigma_{00}^{(j)}) - i \kappa a^{\dagger} a -\Delta_{r} \sigma_{11}^{(k)} - (\delta_{5} a \sigma_{10}^{(k)} + \text{H.c.}). \qquad (6.29)$$

Taka postać hamiltonianu efektywnego pozwala ewolucję stanów układu, dla których spełniony jest warunek $v_k = x_k + n > 0$, dobrze przybliżyć równaniem

$$e^{-iHt}|x_1\dots x_k\dots n\rangle = f_{N_0,v_k}(t)(\cos(\xi_k t)|x_1\dots x_k\dots n) +i\sin(\xi_k t)|x_1\dots x'_k\dots n'\rangle), \qquad (6.30)$$

gdzie dla zwartości zapisu wprowadzono następujące symbole: $\xi_k = \sqrt{v_k} \delta_5$, $f_{N_0,v_k}(t) = \varphi^{N_0+1}(t) \exp(-(v_k-1/2)\kappa t) \exp\{i \, \delta_3[v_k(2N_0+1) - N_0]t/2\}, x'_k = x_k - (-1)^{x_k+1}$ oraz $n' = n + (-1)^{x_k+1}$. Przy upraszczaniu równania (6.30) założono, że liczba N_0 nie jest zbyt duża. Takie założenie pozwala zastosować przybliżenie $4v_k \delta_5^2 \gg (v_k + N_0)^2 \delta_3^2$. Widać, że ten typ ewolucji daje duże możliwości manipulowania stanem układu. Włączenie lasera L i wzbudzanie nim k-tego atomu przez różne czasy umożliwia wykonanie różnych operacji.

Na początku przedstawione zostaną operacje dla najprostszych przypadków, to znaczy, gdy $v_k = 1$. Odwzorowanie stanu k-tego atomu na stan pola daje się wykonać przez włączenie lasera na czas $t^{(1)} = (\pi/2 + 2m_1\pi)/\delta_5$, gdzie m_1 jest liczbą naturalną. Zapis takich operacji jest następujący

$$|x_1 \dots 1 \dots 0\rangle \quad \to \quad if_{N_0,1}(t^{(1)})|x_1 \dots 0 \dots 1\rangle, \qquad (6.31)$$

$$|x_1 \dots 0 \dots 1\rangle \quad \to \quad if_{N_0,1}(t^{(1)})|x_1 \dots 1 \dots 0\rangle \,. \tag{6.32}$$

Włączenie lasera na czas $t^{(2)} = (3\pi/2 + 2m_1\pi)/\delta_5$ również pozwala "przepisać" stan wybranego atomu na stan pola, ale wprowadza dodatkowo czynnik fazowy -1, jak przedstawiono poniżej

$$|x_1 \dots 1 \dots 0\rangle \quad \to \quad -if_{N_0,1}(t^{(2)})|x_1 \dots 0 \dots 1\rangle, \qquad (6.33)$$

$$|x_1\dots 0\dots 1\rangle \quad \to \quad -if_{N_0,1}(t^{(2)})|x_1\dots 1\dots 0\rangle \,. \tag{6.34}$$

Bez problemu można też wytworzyć stan maksymalnie splątany wybranego atomu i pola. W tym celu należy włączyć laser na czas $t^{(3)} = (\pi/4 + 2m_1\pi)/\delta_5$, co odpowiada wykonaniu operacji

$$|x_1\dots 1\dots 0\rangle \rightarrow \frac{f_{N_0,1}(t^{(3)})}{\sqrt{2}}(i|x_1\dots 0\dots 1\rangle + |x_1\dots 1\dots 0\rangle), \quad (6.35)$$

$$|x_1...0...1\rangle \rightarrow \frac{f_{N_0,1}(t^{(3)})}{\sqrt{2}}(i|x_1...1...0\rangle + |x_1...0...1\rangle).$$
 (6.36)

Natomiast wprowadzenie jedynie czynnika fazowego bez zmiany populacji wybranego stanu jest możliwe dla czasów ewolucji: $t^{(4)} = (2m_1\pi)/\delta_5$ i $t^{(5)} = ([2m_1 + 1]\pi)/\delta_5$. Operacje takie opisane są następującymi równaniami:

$$|x_1 \dots x_k \dots n\rangle \quad \to \quad f_{N_0,1}(t^{(4)})|x_1 \dots x_k \dots n\rangle, \qquad (6.37)$$

$$|x_1 \dots x_k \dots n\rangle \rightarrow -f_{N_0,1}(t^{(5)})|x_1 \dots x_k \dots n\rangle.$$
 (6.38)

Wszystkie przedstawione operacje, to znaczy operacje odwzorowania, plątania i wprowadzania czynnika fazowego mogą być wykonane również dla takich stanów, że $v_k = 2$. Operację odwzorowania wykonać można przez włączenie lasera na czas $t^{(6)} = (\pi/2 + 2m_2\pi)/(\sqrt{2}\delta_5)$

$$x_1 \dots 1 \dots 1\rangle \rightarrow i f_{N_0,2}(t^{(6)}) | x_1 \dots 0 \dots 2\rangle,$$
 (6.39)

$$x_1 \dots 0 \dots 2 \rangle \rightarrow i f_{N_0,2}(t^{(6)}) | x_1 \dots 1 \dots 1 \rangle$$
 (6.40)

lub na czas $t^{(7)} = (3\pi/2 + 2m_2\pi)/(\sqrt{2}\delta_5)$

$$|x_1 \dots 1 \dots 1\rangle \quad \to \quad -if_{N_0,2}(t^{(7)})|x_1 \dots 0 \dots 2\rangle, \qquad (6.41)$$

$$|x_1 \dots 0 \dots 2\rangle \quad \to \quad -if_{N_0,2}(t^{(7)})|x_1 \dots 1 \dots 1\rangle, \qquad (6.42)$$

gdzie m_2 jest liczbą naturalną. Wzbudzanie wybranego atomu przez czas $t^{(8)} = (\pi/4 + 2m_2\pi)/(\sqrt{2}\delta_5)$ prowadzi do wytworzenia stanu maksymalnie splątanego

$$|x_1 \dots 1 \dots 1\rangle \rightarrow \frac{f_{N_0,2}(t^{(8)})}{\sqrt{2}}(i|x_1 \dots 0 \dots 2\rangle + |x_1 \dots 1 \dots 1\rangle), |x_1 \dots 0 \dots 2\rangle \rightarrow \frac{f_{N_0,2}(t^{(8)})}{\sqrt{2}}(i|x_1 \dots 1 \dots 1\rangle + |x_1 \dots 0 \dots 2\rangle).$$
(6.43)

Natomiast włączenie lasera na czas $t^{(9)} = (2m_2\pi)/(\sqrt{2}\delta_5)$ lub $t^{(10)} = ([2m_2 + 1]\pi)/(\sqrt{2}\delta_5)$ odpowiada operacji wprowadzenia dodatkowego czynnika fazowego

$$|x_1 \dots x_k \dots n\rangle \rightarrow f_{N_0,2}(t^{(9)})|x_1 \dots x_k \dots n\rangle,$$
 (6.44)

$$|x_1 \dots x_k \dots n\rangle \rightarrow -f_{N_0,2}(t^{(10)})|x_1 \dots x_k \dots n\rangle.$$
 (6.45)

Szczególnym przypadkiem jest wzbudzanie atomu znajdującego się w stanie $|0\rangle$, podczas gdy wnęka rezonansowa znajduje się w stanie próżni. Jest to przypadek dla którego $v_k = 0$. Na taki stan działać będą jedynie wyrazy $-\Delta_r \sigma_{00}^{(j)}$, które odpowiadają elementom diagonalnym w macierzowej reprezentacji hamiltonianu efektywnego (6.29). Dlatego włączenie lasera L na dowolny czas t spowoduje jedynie pojawienie się czynników fazowych, ale populacja takiego stanu się nie zmieni. Ewolucja takiego stanu jest zatem dana następującym równaniem

$$e^{-iHt}|x_1...0...0\rangle = \varphi^{N_0+1}(t)|x_1...0...0\rangle.$$
 (6.46)

Ze wzoru (6.15) z poprzedniego podrozdziału widać, że brak zmiany populacji stanu $|0\rangle$ atomu, gdy pole jest w stanie próżni, jest cechą bardzo pożądaną, ponieważ umożliwia "przepisanie" wartości kubitu z atomu na pole. Jednakże z drugiej strony, jeśli zdarzy się niechciana emisja fotonu podczas wykonywania operacji, to układ przejdzie do stanu $|00\rangle$ i pozostanie w nim na zawsze, ponieważ żadna z operacji umieszczonych w tabelkach 6.1 i 6.2 nie jest w stanie zmienić tego stanu. Tymczasem wiele algorytmów i protokołów, takich jak na przykład protokoły, wykorzystujące nadmiarowe kodowanie, potrzebuje sposobu na powrót do stanu początkowego. Dlatego wprowadzony został trzeci typ ewolucji stanu układu, wywołany przez jednoczesne oświetlenie wybranego atomu dwoma laserami L i L' o różnych polaryzacjach. Ponieważ oba przejścia $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ i $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ będą pompowane polami laserowymi, to przeprowadzenie atomu ze stanu $|0\rangle$ do stanu $|1\rangle$ będzie wykonalne nawet wówczas, gdy wnęka będzie się znajdować w stanie próżni. Proste rozwiązanie jest wykonalne tylko dla przybliżonej postaci hamiltonianu efektywnego (6.29). Ponieważ czasy operacji są proporcjonalne do δ_4^{-1} , to w hamiltonianie efektywnym można zaniedbać wszystkie wyrazy z czynnikami znacznie mniejszymi od δ_4 . Wówczas otrzymuje się hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = -\sum_{j} \Delta_{r} \sigma_{00}^{(j)} - \Delta_{r} \sigma_{11}^{(k)} - (\delta_{4} \sigma_{10}^{(k)} + \text{H.c.}), \qquad (6.47)$$

umożliwiający wyznaczenie przybliżonych równań na ewolucję, podanych poniżej

$$e^{-iHt}|x_1\dots 0\dots 0\rangle = \varphi^{N_0+1}(t)(i\sin(\delta_4 t)|x_1\dots 1\dots 0) +\cos(\delta_4 t)|x_1\dots 0\dots 0\rangle), \qquad (6.48)$$

$$e^{-iHt}|x_1\dots 1\dots 0\rangle = \varphi^{N_0+1}(t)(i\sin(\delta_4 t)|x_1\dots 0\dots 0) + \cos(\delta_4 t)|x_1\dots 1\dots 0\rangle).$$
(6.49)

Jest rzeczą oczywistą, że użycie impulsu $\pi/2$ umożliwia zmianę stanu atomu nawet wtedy, gdy pole wnęki rezonansowej znajduje się w stanie próżni. Taki

przypadek opisany jest przez równania

$$|x_1 \dots 0 \dots 0\rangle \quad \to \quad i\varphi^{N_0 + 1}(t^{(11)})|x_1 \dots 1 \dots 0\rangle, \tag{6.50}$$

$$|x_1 \dots 1 \dots 0\rangle \rightarrow i\varphi^{N_0+1}(t^{(11)})|x_1 \dots 0 \dots 0\rangle, \qquad (6.51)$$

gdzie $t^{(11)} = \pi/(2\delta_4)$. Korzystając z ewolucji tego typu, można też bez problemu przygotować wybrany atom w dowolnej superpozycji dwóch podpoziomów stanu podstawowego. W szczególności, stosując impuls $\pi/4$, można wykonać następujące operacje

$$|x_1\dots 0\dots 0\rangle \rightarrow \frac{\varphi^{N_0+1}(t^{(12)})}{\sqrt{2}}(|x_1\dots 0\dots 0\rangle + i|x_1\dots 1\dots 0\rangle), (6.52)$$

$$|x_1\dots 1\dots 0\rangle \quad \to \quad \frac{\varphi^{N_0+1}(t^{(12)})}{\sqrt{2}}(|x_1\dots 1\dots 0\rangle + i|x_1\dots 0\dots 0\rangle), (6.53)$$

gdzie $t^{(12)} = \pi/(4\delta_4).$

Rozdział 7

Teleportacja stanu odległego atomu

Głównym celem tej rozprawy jest przedstawienie możliwości jakie daje układ teleportujący stany atomowe z wykorzystaniem kwantowej interferencji pól wychodzących z dwóch optycznych rezonatorów. Po raz pierwszy taki układ został zaproponowany w swej najprostszej postaci przez Bosego i innych [19] i stał się inspiracją dla wielu badaczy, w tym i dla autora tej rozprawy [86, 87,95]. Zainteresowanie jakim cieszy się wspomniany układ, wynika z kilku istotnych cech, wyróżniających go spośród innych układów teleportujących stany atomowe. Pierwszą z nich jest niezwykłość wykorzystania zjawiska emisji spontanicznej, które zwykle kojarzone jest z utratą informacji kwantowej, właśnie do przetwarzania tej informacji. Drugą cechą jest użycie do przechowywania wartości kubitów dwóch podpoziomów stanu podstawowego atomu trójpoziomowego typu Λ . Z podpoziomów stanu podstawowego atom nie może przejść spontanicznie do innych poziomów i w związku z tym informacja kwantowa zakodowana w superpozycji tych dwóch podpoziomów jest bezpieczna. W eksperymentach dzieki takiej kwantowej pamięci udaje się przetrzymywać nawet stany splątane dwóch atomów przez czasy przekraczające 0,1 s [96]. Dla porównania warto wspomnieć, że czas magazynowania wartości kubitu w stanach fotonowych jest krótszy o wiele rzędów wielkości. Jednak najważniejsza cecha przedstawianego układu jest połaczenie zalet stanów atomowych i fotonowych do przeprowadzenia teleportacji kubitów. O ile bowiem stany atomowe sa najlepsze jako kwantowa pamięć, to stany fotonowe są bezkonkurencyjne w przesyłaniu informacji kwantowej na duże odległości. Wynika to z faktu, że fotony przemieszczają się z największą możliwa predkościa — predkościa światła i w dodatku słabo oddziałuja z otoczeniem podczas całej podróży. Dzięki wykorzystaniu stanów fotonowych układ zaproponowany przez Bosego i innych umożliwia teleportację stanów

atomowych na duże odległości. W tym rozdziale zostanie przedstawiony w szczegółach protokół teleportacji oraz możliwości jego udoskonalenia. Zostaną także obliczone parametry opisujące ten protokół, a mianowicie prawdopodobieństwo sukcesu i wierność teleportowanego stanu.

7.1 Protokół teleportacji

Na początku cały proces teleportacji zostanie przedstawiony dla najprostszego modelu. Względem oryginalnej pracy Bosego i innych rachunki i wzory zostaną tutaj jeszcze dodatkowo uproszczone przez użycie operacji z poprzedniego rozdziału. Urządzenie realizujące teleportację jest przedstawione schematycznie na rysunku 7.1. Składa się ono z dwóch optycznych wnęk rezonan-



Rysunek 7.1: Schemat urządzenia do teleportowania stanów atomowych na duże odległości.

sowych W_A i W_B , dwóch laserów L_A i L_B , 50% płytki światłodzielącej P oraz dwóch detektorów D_+ i D_- . Wewnątrz każdej wnęki rezonansowej uwięziony jest pojedynczy atom trójpoziomowy typu Λ . Po stronie nadawcy, któremu przypisany zostanie symbol A, znajduje się wnęka W_A wraz z umieszczonym w niej atomem, laser L_A oraz układ pomiarowy złożony z płytki półprzepuszczalnej P i dwóch detektorów D_+ i D_- . Po stronie odbiorcy kwantowej informacji, którego oznaczać będzie odtąd symbol B, znajduje się reszta
7.1. PROTOKÓŁ TELEPORTACJI

urządzenia, to znaczy wnęka W_B , atom wewnątrz tej wnęki i laser L_B . Oba układy atom-wnęka są identyczne, podobnie jak oba lasery, tak że podukłady odbiorcy i nadawcy opisuje identyczny model poziomów energetycznych przedstawiony na rysunku 7.2. Informacją kwantową, jaka przesłana



Rysunek 7.2: Schemat poziomów energetycznych atomu trójpoziomowego typu Λ uwięzionego we wnęce rezonansowej i pompowanego laserem.

ma być do odbiorcy jest wartość kubitu zakodowana w superpozycji dwóch podpoziomów stanu podstawowego $|0\rangle$ i $|1\rangle$ atomu nadawcy. Operacje na kubicie mogą być wykonywane, wykorzystując proces dwustopniowy, w którym udział bierze poziom wzbudzony $|2\rangle$. Każdy z obu laserów emituje światło spolaryzowane kołowo lewoskrętnie, które wzbudza przejście $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Z kolei przejście $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ jest sprzężone z modem pola uwięzionego wewnątrz każdej wnęki rezonansowej. Zarówno częstość lasera $\omega_{\rm L}$, jak i częstość modu wnęki $\omega_{\rm w}$ są odstrojone od częstości odpowiednich przejść o tę samą wielkość Δ . To odstrojenie jest na tyle duże, że populacja poziomu wzbudzonego bedzie znikoma nawet wówczas, gdy atom bedzie pompowany laserem. Założenie dużego odstrojenia od rezonansu jest konieczne, ponieważ atom z poziomu wzbudzonego może spontanicznie przejść do jednego z podpoziomów stanu podstawowego, bezpowrotnie niszczac informacje kwantowa. W tym najprostszym modelu w pracy Bosego i innych zaniedbany został współczynnik emisji spontanicznej po przyjęciu założenia $\Delta \gg \gamma$. Natężenie wiązki laserowej jest dobrane tak, aby stała sprzężenia Ω pola laserowego z przejściem $|2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ była dokładnie równa stałej sprzężenia g modu z przejściem $|2\rangle \leftrightarrow |0\rangle$. Z poprzedniego rozdziału wiadomo, że ewolucją bez emisji w takim uproszczonym modelu rządzi hamiltonian efektywny (6.1), umożliwiający wykonanie operacji zestawionych w tabelkach 6.1 i 6.2. Z kolei wykrycie emisji przez układ dwóch detektorów i płytki półprzepuszczalnej jest opisane w rozdziale 4. W tym najprostszym modelu założone zostanie oczywiście, że oba detektory są doskonałe, czyli pozbawione ciemnych zliczeń i cechujące się stuprocentową efektywnością. Zatem zasygnalizowanie wykrycia fotonu przez każdy z detektorów odpowiada zadziałaniu na stan globalny jednego z dwóch operatorów emisji (4.13) lub (4.14).

Po przedstawieniu modelu opisującego urządzenie, można wreszcie przystąpić do prezentacji protokołu teleportacyjnego. Przed rozpoczęciem teleportacji, wartość kubitu jest zakodowana w superpozycji dwóch podpoziomów stanu podstawowego atomu nadawcy $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Zespolone amplitudy α i β mogą być, choć nie muszą, nieznane nadawcy. Oczywiście jeśli nadawca sam przygotuje ten stan początkowy, to będzie on dla niego znany, jeśli jednak otrzyma ten stan od innej osoby bez żadnych dodatkowych informacji, to nie tylko nie będzie znać tych amplitud, ale i nie będzie miał żadnej możliwości, by je zmierzyć. Teleportacja kwantowa umożliwia nadawcy w obu tych przypadkach wysłanie tego stanu w inne miejsce. Na początku pola obu wnęk znajdują się w stanie próżni, co zważywszy na brak pompowania laserem i obecność tłumienia jest stanem naturalnym. Atom odbiorcy, który jest miejscem docelowym dla przesyłanej informacji kwantowej, na początku przygotowany jest w stanie $|1\rangle$. Stan początkowy całego układu jest dany następującą funkcją falową

$$|\phi\rangle = (\alpha|00\rangle_A + \beta|10\rangle_A) \otimes |10\rangle_B.$$
(7.1)

Proces teleportacji składa się z trzech etapów. Pierwszym z nich jest etap przygotowania, w którym informacja kwantowa bezpiecznie dotąd przechowywana w atomie nadawcy musi zostać zakodowana w stanie pola wnęki rezonansowej. To właśnie dzięki tej operacji możliwe jest pogodzenie długiego przechowywania wartości kubitu z dalekim i szybkim transportem tej wartości. Nadawca po prostu włącza swój laser L_A na czas $t_1 = 2/\Omega_{\kappa}[\pi - \operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/\kappa)]$, wykonując operacje O_1 i O_2 z tabelki 6.1. Po zakończeniu tych operacji podukład nadawcy przechodzi do stanu

$$|\tilde{\psi}\rangle_A = \alpha |00\rangle_A + ie^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \beta |01\rangle_A, \qquad (7.2)$$

a laser L_A zostaje wyłączony. Jak widać, atom nadawcy znajduje się po zakończeniu etapu przygotowania w stanie $|0\rangle$, podczas gdy amplitudy α i β są zakodowane w stanie pola wnęki rezonansowej nadawcy. Również odbiorca musi wykonać pewne działanie w etapie przygotowania. Otóż, jak powiedziano w podrozdziale 2.9, teleportacja kwantowa wymaga wykonania połączonego pomiaru na kubicie, zawierającym przesyłaną informację i jednym kubicie należącym do maksymalnie splątanej pary. Po takim pomiarze wykonanym w bazie Bella, informacja kwantowa zostaje zakodowana w drugim z kubitów z maksymalnie splątanej pary. Układ złożony z płytki półprzepuszczalnej i dwóch detektorów pozwala przeprowadzić połączony pomiar stanu pól obu wnęk rezonansowych. Jeśli zatem po pomiarze informacja kwantowa,

7.1. PROTOKÓŁ TELEPORTACJI

znajdująca przed pomiarem w stanie pola we wnęce nadawcy, ma się znaleźć w atomie odbiorcy, to odbiorca musi w etapie przygotowania wytworzyć maksymalnie splątany stan swojego atomu i pola swojej wnęki. Wykonanie tego zadania jest proste. Wystarczy, że odbiorca włączy swój laser L_B na czas $t_3 = 2/\Omega_{\kappa} \operatorname{arctg}(\Omega_{\kappa}/(2\delta - \kappa))$. Działanie takie opisuje operacja O_4 , po zastosowaniu której otrzymuje się następujące wyrażenie na stan podukładu odbiorcy

$$|\tilde{\psi}\rangle_B = e^{i\delta t_3} e^{-\frac{\kappa t_3}{2}} \theta(t_3) (|10\rangle_B + i|01\rangle_B).$$
(7.3)

Czasy operacji nadawcy i odbiorcy są różne, ale synchronizują oni swoje działania tak, aby zakończyć je w tym samym momencie. Na tym kończy się pierwszy etap protokołu. Zanim jednak omówiony zostanie drugi etap, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia etapu przygotowania. Jeśli w tym pierwszym etapie któryś z detektorów zasygnalizuje wykrycie fotonu, to cała teleportacja zakończy się niepowodzeniem. Prawdopodobieństwo, że nie wystąpi żadna emisja fotonu podczas wykonywania opisanych operacji można obliczyć, wykorzystując wzór (3.55). Wzór ten dla stanu końcowego nadawcy (7.2) przyjmuje następującą postać

$$P_A = {}_A \langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle_A = |\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} \,. \tag{7.4}$$

Natomiast prawdopodobieństwo braku wystąpienia emisji podczas operacji odbiorcy jest dane wyrażeniem

$$P_B = {}_B \langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle_B = e^{-2\kappa t_3} \frac{8\delta^2}{\Omega_\kappa^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_\kappa t_3}{2}\right).$$
(7.5)

Naturalnie etap przygotowania będzie tylko wtedy udany, gdy powiodą się jednocześnie operacje nadawcy i odbiorcy. Zatem prawdopodobieństwo pomyślnego przeprowadzenia pierwszego etapu protokołu jest dane wzorem

$$P_1 = P_A P_B . (7.6)$$

Metoda trajektorii kwantowych wymaga normowania wektora stanu po każdym etapie ewolucji. Tylko wtedy wyrażenia na prawdopodobieństwa związane z ewolucją podczas poszczególnych etapów będą prawidłowe. Jeśli etap przygotowania zakończy się sukcesem, to stan obu podukładów będzie opisany następującymi unormowanymi wektorami

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1}}} (\alpha|00\rangle_A + i e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \beta|01\rangle_A) \,, \\ |\psi\rangle_B &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_B + i|01\rangle_B) \,. \end{aligned}$$
(7.7)

Jak widać, informacja zakodowana jest w polu nadawcy, a pole odbiorcy jest maksymalnie splatane z atomem odbiorcy. Wiec, zgodnie z idea teleportacji kwantowej, wykonanie połączonego pomiaru stanu obu pól spowoduje zakodowanie przesyłanej informacji w atomie odbiorcy. Pomiar taki wykonywany jest przez nadawcę w drugim etapie protokołu — etapie detekcji. Cały proces pomiarowy jest wyjątkowo prosty. Polega na czekaniu przez pewien skończony czas t_D i rejestrowaniu wskazań obu detektorów. Niestety nie wszystkie wskazania oznaczają pomyślne zakończenie teleportacji. Wykonanie pomiaru rozróżniającego wszystkie cztery stany Bella wymaga zastosowania nieliniowych elementów optycznych bądź dodatkowych stopni swobody [20,21]. W zaproponowanym przez Bosego i innych układzie, jedynie dwa na cztery możliwe wyniki pomiaru odpowiadają stanom Bella. Dlatego etap detekcji zakończy się powodzeniem tylko w połowie przypadków, gdy podczas całego etapu zarejestrowany zostanie tylko i wyłącznie jeden foton. Wykrycie dwóch fotonów bądź nie wykrycie żadnego kończy się nieodwracalnym zniszczeniem przesyłanej informacji kwantowej. W dalszej części rozważań obliczone zostaną stany układów tylko dla udanych przypadków. Przez cały czas pomiaru t_D oba lasery są wyłączone, więc ewolucję stanu opisują operacje z tabelki 6.2. Do czasu wystąpienia emisji fotonu, oznaczonego symbolem t_i , ewolucja podukładu nadawcy jest zdeterminowana operacjami O_6 i O_8

$$|\tilde{\psi}(t_j)\rangle_A = \frac{\alpha|00\rangle_A + ie^{i\delta t_1}e^{-\frac{\kappa t_1}{2}}e^{-\kappa t_j}\beta|01\rangle_A}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2e^{-\kappa t_1}}}.$$
(7.8)

Tymczasem ewolucję stanu podukładu odbiorcy opisują operacje O_7 i O_8 . W czasie t_j od rozpoczęcia etapu detekcji stan ten jest następujący:

$$|\tilde{\psi}(t_j)\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_B + ie^{i\delta t_j}e^{-\kappa t_j}|01\rangle_B).$$
(7.9)

Prawdopodobieństwo, że od początku etapu detekcji, aż do czasu t_j nie wystąpi żadna emisja, jest dane wzorem

$$P_2(t_j) = \frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_j})(1 + e^{-2\kappa t_j})}{2(|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1})}.$$
 (7.10)

Emisję, która zdarza się w nieskończenie małym przedziale czasu $(t_j, t_j + dt)$, opisuje jeden z dwóch operatorów (4.13) lub (4.14) . Pierwszy z tych operatorów odpowiada pierwszemu pomyślnemu wynikowi pomiaru, gdy foton zostaje zarejestrowany tylko przez detektor D_+ . Drugi operator związany

7.1. PROTOKÓŁ TELEPORTACJI

jest z drugim pomyślnym przypadkiem, gdy detektorem, który wykryje jedyną emisję będzie D_- . Żeby wyznaczyć stan układu jednocześnie dla obu pomyślnych wyników pomiaru wprowadzony zostanie operator

$$C_{\pm} = \sqrt{\kappa} (a_A + i\epsilon a_B), \qquad (7.11)$$

gdzie $\epsilon = 1$, gdy wykrycie fotonu zasygnalizuje detektor D_+ albo $\epsilon = -1$, gdy "kliknie" detektor D_- . Operatorem C_{\pm} należy zadziałać na połączony i unormowany stan obu podukładów $|\phi(t_j)\rangle = |\psi(t_j)\rangle_A \otimes |\psi(t_j)\rangle_B$. Wynikiem tej operacji jest wektor

$$C_{\pm}|\phi(t_{j})\rangle = \frac{\sqrt{\kappa e^{-\kappa t_{j}}}}{\sqrt{(1+e^{-2\kappa t_{j}})(|\alpha|^{2}+|\beta|^{2}e^{-\kappa t_{1}}e^{-2\kappa t_{j}})}} \times (i\epsilon\alpha|00\rangle_{B} + e^{i\delta t_{1}}e^{-\frac{\kappa t_{1}}{2}}\beta|10\rangle_{B})|00\rangle_{A} + ie^{i\delta t_{1}}e^{i\delta t_{j}} \times e^{-\frac{\kappa t_{1}}{2}}e^{-\kappa t_{j}}\beta(|01\rangle_{B}|00\rangle_{A} + i\epsilon|00\rangle_{B}|01\rangle_{A}).$$
(7.12)

Prawdopodobieństwo wystąpienia emisji fotonu pomiędzy czasem t_j , a czasem $t_j + dt_j$ można wyznaczyć ze wzoru (3.54). Jest ono równe

$$P_{3}(t_{j})dt_{j} = \frac{2\kappa e^{-2\kappa t_{j}}(|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}e^{-\kappa t_{1}} + 2|\beta|^{2}e^{-\kappa t_{1}}e^{-2\kappa t_{j}})}{(1 + e^{-2\kappa t_{j}})(|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}e^{-\kappa t_{1}}e^{-2\kappa t_{j}})}dt_{j}.$$
 (7.13)

Wektor stanu dla całego układu po wystąpieniu emisji, otrzymuje się normując wektor (7.12)

$$\begin{aligned} |\phi(t_j)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} + 2|\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_j}}} \\ &\times (i\epsilon\alpha|00\rangle_B + e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}}\beta|10\rangle_B)|00\rangle_A \\ &+ ie^{i\delta t_1} e^{i\delta t_j} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} e^{-\kappa t_j}\beta(|01\rangle_B|00\rangle_A + i\epsilon|00\rangle_B|01\rangle_A) . \end{aligned}$$
(7.14)

Po emisji fotonu kontynuowana jest ewolucja dana operacjami O_6 , O_7 i O_8 aż do końca etapu detekcji, czyli do czasu t_D . W wyniku tej ewolucji układ przechodzi do następującego stanu

$$\begin{split} |\tilde{\phi}(t_D)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} + 2|\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_j}}} \\ &\times (i\epsilon\alpha|00\rangle_B + e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}}\beta|10\rangle_B)|00\rangle_A + ie^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \\ &\times \beta e^{-\kappa t_D} e^{i\delta t_D} (|01\rangle_B|00\rangle_A + i\epsilon|00\rangle_B|01\rangle_A) , \end{split}$$
(7.15)

przy czym prawdopodobieństwo, że do końca etapu detekcji nie będzie drugiej emisji jest równe normie wektora (7.15)

$$P_4(t_j) = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} + 2|\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_D}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} + 2|\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_j}}.$$
 (7.16)

Ostatecznie po zakończonym pomyślnie etapie detekcji układ znajduje się w następującym stanie

$$\begin{aligned} |\phi(t_D)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} + 2|\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_D}}} \\ &\times (i\epsilon\alpha|00\rangle_B + e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}}\beta|10\rangle_B)|00\rangle_A + ie^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \\ &\times \beta e^{-\kappa t_D} e^{i\delta t_D} (|01\rangle_B|00\rangle_A + i\epsilon|00\rangle_B|01\rangle_A) \,. \end{aligned}$$
(7.17)

Jak widać, tylko niepożądane wyrazy w (7.17) posiadają czynnik $\exp(-\kappa t_D)$. Jeśli eksperymentator ustali wystarczająco długi czas t_D , to niechciane stany znikną z superpozycji (7.17). Wówczas łatwo jest sprawdzić, że informacja kwantowa została przeniesiona na atom odbiorcy. Dla dodatkowego uproszczenia można użyć przybliżonych wartości czynników $\exp(i\delta t_1) \approx i$ oraz $\exp(-\kappa t_1) \approx 1$, dostając wektor

$$|\phi(t_D)\rangle = (\epsilon \alpha |00\rangle_B + \beta |10\rangle_B) \otimes |00\rangle_A.$$
(7.18)

Teraz widać wyraźnie, że dla odpowiednio długich czasów etapu detekcji, to znaczy, gdy $t_D \gg \kappa^{-1}$, wartość kubitu zakodowana początkowo w atomie nadawcy zostaje przeniesiona na atom odbiorcy. Oba stany różni jednak czynnik fazowy ϵ zależny od wyniku pomiaru. Odtworzenie oryginalnego stanu zależy zatem od tego czy odbiorca zna wynik pomiaru i dlatego pod koniec etapu detekcji nadawca przesyła wiedzę o pomiarze za pomocą dwóch bitów i klasycznego kanału informacyjnego.

Z chwilą otrzymania wiadomości odbiorca zaczyna ostatni etap protokołu — etap odtwarzania. Oryginalna informacja zostaje odtworzona poprzez usunięcie kłopotliwego czynnika fazowego. Jeśli wynikiem pomiaru było wykrycie tylko jednego fotonu przez detektor D_+ , to odbiorca nic nie musi robić, ponieważ $\epsilon = 1$. Jeśli jednak pojedynczy foton zaobserwowany został przez detektor D_{-} , to $\epsilon = -1$ i odbiorca musi wprowadzić dodatkowy czynnik fazowy -1. Operację wprowadzania czynnika fazowego -1da się zrealizować, wykorzystując równanie ewolucji (6.3). Jednak wówczas wprowadziłoby się również dodatkowe czynniki związane z tłumieniem, powodujące pogorszenie wierności całego procesu teleportacji. Dlatego warto w tym etapie wykorzystać inny mechanizm. Atom trójpoziomowy typu Λ powstaje przez rozszczepienie poziomu podstawowego w silnym polu magnetycznym (efekt Zeemana), bądź elektrycznym (efekt Starka). Zwiększając to rozszczepienie o wielkość δE , powoduje się włączenie ewolucji opisanej przez hamiltonian $H = \delta E \sigma_{00}$ [19]. Taka ewolucja nie wprowadza żadnego tłumienia i dlatego idealnie nadaje się do operacji wprowadzenia dodatkowego czynnika fazowego.

7.1. PROTOKÓŁ TELEPORTACJI

Na tym kończy się cały protokół teleportacji. Dokładny stan układu po teleportacji dany jest wektorem (7.17) z wartością $\epsilon = 1$. Informacja kwantowa po teleportacji jest przechowywana w atomie odbiorcy. Informacja ta jest jednak nieznacznie zniekształcona. W celu sprawdzenia, jak bliskie są sobie wartości kubitów przed teleportacją i po teleportacji, należy obliczyć wierność teleportowanego stanu. W tym badaniu tylko stan atomu odbiorcy jest interesujący, a jak widać w wektorze (7.17) są nadal zmienne całego układu. Nie można ich w prosty sposób usunąć z obliczeń, ponieważ stan (7.17) nie da się przedstawić w postaci iloczynu stanu atomu odbiorcy i stanu reszty układu. Jednak pomimo obecności szczątkowego splątania, można wyeliminować z opisu resztę układu, posługując się śladem częściowym. Najpierw wyznacza się macierz gęstości całego układu $\rho = |\phi(t_D)\rangle\langle\phi(t_D)|$, a następnie wykonuje się ślad częściowy według wzoru (3.3). W wyniku tych działań otrzymuje się macierz gęstości opisującą wyłącznie stan atomu odbiorcy

$$\rho_{\text{at}B} = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} + 2|\beta|^2 e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_D}} \times \left[(|\alpha|^2 + 2e^{-\kappa t_1}|\beta|^2 e^{-2\kappa t_D}) |0\rangle \langle 0| + e^{-\kappa t_1} |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| + i\epsilon\alpha\beta^* e^{-i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} |0\rangle \langle 1| - i\epsilon\alpha^*\beta e^{i\delta t_1} e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} |1\rangle \langle 0| \right]. \quad (7.19)$$

Po idealnej teleportacji stan atomu odbiorcy powinien znaleźć się w dokładnie takim samym stanie w jakim znajdował się atom nadawcy przed teleportacją, czyli w stanie $|\psi\rangle_{atB} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Ponieważ stan rzeczywisty dany jest macierzą gęstości, a stan idealny wektorem, to wierność teleportowanego stanu najlepiej policzyć, używając wzoru (2.28). Po uproszczeniu, wyrażenie na wartość wierności przybiera następującą postać

$$F(t_D) = \frac{|\alpha|^4 + e^{-\kappa t_1} |\beta|^2 (|\beta|^2 + 2|\alpha|^2 e^{-2\kappa t_D}) + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \sin(\delta t_1)}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} (1 + 2e^{-2\kappa t_D})}.$$
(7.20)

Wierność teleportowanego stanu zależy od modułów amplitud początkowego stanu atomu nadawcy, to znaczy od $|\alpha|$ i $|\beta|$. W ogólności ten stan jest nieznany, a więc obecność modułów amplitud we wzorze jest kłopotliwa. Dlatego konieczne jest wyznaczenie wierności, uśrednionej po wszystkich możliwych stanach początkowych. Najbardziej naturalne byłoby uśrednienie przy przyjęciu równomiernego rozkładu prawdopodobieństwa wystąpienia każdej możliwej wartości kubitu. W tym celu należałoby we wzorze (7.20) zastąpić amplitudy α i β odpowiednimi amplitudami ze wzoru (2.4), a następnie obliczyć podwójną całkę otrzymanego wyrażenia po fazach θ i ϕ . Jednak tutaj, ze względu na prostotę, całkowanie zostanie wykonane dla równomiernego rozkładu prawdopodobieństwa wystąpienia każdej wartości amplitudy β . Nie jest to najlepszy rozkład bo stan $|0\rangle$ jest w nim uprzywilejowany, ale nie przeszkodzi to w zrealizowaniu podstawowego celu, jakim jest zbadanie wpływu atomowej emisji spontanicznej na protokół. W ten sposób uśredniona wierność jest dana przez

$$\overline{F}(t_D) = \frac{1}{C} \left[\frac{A}{3} + B - \frac{A}{C} + \left(C - B + \frac{A}{C} \right) \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arctg}(\sqrt{C}) \right], \quad (7.21)$$

gdzie

$$A = 1 + e^{-\kappa t_1} (1 - 2e^{-2\kappa t_D}) - 2e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \sin(\delta t_1),$$

$$B = 2e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_D} + 2e^{-\frac{\kappa t_1}{2}} \sin(\delta t_1) - 2,$$

$$C = e^{-\kappa t_1} (1 + 2e^{-2\kappa t_D}) - 1.$$
(7.22)

Drugą obok wierności wielkością, określającą użyteczność każdego układu do kwantowej teleportacji jest prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia protokołu. Prawdopodobieństwo to będzie też dalej nazywane prawdopodobieństwem sukcesu. W tym konkretnym modelu, teleportacja zakończy się sukcesem, jeśli w pierwszym etapie protokołu nie wystąpi żadna emisja, a w drugim jedna i tylko jedna. Ponieważ dla każdego czasu emisji w etapie detekcji t_j z przedziału od 0 do t_D teleportacja zakończy się pomyślnie, to prawdopodobieństwo sukcesu można otrzymać, całkując iloczyn poszczególnych prawdopodobieństw względem t_j

$$P(t_D) = P_1 \int_0^{t_D} P_2(t_j) P_3(t_j) P_4(t_j) dt_j.$$
(7.23)

Wynikiem całkowania jest następujące wyrażenie na prawdopodobieństwo pomyślnej realizacji protokołu teleportacji

$$P(t_D) = P_B \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-\kappa t_1} (1 + 2e^{-2\kappa t_D}))(1 - e^{-2\kappa t_D}). \quad (7.24)$$

Widać, że również prawdopodobieństwo sukcesu zależy od teleportowanego stanu. Dlatego ponownie należy obliczyć wartość uśrednioną po wszystkich możliwych stanach początkowych. Wówczas otrzymuje się poniższy wzór na średnie prawdopodobieństwo sukcesu

$$\overline{P}(t_D) = \frac{1}{6} P_B (1 - e^{-2\kappa t_D}) [e^{-\kappa t_1} (1 + 2e^{-2\kappa t_D}) + 2].$$
 (7.25)

7.2 Wpływ emisji spontanicznej na teleportację

Przydatność propozycji Bosego i innych może być oszacowana dzięki wzorom na wierność (7.21) i prawdopodobieństwo sukcesu (7.25). Wyznaczenie wartości obu wielkości wymaga przyjęcia wielu parametrów, występujących w modelu. Jednak ich wybór musi być dokonany bardzo ostrożnie, ponieważ układ będzie działać prawidłowo tylko wtedy, gdy spełnione zostaną wszystkie warunki przyjęte w modelu. Warto w tym miejscu zebrać wszystkie warunki przedstawione w kilku ostatnich rozdziałach i nadać im zwartą postać. Po uproszczeniach można wspomniane warunki sprowadzić do następującej, przejrzystej postaci: ($\Delta = \Delta', \Omega = g, \Delta \gg \gamma, \Delta \gg \Omega, \delta \gg \kappa$). Teraz łatwo jest sprawdzić, że wartości parametrów zaproponowane w artykule Bosego i innych [19] faktycznie spełniają wszystkie wymagania modelu

$$(\Delta; \Omega; g; \gamma; \kappa)/2\pi = (100; 10; 10; 1; 0, 01) \text{MHz}.$$
 (7.26)

Ostatnim parametrem niezbędnym do obliczenia wartości wierności i prawdopodobieństwa sukcesu jest czas przeznaczony na etap detekcji. Zamiast jednak wybierać wartość t_D , kierując się jedynie wskazówką mówiącą, że czas ten musi być odpowiednio większy od κ^{-1} , lepiej ustalić optymalną wartość przez wykreślenie zależności średniej wierności i średniego prawdopodobieństwa sukcesu od czasu t_D . Rysunek 7.3 pokazuje, że średnia wierność teleportacji wzrasta wraz z długością etapu detekcji. Dla czasu $t_D = 50 \mu s$ średnia wierność w zasadzie nie różni się od jedności. Ustalanie czasów dużo większych od κ^{-1} , to znaczy przynajmniej 10 razy większych, nie jest konieczne, ponieważ 50 μ s to zaledwie $\pi \kappa^{-1}$ dla parametrów (7.26). Dla porównania, średnia wierność teleportacji została także policzona numerycznie za pomocą metody trajektorii kwantowych. Metoda ta pozwala wykorzystać dużo ogólniejszy hamiltonian efektywny (5.13), niż ten użyty w obliczeniach analitycznych. Autor tej rozprawy doktorskiej napisał program w języku C++, realizujący różne algorytmy generujące trajektorie kwantowe. W tym przypadku użyty został algorytm, w którym nieunitarne równanie Schrödingera jest rozwiązywane metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Ponadto wykorzystana została również metoda Monte Carlo w celu uśrednienia wartości wierności po wszystkich możliwych stanach początkowych. Na wykresie 7.3 wyniki numeryczne przedstawione są przez punkty. Każdy punkt jest średnią z 10 000 trajektorii, a każda z trajektorii startowała z innego, wybranego losowo stanu początkowego. Jak widać z wykresu 7.3, wyniki numeryczne różnią się znacząco od wyników analitycznych. Średnia wierność policzona numerycznie rośnie szybciej od tej obliczonej analitycznie.



Rysunek 7.3: Zależność średniej wierności teleportacji od długości etapu detekcji. Linia ciągła przedstawia wartości otrzymane ze wzoru (7.21) a punkty przestawiają wartości otrzymane numerycznie dla hamiltonianu efektywnego (5.13).

Chociaż szybszy wzrost wierności jest korzystny dla procesu teleportacji, to niepokojący jest fakt istnienia tak dużej rozbieżności. Rozbieżności pomiędzy wynikami analitycznymi a numerycznymi mają jeszcze poważniejszy charakter w przypadku średniego prawdopodobieństwa pomyślnego zakończenia teleportacji. Jak widać na rysunku 7.4, średnie prawdopodobieństwo sukcesu otrzymane ze wzoru (7.25), rośnie z długością czasu etapu detekcji, dążąc do wartości zbliżonej do 0,48. W takim układzie można wykorzystać tylko dwa z czterech wyników pomiaru, dlatego krzywa na wykresie 7.4 nie przekracza granicy 0,5. Prawdopodobieństwo wystapienia emisji podczas etapu przygotowania nie jest zerowe i dlatego krzywa ta nie tylko nie przekroczy, ale i nie osiągnie nigdy wartości 0,5. Średnie prawdopodobieństwo można natomiast zbliżać do tej wartości, zmniejszając κ względem δ . Jednak 48 procentowe prawdopodobieństwo i tak jest stosunkowo blisko idealnego przypadku. Tymczasem ogólniejszy model prowadzi do wyników bardzo odległych od idealnych. Ponownie ogólniejszy hamiltonian efektywny (5.13) wymusza zastosowanie trajektorii kwantowych. Tym razem jednak czas wystąpienia emisji nie był w programie wyznaczany losowo. Dyskretny zbiór czasów pozwala we wzorze (7.23) całkowanie przybliżyć sumowaniem. Ta metoda wymaga policzenia dla jednego stanu początkowego tylu trajektorii, jaki jest rozmiar dyskretnego zbioru czasów etapu detekcji. W każdej trajektorii



Rysunek 7.4: Średnie prawdopodobieństwo sukcesu policzone analitycznie ze wzoru (7.25) (linia ciągła) oraz numerycznie z wykorzystaniem ogólnego hamiltonianu efektywnego (5.13) (punkty).

czas emisji musi być bowiem inny. Dodanie prawdopodobieństw wystąpienia każdej z tych trajektorii daje w rezultacie prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia teleportacji dla przyjętego stanu początkowego. Procedura ta była powtarzana dla wielu stanów początkowych, a następnie obliczana była wartość średnia przy użyciu całkowania metodą trapezów. Na wykresie 7.4 wyniki numeryczne przedstawione są punktami. Jak widać, wartości średniego prawdopodobieństwa sukcesu policzone numerycznie są aż dwukrotnie mniejsze od wartości otrzymanych analitycznie. A zatem wygląda na to, że w najprostszym modelu został pominięty jakiś istotny czynnik. Są tylko dwie różnice między hamiltonianami efektywnymi (5.13) i (6.1). Pierwsza z nich jest związana z zaniedbaniem współczynnika emisji spontanicznej Einsteina w hamiltonianie (6.1). Druga jest wyeliminowanie w tymże hamiltonianie poziomu wzbudzonego. Żeby ustalić, która jest odpowiedzialna za powstałe rozbieżności w obu modelach, wystarczy powtórzyć obliczenia analityczne dla hamiltonianu efektywnego po eliminacji adiabatycznej, ale uwzględniającego γ . Takie uogólnienie autor tej rozprawy wykonał w artykule [95]. Ponieważ nadal istotną rzeczą jest maksymalne ułatwienie rachunków, dlatego zachowane zostaną wszystkie założenia z poprzedniego, najprostszego modelu z wyjatkiem pominiecia współczynnika emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego. Wówczas ewolucja jest zdeterminowana przez hamiltonian efektywny mający taką samą postać, jak hamiltonian (6.1), lecz z innym

parametrem $\delta = (\Delta + i\gamma)s$. Podstawienie takiej wartości δ do równania (6.3) pozwala na szybkie wyprowadzenie równania na ewolucję stanu $|10\rangle$ przy niezerowym współczynniku γ . Równanie to ma następującą postać

$$e^{-iH_{\text{eff}}t}|10\rangle = \vartheta(t)|10\rangle + \zeta(t)|01\rangle, \qquad (7.27)$$

gdzie

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2} e^{i\Delta st} e^{-(\frac{1}{2}\kappa + \gamma s)t} \left[e^{i\frac{\Omega\gamma t}{2}} + e^{-i\frac{\Omega\gamma t}{2}} - \frac{i\kappa}{\Omega_{\gamma}} (e^{i\frac{\Omega\gamma t}{2}} + e^{-i\frac{\Omega\gamma t}{2}}) \right],$$

$$\zeta(t) = \frac{(\Delta + i\gamma)s}{\Omega_{\gamma}} e^{i\Delta st} e^{-(\frac{1}{2}\kappa + \gamma s)t} (e^{i\frac{\Omega\gamma t}{2}} - e^{-i\frac{\Omega\gamma t}{2}}).$$
(7.28)

Teraz widać, że również częstość Rabiego jest zależna od wartości γ , ponieważ $\Omega_{\gamma} = \sqrt{4(\Delta + i\gamma)^2 s^2 - \kappa^2}$. Niestety widać też, że częstość Rabiego tym razem jest liczbą zespoloną. Oczywiście część urojona częstości Rabiego jest dużo mniejsza od rzeczywistej, gdyż założenie $\Delta \gg \gamma$ pozostaje nadal w mocy. Jednak ze względu na niezerową wartość części urojonej operacje na stanach mogą być przeprowadzane tylko w przybliżeniu. Nie zmienia się natomiast nic w ewolucji stanu $|00\rangle$. Nadal stan ten nie będzie się zmieniać bez względu na to, czy laser jest włączony, czy nie:

$$e^{-iH_{\rm eff}t}|00\rangle = |00\rangle. \tag{7.29}$$

Znając ewolucje tych dwóch stanów, można wyznaczyć stan podukładu nadawcy po etapie przygotowania. Niestety amplituda $\vartheta(t)$ nigdy nie będzie równa dokładnie zeru. Dlatego jedyne, co nadawca może zrobić, to włączyć laser na czas t_A , dla którego wartość bezwzględna tej amplitudy będzie najmniejsza. Po takiej operacji podukład nadawcy przechodzi do następującego stanu

$$\alpha|00\rangle_A + \beta|10\rangle_A \quad \to \quad \alpha|00\rangle_A + \beta\vartheta|10\rangle_A + \beta\zeta|01\rangle_A \,, \tag{7.30}$$

gdzie $\vartheta = \vartheta(t_A)$ a $\zeta = \zeta(t_A)$. Wyznaczenie czasu t_A nie jest trywialne. Należy zacząć od policzenia kwadratu wartości bezwzględnej ϑ . Wielkość ta jest dana wyrażeniem

$$|\vartheta|^{2} = \frac{1}{2(r^{2}+u^{2})}e^{-(\kappa+2\gamma s)t_{A}}[2\kappa r\sin(rt_{A})+2\kappa u\sinh(ut_{A}) + (r^{2}+u^{2}-\kappa^{2})\cos(rt_{A}) + (r^{2}+u^{2}+\kappa^{2})\cosh(ut_{A})], \quad (7.31)$$

gdzie r i u są rzeczywistą i urojoną częścią Ω_{γ} . Z wyrażenia (7.31) widać, że $|\vartheta|^2$ będzie bliskie zeru gdy spełnione będą poniższe warunki

$$rt_A \approx \pi$$
, $ut_A \approx 0$, $\kappa^2 \ll r^2 + u^2$. (7.32)

Te warunki z kolei będą mogły być prawdziwe tylko wtedy, gdy spełnione będzie poniższy warunek

$$\Delta s \gg \gamma s + \kappa \,. \tag{7.33}$$

Wówczas, część rzeczywista i część urojona mogą być dobrze przybliżone rozwinięciem zerowego rzędu względem γ/Δ i $\kappa/(\Delta s)$

$$r = 2\Delta s,$$

$$u = 2\gamma s.$$
(7.34)

Wtedy również, populacja stanu $|01\rangle$ dana wyrażeniem

$$|\zeta|^2 = \frac{2(\Delta^2 + \gamma^2)s^2}{r^2 + u^2} e^{-(\kappa + 2\gamma s)t_A} \Big(\cosh(ut_A) - \cos(rt_A)\Big), \quad (7.35)$$

będzie bliska jedności. Czas t_A odpowiada ekstremum funkcji $|\theta(t)|^2$, dlatego wyznaczenie t_A wymaga policzenia odpowiednich pochodnych

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\vartheta|^2 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} |\vartheta|^2 > 0.$$
(7.36)

Niestety nie można otrzymać dokładnego rozwiązania zagadnienia (7.36), ale wykorzystując warunki (7.32) oraz (7.33), rozwiązanie to daje się dobrze przybliżyć następującym rozwinięciem

$$t_A = \frac{\Delta(8\Delta g^2\kappa + 8g^4\pi + \Delta^2\kappa^2\pi)}{16g^6} + \frac{\gamma^2\kappa(5\Delta\kappa\pi + g^2(\pi^2 - 4))}{8g^6} + \frac{\gamma^3(16\Delta g^2\kappa\pi + 4g^4\pi^2 + \Delta^2\kappa^2(\pi^2 + 16))}{16g^6\Delta^2}.$$
 (7.37)

Teraz można sprawdzić wpływ współczynnika emisji spontanicznej na czas t_A , na jaki nadawca powinien włączyć swój laser w etapie przygotowania. W tym celu warto dla parametrów (7.26) wykreślić zależność czasu t_A od γ dla zakresu, w którym $\Delta \gg \gamma$. Wykres taki jest przedstawiony na rysunku 7.5. Widać, że zmiana t_A jest niewielka, nie przekraczająca dwóch promili, nawet dla $\gamma = \Delta/10$. Operację nadawcy w etapie przygotowania należy podsumować wzorem na prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia tej operacji. Prawdopodobieństwo to jest dane wzorem

$$P_A = |\alpha|^2 + |\beta|^2 (|\vartheta|^2 + |\zeta|^2).$$
(7.38)



Rysunek 7.5: Wykres zależności czasu t_A od wartości współczynnika emisji spontanicznej Einsteina.

W międzyczasie odbiorca musi wytworzyć stan maksymalnie splątany swojego atomu i pola. Również i ta operacja daje się przeprowadzić tylko w przybliżeniu. Odbiorca włącza laser na czas t_B , dla którego splątanie pola z atomem będzie największe. Po tej operacji podukład odbiorcy znajduje się w stanie

$$|10\rangle_B \rightarrow \chi_1|10\rangle_B + i\chi_2|01\rangle_B,$$
 (7.39)

gdzie

$$\chi_1 = \vartheta(t_B), \chi_2 = -i\zeta(t_B).$$
(7.40)

Stan (7.39) będzie najbliższy maksymalnie splątanemu, gdy amplitudy χ_1 i χ_2 będą tak bliskie sobie, jak to jest możliwe. Zatem przy wyznaczaniu czasu t_B można znowu zastosować techniki dobrze znane z analizy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\chi_1 - \chi_2|^2 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} |\chi_1 - \chi_2|^2 > 0.$$
 (7.41)

Prawdopodobieństwo, że podczas tej operacji nie wystąpi żadna emisja fotonu z układu do otoczenia jest równe kwadratowi modułu z wektora (7.39), czyli

$$P_B = |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2. (7.42)$$

Ponownie wyznaczanie czasu operacji należy zacząć od wyznaczenia warunków niezbędnych do zbliżenia wielkości $|\chi_1 - \chi_2|^2$ do zera. Niestety tym razem dokładne wyrażenie jest zbyt długie, by mogło łatwo wskazać te warunki. Dlatego zostanie to wyrażenie uproszczone dzięki wykorzystaniu przybliżonych wartości r i u z równań (7.34). Wynikiem tych uproszczeń jest równanie

$$\begin{aligned} |\chi_1 - \chi_2|^2 &= f^{-1} e^{-(\kappa + 2\gamma s)t_B} [4\gamma s\kappa \sinh(2\gamma st_B) + \kappa(4\Delta s - \kappa)\cos(2\Delta st_B) \\ &+ (f - 4\Delta s\kappa)(\cosh(2\gamma st_B) - \sin(2\Delta st_B)) + \kappa^2\cosh(2\gamma st_B)], \end{aligned}$$

$$(7.43)$$

gdzie $f=8(\Delta^2+\gamma^2)s^2$ W podobny sposób uprościć można wyrażenie na prawdopodobieństwo, że operacja odbiorcy zakończy się powodzeniem, dostając

$$P_B = f^{-1}e^{-(\kappa+2\gamma s)t_B}[(f+\kappa^2)\cosh(2\gamma st_B) - \kappa^2\cos(2\Delta st_B) + 4\Delta\kappa s\sin(2\Delta st_B) + 4\gamma s\sinh(2\gamma st_B)].$$
(7.44)

Wynik operacji odbiorcy będzie zbliżony do pożądanego, jeśli $|\chi_1 - \chi_2|^2 \approx 0$, a także, gdy $P_B \approx 1$. Z równań (7.43) oraz (7.44) widać, że jest to możliwe, gdy spełnione zostaną następujące warunki:

$$2\Delta st_B \approx \frac{\pi}{2}$$
, $2\gamma st_B \approx 0$, $\kappa^2 \ll (\Delta^2 + \gamma^2)s^2$. (7.45)

Okazuje się, że również warunki odbiorcy wymagają nałożenia na parametry ograniczenia (7.33). Przy takim założeniu rozwiązanie zagadnienia (7.41) daje się dobrze przybliżyć następującym równaniem:

$$t_B = \frac{\Delta(8\Delta g^2\kappa + 8g^4\pi + \Delta^2\kappa^2\pi)}{32g^6} + \frac{\gamma^2\kappa(\Delta\kappa(3\pi - 2) + g^2(\pi^2 - 8))}{32g^6} + \frac{\gamma^3(32\Delta g^2\kappa\pi + 8g^4\pi^2 + \Delta^2\kappa^2(5\pi^2 + 32))}{128g^6\Delta^2}.$$
 (7.46)

Po wykreśleniu zależności $t_B(\gamma)$ na rysunku 7.6 dla parametrów (7.26) widać, że również czas pracy lasera odbiorcy nie zmienia się znacząco w przedziale wartości γ spełniających warunek $\Delta \gg \gamma$.

W etapie detekcji odbiorca i nadawca wyłączają swoje lasery, co odpowiada przyjęciu $\Omega=0.$ Wówczas hamiltonian efektywny przyjmuje prostą postać

$$H_{\text{eff}} = -(\Delta + i\gamma)sa^{\dagger}a\sigma_{00} - i\kappa a^{\dagger}a. \qquad (7.47)$$



Rysunek 7.6: Wykres zależności czasu t_B od wartości współczynnika emisji spontanicznej Einsteina.

Ponieważ wszystkie wyrazy hamiltonianu efektywnego (7.47) są elementami diagonalnymi w reprezentacji macierzowej, to wyznaczenie operatora ewolucji ogranicza się do prostego policzenia eksponensu z każdego z tych elementów. Dlatego równania na ewolucję stanów podukładów odbiorcy i nadawcy otrzymuje się niemal natychmiast

$$\begin{split} |\tilde{\psi}(t)\rangle_{A} &= \frac{\alpha|00\rangle_{A} + \beta\vartheta|10\rangle_{A} + \beta\zeta e^{i\Delta st}e^{-(\kappa+\gamma s)t}|01\rangle_{A}}{\sqrt{|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}(|\vartheta|^{2} + |\zeta|^{2})}}, \\ |\tilde{\psi}(t)\rangle_{B} &= \frac{\chi_{1}|10\rangle_{B} + i\chi_{2}e^{i\Delta st}e^{-(\kappa+\gamma s)t}|01\rangle_{B}}{|\chi_{1}|^{2} + |\chi_{2}|^{2}}. \end{split}$$
(7.48)

Po wykryciu przez jeden z detektorów fotonu, stan całego układu opisany jest poniżej przedstawionym wektorem

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}(t)\rangle &= f'(t_j) \Big[(\beta \zeta \chi_1 | 10\rangle_B - \epsilon \alpha \chi_2 | 00\rangle_B) \otimes |00\rangle_A - \epsilon \beta \vartheta \chi_2 | 00\rangle_B | 10\rangle_A \\ &+ i\beta \zeta \chi_2 e^{i\Delta st} e^{-(\kappa + \gamma s)t} (|01\rangle_B | 00\rangle_A + i\epsilon | 00\rangle_B | 01\rangle_A) , \end{aligned}$$
(7.49)

gdzie czynnik normujący ten wektor w czasie t_j został oznaczony symbolem $f'(t_j)$. Czynnik ten zdefiniowany jest następująco

$$f'(t) = \left[|\beta \zeta \chi_1|^2 + |\alpha \chi_2|^2 + |\beta \vartheta \chi_2|^2 + 2|\beta \zeta \chi_2|^2 e^{-2(\kappa + \gamma s)t} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$
 (7.50)

Etap detekcji, kończy się po czasie t_D , a stan całego układu ostatecznie jest opisany wektorem $|\phi(t_D)\rangle$. W etapie odtwarzania odbiorca usuwa czynnik fazowy, tym samym kończąc cały protokół. Teraz można wyznaczyć wierność

teleportowanego stanu oraz prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia teleportacji. W tym celu wyprowadza się macierz gęstości całego układu i za pomocą śladu częściowego usuwa się z rachunków zmienne obu pól, a także zmienne atomu nadawcy. W ten sposób otrzymuje się macierz gęstości, opisującą wyłącznie stan atomu odbiorcy

$$\rho_{\mathrm{at}B} = f'^{2}(t_{D}) \Big[(|\alpha \chi_{2}|^{2} + |\beta \vartheta \chi_{2}|^{2} + 2|\beta \zeta \chi_{2}|^{2} e^{-2(\kappa + \gamma s)t_{D}}) |0\rangle \langle 0| -\beta \zeta \chi_{1} \alpha^{*} \chi_{2}^{*} |1\rangle \langle 0| - \beta^{*} \zeta^{*} \chi_{1}^{*} \alpha \chi_{2} |0\rangle \langle 1| + |\beta \zeta \chi_{1}|^{2} |1\rangle \langle 1| \Big].$$
(7.51)

Wierność teleportowanego stanu w tym ogólniejszym przypadku jest dana następującym wyrażeniem

$$F(t_D) = f'^2(t_D) |\chi_2|^2 \Big[|\alpha|^2 |\beta|^2 \Big(|\vartheta|^2 - 2\operatorname{Re}(\zeta \chi_{12}) + 2|\zeta|^2 e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D} \Big) \\ + |\zeta \chi_{12}|^2 |\beta|^4 + |\alpha|^4 \Big],$$
(7.52)

gdzie wprowadzone zostało oznaczenie $\chi_{12} = \chi_1/\chi_2$. Jak wspomniano w poprzednim podrozdziale, konieczne jest uśrednienie wierności teleportowanego stanu po wszystkich stanach, które mogą być teleportowane. Taka średnia wierność jest w przypadku niezerowego γ równa

$$\overline{F}(t_D) = \frac{1}{C} \left[\frac{A}{3} + B - \frac{A}{C} + \left(C - B + \frac{A}{C} \right) \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arctg}(\sqrt{C}) \right], \quad (7.53)$$

gdzie

$$A = |\zeta \chi_{12}|^2 + 1 + 2 \operatorname{Re}(\zeta \chi_{12}) - 2|\zeta|^2 e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D} - |\vartheta|^2,$$

$$B = 2|\zeta|^2 e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D} - 2 \operatorname{Re}(\zeta \chi_{12}) - 2 + |\vartheta|^2,$$

$$C = |\zeta \chi_{12}|^2 - 1 + 2|\zeta|^2 e^{-2(\kappa + \gamma s)t} + |\vartheta|^2.$$
(7.54)

Prawdopodobieństwo sukcesu w tym ogólniejszym przypadku przyjmuje następującą postać:

$$P(t_D) = \frac{\kappa (1 - e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D})|\chi_2|^2}{\kappa + \gamma s} \times \left(|\beta \zeta|^2 (|\chi_{12}|^2 + 2e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D}) + |\alpha|^2 + |\beta \vartheta|^2 \right).$$
(7.55)

Po uśrednieniu po wszystkich wartościach kubitu, otrzymuje się

$$\overline{P}(t_D) = \frac{\kappa (1 - e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D})|\chi_2|^2}{3(\kappa + \gamma s)} \times \left(|\zeta|^2 |\chi_{12}|^2 + |\vartheta|^2 + 2|\zeta|^2 e^{-2(\kappa + \gamma s)t_D} + 2 \right).$$
(7.56)

Teraz można powtórzyć wykres zależności średniej wierności teleportowanego stanu i średniego prawdopodobieństwa sukcesu od długości czasu etapu detekcji. Tym razem jednak wyniki analityczne dla najprostszego modelu będzie można porównać nie tylko z wynikami numerycznymi, ale także i rezultatami analitycznych obliczeń bez zaniedbywania γ . Takie porównanie średniej



Rysunek 7.7: Zależność średniej wierności teleportowanego stanu od czasu trwania etapu detekcji. Najogólniejsze wyniki numeryczne oznaczone punktami porównane są z wynikami analitycznymi uwzględniającymi współczynnik γ (linia ciągła) i zaniedbującymi ten współczynnik (linia przerywana).

wierności teleportowanego stanu otrzymanej przy użyciu trzech postaci hamiltonianu efektywnego przedstawione jest na rysunku 7.7. We wszystkich przypadkach zostały użyte takie same wartości parametrów, to znaczy wartości (7.26). Punkty odpowiadają numerycznym wynikom, otrzymanym przy wykorzystaniu najogólniejszego z trzech używanych hamiltonianów efektywnych, to znaczy hamiltonianu (5.13). Każdy punkt jest średnią z 10 000 trajektorii. Linia ciągła przestawia wyniki otrzymane analitycznie po adiabatycznej eliminacji poziomu wzbudzonego. Ta linia ciągła jest wykresem równania (7.53). Linia przerywana jest natomiast wykresem równania (7.21), policzonego dla zerowej wartości γ . Jak wyraźnie widać, w przeciwieństwie do analitycznych wyników z poprzedniego rozdziału, analityczne rozwiązania nie zaniedbujące współczynnika emisji spontanicznej ściśle się zgadzają z wynikami numerycznymi dla najogólniejszego modelu. A zatem powstałe rozbieżności są wynikiem zaniedbania współczynnika emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego. Słuszność tego wniosku potwierdza wykres zależności średniego prawdopodobieństwa sukcesu od czasu t_D , przedstawiony na rysunku 7.8. Również i tutaj wzór analityczny (7.56) uwzględniający nie-



Rysunek 7.8: Wykres zależności prawdopodobieństwa sukcesu od czasu t_D . Linia ciągła jest wykresem równania (7.56), linia przerywana jest wykresem równania (7.25). Punkty przedstawiają wyniki otrzymane numerycznie z wykorzystaniem hamiltonianu efektywnego (5.13).

zerową wartość γ daje wyniki (linia ciągła), pozostające w ścisłej zgodności z wynikami numerycznymi (punkty). Tymczasem wykres wzoru (7.25), w którym współczynnik γ został zaniedbany, drastycznie się różni od wyników numerycznych. Najwidoczniej warunek $\Delta \gg \gamma$ nie wystarcza, aby współczynnik emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego mógł być zaniedbany w obliczeniach. Jednak znacznie gorsze jest to, że warunek ten nie wystarcza do wyboru takiej wartości γ , dla której układ teleportacyjny będzie działać właściwie. Konieczne jest zatem znalezienie kolejnego warunku pozwalającego dokonać prawidłowego wyboru tej wartości.

Dla prawidłowo wybranej wartości γ , prawdopodobieństwo sukcesu (7.56), przybliżające realny układ, musi być bliskie prawdopodobieństwu sukcesu (7.25), które jest bliskie idealnemu. Stosunek tych dwóch prawdopodobieństw sukcesu można w granicy $t_D \rightarrow \infty$ przybliżyć następującym wyrażeniem

$$\frac{P(\gamma)}{P(\gamma=0)} \approx \frac{\kappa}{\kappa+\gamma s}.$$
(7.57)

Dla wartości parametrów (7.26) stosunek ten jest równy około 1/2. Tymczasem zbliżenie prawdopodobieństwa sukcesu do idealnego przypadku wymaga, żeby stosunek ten był bliski jedności. Jest to możliwe tylko i wyłącznie wtedy, gdy parametry będą spełniać następujący warunek

$$\kappa \gg \gamma s$$
. (7.58)

W tym miejscu pojawia się pytanie dlaczego warunek $\Delta \gg \gamma$ nie jest wystarczający do zaniedbania współczynnika γ . Otóż głównym powodem jest etap detekcji. Czas trwania etapu detekcji jest specjalnie na tyle duży, aby czynnik tłumiący κ w hamiltonianie efektywnym (7.47) silnie wpłynął na stan układu. Jednak dla parametrów (7.26), γs jest niemal dokładnie równe wartości κ i w związku z tym emisja spontaniczna z poziomu wzbudzonego będzie mieć równie silny wpływ na stan całego układu. Tak więc bezkrytyczne zaniedbanie czynnika γ w etapie detekcji jest poważnym błędem.

Uzupełniony zestaw warunków ma następującą postać: ($\Delta = \Delta', \Omega = g$, $\Delta s \gg \gamma s + \kappa, \Delta \gg \Omega, \delta \gg \kappa \gg \gamma s$). Warto na koniec tego podrozdziału przetestować ten zestaw, wybierając wartości parametrów zgodne ze wszystkimi warunkami z tego zestawu i wykreślając dla tych nowych wartości zależności średniej wierności i średniego prawdopodobieństwa sukcesu od czasu t_D . W tym celu wybrano następujące parametry:

$$(\Delta; \Omega; g; \gamma; \kappa) / 2\pi = (100; 10; 10; 0, 05; 0, 01) \text{MHz}.$$
 (7.59)

Łatwo daje się sprawdzić, że wartości (7.59) są zgodne ze wszystkimi założeniami. Można zatem oczekiwać, że teraz teleportacja będzie przebiegać niemalże tak, jak w przypadku idealnym z $\gamma = 0$. Na rysunku 7.9 wykreślona jest średnia wierność teleportowanego stanu, otrzymana numerycznie (punkty), policzona ze wzoru (7.53) (linia ciągła) oraz ze wzoru (7.21) (linia przerywana). Jak widać, ciężko jest odróżnić wyniki numeryczne, najbardziej ogólne, od wyników analitycznych i to nawet tych zaniedbujących współczynnik γ . Ostatecznym dowodem, na to, że dzięki nowemu założeniu wartości parametrów zostały wybrane właściwie, jest wykres zależności średniego prawdopodobieństwa sukcesu od czasu t_D . Z rysunku 7.10 widać, że prawdopodobieństwo sukcesu policzone numerycznie i analityczne z zachowaniem niezerowej wartości γ jest już bardzo zbliżone do wartości 0, 5. Nie jest ono tak bliskie, jak w przypadku modelu przyjmującego zerową wartość $\gamma,$ ale różnice są już stosunkowo niewielkie. Należy też wspomnieć o tym, że niepożądane efekty związane z emisją spontaniczną z poziomu wzbudzonego moga być dowolnie zmniejszane (przynajmniej w teorii) przez zmniejszanie γs w stosunku do κ .



Rysunek 7.9: Porównanie średnich wierności otrzymanych analitycznie przy uwzględnieniu γ (linia ciągła) i przy zaniedbaniu γ (linia przerywana) dla wartości parametrów (7.59). Punkty przedstawiają wyniki otrzymane numerycznie.



Rysunek 7.10: Średnie prawdopodobieństwo sukcesu dane wzorem (7.56) (linia ciągła), wzorem (7.25) (linia przerywana) oraz policzone numerycznie (punkty) dla parametrów (7.59).

7.3 Nadmiarowe kodowanie w teleportacji

Teleportacja stanów atomowych układem zaproponowanym przez Bosego i innych udaje się co najwyżej w 50 procentach przypadków. Przyczyną tego ograniczenia prawdopodobieństwa pomyślnego zakończenia teleportacji jest możliwość wykrycia tylko dwóch stanów Bella. Pozostałe dwa wyniki połaczonego pomiaru, odpowiadające wykryciu emisji dwóch fotonów bądź nie wykryciu żadnej emisji kończą teleportację niepowodzeniem. W takich przypadkach nie tylko informacja kwantowa nie zostanie przesłana do odbiorcy, ale zostanie nieodwracalnie zniszczona. Jeśli informacja kwantowa jest znana nadawcy, to zniszczenie jej nie jest problemem. Po prostu nadawca jeszcze raz przygotuje stan początkowy atomu i ponowi próbę teleportacji. Inaczej sprawa wygląda, jeśli przesyłana wartość kubitu nie jest znana nadawcy, a w dodatku jest cenna. Może być na przykład wynikiem długich obliczeń. W takim przypadku bezpowrotna strata tej kwantowej informacji może być nie do przyjęcia. W swoim artykule Bose i inni [19] twierdzą, że problem ten można obejść, używając nadmiarowego kodowania. Bardziej konkretnie zaproponowali oni zastosowanie pomysłu van Enka i innych [97], polegającego na zakodowaniu wartości kubitu w stanie splątanym dwóch kubitów. Drugi kubit pełni rolę kubitu bezpieczeństwa i to w nim znajdzie się informacja kwantowa w przypadkach wystąpienia niekorzystnych wyników pomiaru. Dzięki takiej asekuracji protokół teleportacyjny może być powtarzany tak długo, aż zakończy się pomyślnie.

W tym podrozdziale zostanie przedstawiony protokół teleportacji stanu atomu z asekuracją, zaprezentowany przez autora tej rozprawy w artykule [86]. Zostanie także pokazane, że takie kodowanie nie ratuje informacji kwantowej w obu niekorzystnych wynikach pomiaru.

W swojej propozycji van Enk i inni użyli atomu jako kubitu zapasowego. Rachunki można jednak uprościć, jeśli kubitem zapasowym będzie stan pola. Wprowadzenie drugiego atomu powoduje, że układ potrzebować będzie wektora z większej przestrzeni Hilberta. Niech wartość kubitu będzie na początku zakodowana w następującym stanie atomu nadawcy: $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Wówczas stanem splątanym atomu i pola, zapewniającym nadmiarowym kodowaniem asekurację, jest stan

$$\alpha(|00\rangle_A + |11\rangle_A) + \beta(|01\rangle_A + |10\rangle_A).$$
(7.60)

Niestety van Enk i inni nie podali sposobu na zakodowanie stanu atomu do takiego stanu splątanego, a jedynie pokazali jego użyteczność w komunikacji pomiędzy układami typu atomy-wnęka. Odkrywanie algorytmu realizującego takie kodowanie warto zacząć od założenia, że mod pola wnęki nadawcy na początku znajduje się w superpozycji stanu próżni i stanu jednofotonowego $(|1\rangle + |0\rangle)$. Taki stan pola można z łatwością wygenerować, wykorzystując drugi atom umieszczony wewnątrz wnęki. Po takim przygotowaniu początkowego stanu pola drugi atom znajdzie się w stanie $|0\rangle$ i nie musi być brany pod uwagę w rachunkach. Warto rozważania zacząć od takiego stanu początkowego pola, ponieważ wówczas stan początkowy całego układu jest superpozycją czterech stanów, co czyni go nieco podobnym do pożądanego stanu (7.60), jak widać poniżej

$$\alpha(|00\rangle_A + |01\rangle_A) + \beta(|11\rangle_A + |10\rangle_A).$$
(7.61)

Teraz widać, że algorytm, wprowadzający nadmiarowość musi wymienić jedną parę amplitud, nie ruszając drugiej pary. Zatem cały algorytm przeprowadzenia poczatkowego stanu (7.61) do zabezpieczonego stanu (7.60) sprowadza się do zastosowania bramki CNOT. Niestety zrealizowanie bramki CNOT nie jest zadaniem prostym w modelu zakładającym $\Omega \gg q$ czy nawet $\Omega = q$. Większość propozycji realizacji bramki CNOT na atomach we wnęce rezonansowej narzuca na parametry warunek $\Omega \ll q$ [98–102]. W modelach prezentowanych w rozdziale 6 nie ma takiej operacji, która warunkowo zmieniałaby liczbę jedynek w stanie $|xn\rangle$. Operacje oświetlania atomu jednym laserem L mogą działać "warunkowo", ponieważ faza zależy w nich od stanu pola i wszystkich atomów, ale nie zmieniają liczby jedynek. Z kolei operacje oświetlania atomu dwoma laserami L i L' zmieniaja liczbe jedvnek, ale stan nie zmienia się zależnie od stanu pola we wnęce, czy stanów innych atomów. Można jednak połączyć oba rodzaje tych operacji, by zmieniać liczbę jedynek warunkowo. W informatyce kwantowej znana jest możliwość złożenia bramki CNOT z dwóch bramek Hadamarda i jednej dwukubitowej sterowanej bramki Z [42]. Wystarczy zadziałać na kubit sterowany bramką Hadamarda, następnie użyć dwukubitowej sterowanej bramki Z i ponownie zadziałać na kubit sterowany bramką Hadamarda. Działanie warunkowej bramki Z polega na wprowadzeniu czynnika fazowego -1 tylko i wyłacznie wtedy, gdy oba kubity są w stanie $|1\rangle$, jak to jest przedstawione poniżej

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow |10\rangle, \quad |11\rangle \rightarrow -|11\rangle.$$
 (7.62)

Schematycznie taką realizację bramki CNOT przedstawiono na rysunku 7.11. Operacje oświetlania atomu jednym laserem umożliwiają dodanie czynnika fazowego -1 wyłącznie przy stanie $|11\rangle$, jednak oprócz tego czynnika fazowego pojawiają się też inne. Operacje oświetlania dwoma laserami atomu też nie realizują dokładnie bramki H, bo wprowadzają czynnik fazowy i. Pomimo tego, jak przedstawione to zostanie poniżej, operacje z podrozdziału 6.2 pozwalają na zabezpieczenie wartości kubitu. Dla uproszczenia poniższych



Rysunek 7.11: Schemat budowy bramki CNOT z bramki sterowanej Zi dwóch bramek Hadamarda.

rachunków założone zostanie, że δ_5 jest na tyle większe od κ , że w operacjach oświetlania atomu laserem przyjąć można $\kappa = 0$. Ponadto należy tu również wspomnieć o tym, że chociaż operacje z podrozdziału 6.2 pozwalają wyznaczać ewolucje wielu atomów uwięzionych we wnęce rezonansowej, to są również prawidłowe w przypadku tylko jednego atomu we wnęce i mogą być wykorzystane do opisu urządzenia z rysunku 7.12.

Cały protokół teleportacji z asekuracją składa się z czterech etapów: (i) etapu kodowania, (ii) etapu detekcji I, (iii) etapu detekcji II i (iv) etapu odtwarzania.

(i) etap kodowania

Pierwszy etap protokołu wymaga od nadawcy wykonania aż czterech operacji. Dlatego dla nadawcy etap kodowania złożony jest z czterech kroków.

(a) Na początku nadawca włącza oba swoje lasery L_A i L'_A na czas $t_1 = \pi/(4\delta_4)$. W ten sposób wykonywane są operacje (6.52) i (6.53), które mają zastąpić pierwszą bramkę Hadamarda. Po tym pierwszym kroku podukład przechodzi do stanu

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_A &= \alpha(|01\rangle_A + i|11\rangle_A + |00\rangle_A + i|10\rangle_A) \\ &+ \beta(|11\rangle_A + i|01\rangle_A + |10\rangle_A + i|00\rangle_A) \,. \end{aligned} \tag{7.63}$$

(b) Następnie nadawca wyłącza laser L'_A , ale laser L_A nadal pozostaje włączony. Nadawca musi wykonać jednocześnie operacje (6.37) i (6.45), żeby wprowadzić czynnik fazowy -1 tylko do amplitudy stanu $|11\rangle$. Niestety te operacje wprowadzają także inne czynniki fazowe i w związku z tym niedokładnie realizują sterowaną bramkę Z. Nadawca wyłącza również i laser L_A po czasie t_2 , który musi spełnić jednocześnie dwa warunki $t_2\delta_5 = 2m_1\pi$ i



Rysunek 7.12: Schemat urządzenia do teleportowania stanów jednego atomu z asekuracją.

 $t_2\sqrt{2}\delta_5 = (2m_2 + 1)\pi$. Niestety jest to możliwe tylko w przybliżeniu. Przybliżenie to jest jednak bardzo dobre dla $m_1 = 6$ i $m_2 = 8$. Po tej operacji stan podukładu nadawcy jest dobrze przybliżony wektorem

$$\begin{split} |\tilde{\Psi}\rangle_{A} &= \alpha (e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}|01\rangle_{A} - ie^{i\delta_{3}t_{2}}|11\rangle_{A} + |00\rangle_{A} + ie^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}|10\rangle_{A}) \\ &+ \beta (-e^{i\delta_{3}t_{2}}|11\rangle_{A} + ie^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}|01\rangle_{A} + e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}|10\rangle_{A} + i|00\rangle_{A}) \,. (7.64) \end{split}$$

(c) Wprowadzone w poprzednim kroku czynniki fazowe są poważną przeszkodą. Nie można ich usunąć, ale można sprawić, aby nie uniemożliwiły wykonania nadmiarowego kodowania. W tym celu nadawca czeka przez czas t_3 z wyłączonymi laserami. Ewolucja stanu podukładu jest dana przez (6.28). Czas tego kroku jest tak dobrany, aby został spełniony warunek $\varphi(t_3) = -e^{i\delta_3(t_2/2)}$. Wówczas podukład przechodzi do stanu

$$\begin{split} |\tilde{\Psi}\rangle_A &= \alpha (e^{i\delta_3 \frac{i_2}{2}} (|01\rangle_A + i|11\rangle_A) + |00\rangle_A - i|10\rangle_A) \\ &+ \beta (e^{i\delta_3 \frac{i_2}{2}} (|11\rangle_A + i|01\rangle_A) - |10\rangle_A + i|00\rangle_A) \,. \end{split}$$
(7.65)

(d) W czwartym kroku etapu kodowania nadawca ponownie włącza oba swoje lasery L_A i L'_A na czas t_1 . Znowu operacje (6.52) i (6.53) zastępują bramkę Hadamarda, tym razem drugą. Po tym kroku oba lasery zostają wyłączone, a stan podukładu jest dany wektorem

$$|\tilde{\Psi}\rangle_A = e^{i\delta_3 \frac{t_2}{2}} i(\beta|01\rangle_A + \alpha|11\rangle_A) + \alpha|00\rangle_A - \beta|10\rangle_A.$$
(7.66)

Wraz z końcem czwartego kroku kończy się dla nadawcy etap kodowania. Chociaż stan systemu nadawcy (7.66) po kodowaniu różni się od pożądanego stanu splątanego (7.60) dodatkowymi czynnikami fazowymi, to początkowy stan atomu jest zabezpieczony i nie zostanie zniszczony żadnym pomiarem wykonanym na polu wnęki nadawcy. Jeśli nadawca wykryje ucieczkę jednego fotonu ze swojej wnęki, to jego system przejdzie do stanu $\beta|00\rangle_A + \alpha|10\rangle_A$. W przeciwnym wypadku, gdy detektor nie zarejestruje żadnego fotonu, nadawca pozostaje ze stanem $\alpha|00\rangle_A - \beta|10\rangle_A$. Jak widać wystarczy tylko zadziałać na atom kwantową bramką NOT albo kwantową bramką Z, żeby odtworzyć oryginalny stan nadawcy.

Etap kodowania nie różni się niczym dla odbiorcy od etapu przygotowania w najprostszym protokole teleportacyjnym. Początkowo atom odbiorcy znajduje się w stanie $|1\rangle$, a jego pole w stanie próżni. Odbiorca musi jedynie wykonać operację (6.35) w celu wytworzenia maksymalnie splątanego stanu atomu i pola. Zatem włącza laser L_B na czas $t_4 = \pi/(4\delta_5)$, otrzymując

$$|\Psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_B + i|01\rangle_B).$$
 (7.67)

Ponownie zakłada się dla prostoty, że nadawca i odbiorca koordynują tak swoje działania, że kończą wszystkie swoje działania dokładnie w tym samym momencie. Wówczas stan całego układu jest opisany następującym wektorem

$$\begin{split} |\widetilde{\Psi}\rangle &= \left[e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}i(\beta|01\rangle_{A} + \alpha|11\rangle_{A}) + \alpha|00\rangle_{A} - \beta|10\rangle_{A}\right] \\ &\otimes (|10\rangle_{B} + i|01\rangle_{B}). \end{split}$$
(7.68)

(ii) etap detekcji I

W drugim etapie protokołu nadawca wykonuje połączony pomiar stanu pól obu wnęk rezonansowych. Podobnie do teleportacji bez asekuracji pomiar ten polega na czekaniu z wyłączonymi laserami przez czas t_D i rejestrowaniu wskazań obu detektorów. Jednak w przeciwieństwie do poprzedniego protokołu tym razem rozważone zostaną przypadki wszystkich wyników połączonego pomiaru. Dla uproszczenia wzorów dalej założone zostanie, że $t_D \gg \kappa^{-1}$ i w związku z tym wyrazy zawierające czynnik $\exp(-\kappa t_D)$ będzie można zaniedbać. Etap detekcji zakończy się powodzeniem tylko wtedy, gdy nastąpi pojedyncza emisja fotonu. Pomimo tego można oczekiwać, że w przypadku zarejestrowania dwóch fotonów lub nie zarejestrowania żadnego, informacja kwantowa zostanie zachowana dzięki użyciu nadmiarowego kodowania. Ponieważ wszystkie lasery są wyłączone, ewolucja stanu systemów nadawcy i odbiorcy jest dana wektorem

$$\begin{split} |\widetilde{\Psi}\rangle &= \left[e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}ie^{-\kappa t}(\beta e^{i\Delta_{r}t}e^{i\delta_{3}t}|01\rangle_{A} + \alpha|11\rangle_{A}) + \alpha e^{i\Delta_{r}t}|00\rangle_{A} - \beta|10\rangle_{A}\right] \\ &\otimes (|10\rangle_{B} + ie^{i\Delta_{r}t}e^{i\delta_{3}t}e^{-\kappa t}|01\rangle_{B}) \,. \end{split}$$
(7.69)

Jeśli żaden z detektorów nie zarejestruje emisji żadnego fotonu do końca tego etapu, to wtedy $\exp(-\kappa t_D) \approx 0$ i dlatego układ przechodzi do stanu

$$|\tilde{\Psi}\rangle = (\beta|10\rangle_A - \alpha e^{i\Delta_r t_D}|00\rangle_A) \otimes |10\rangle_B.$$
 (7.70)

Czas etapu pierwszej detekcji nie jest ściśle sprecyzowany, więc bez problemu można dobrać ten czas tak, żeby spełniał warunek $\exp(i\Delta_r t_D) = -1$. Wtedy stan podukładu nadawcy jest dany wektorem $\alpha|00\rangle_A + \beta|10\rangle_A$. Nie zaobserwowanie żadnej emisji jest pierwszym z dwóch niekorzystnych wyników połączonego pomiaru i, jak widać, stan początkowy atomu nadawcy nie został zniszczony.

Jeśli ewolucja zostanie przerwana w czasie t_j przez zasygnalizowanie emisji przez jeden z detektorów, to zdarzeniu takiemu odpowiada zadziałanie operatora emisji (7.11) na stan (7.69). Później ewolucja dana równaniem (6.27) jest kontynuowana

$$\begin{split} |\tilde{\Psi}\rangle &= e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}} (\beta e^{i\Delta_{r}t} e^{i\delta_{3}t_{j}} |00\rangle_{A} |10\rangle_{B} + \alpha |10\rangle_{A} |10\rangle_{B}) \\ &+ \epsilon e^{i\Delta_{r}t} e^{i\delta_{3}t_{j}} (\alpha e^{i\Delta_{r}t} |00\rangle_{A} |00\rangle_{B} - \beta |10\rangle_{A} |00\rangle_{B}) \\ &+ i e^{-\kappa t} e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}} e^{i\Delta_{r}t} e^{i\delta_{3}t_{j}} [e^{i\Delta_{r}t} e^{i\delta_{3}t_{j}} \\ &\times e^{i\delta_{3}(t-t_{j})} \beta (\epsilon |01\rangle_{A} |00\rangle_{B} + |00\rangle_{A} |01\rangle_{B}) \\ &+ \alpha (\epsilon |11\rangle_{A} |00\rangle_{B} + e^{i\delta_{3}(t-t_{j})} |10\rangle_{A} |01\rangle_{B})]. \end{split}$$
(7.71)

Jeśli jeden z detektorów zarejestruje wykrycie drugiego fotonu w czasie t_c , wtedy układ przechodzi do stanu

$$\widetilde{\Psi}\rangle = \beta e^{i\Delta_r t_c} e^{i\delta_3 t_c} (\epsilon + \epsilon_1) |00\rangle_A |00\rangle_B
+ \alpha (\epsilon + \epsilon_1 e^{i\delta_3 (t_c - t_j)}) |10\rangle_A |00\rangle_B.$$
(7.72)

Niestety chociaż nadawca wykonał nadmiarowe kodowanie, to stan początkowy jego atomu został zniszczony w tym przypadku. Jest to wynikiem obecności czynników ($\epsilon + \epsilon_1$) i ($\epsilon + \epsilon_1 e^{i\delta_3(t_c-t_j)}$), zmieniających w losowy sposób wartość bezwzględną amplitud obu stanów w superpozycji (7.72). Gdyby oba te czynniki były identyczne, to zostałyby wyeliminowane w wyniku unormowania stanu. Niestety kiedy mod pola wnęki nie znajduje się w stanie próżni, to drugi wyraz w hamiltonianie efektywnym (6.26) wprowadza do takiego stanu czynniki fazowe, które zależą od N_0 , czyli od liczby atomów znajdujących się w stanie $|0\rangle$. Dlatego tylko stany $|01\rangle_A$ i $|01\rangle_B$ mają w amplitudzie czynnik fazowy $\exp[i\delta_3(t-t_j)]$ w superpozycji (7.71), a stan $|11\rangle_A$ nie ma. Niestety nie można osłabić wpływu drugiego wyrazu w hamiltonianie efektywnym (6.26) na stan układu, ponieważ można to tylko zrobić, osłabiając oddziaływanie atomu z modem pola we wnęce. Tymczasem oddziaływanie to jest niezbędne przy wykonywaniu wielu ważnych operacji, takich jak na przykład przenoszenie stanu atomu na stan pola. Możliwe jest natomiast sprawienie, by wszystkie stany w superpozycji miały taką samą liczbę atomów w stanie $|0\rangle$ czyli N_0 . Wówczas czynniki, które zmieniają moduł amplitud są wspólne dla całego stanu. Dlatego splątany stan dwóch atomów po zastosowaniu nadmiarowego kodowania można odzyskać po obu niepomyślnych wynikach połączonego pomiaru.

Jeśli wynik pomiaru jest pomyślny, to znaczy w ciągu czasu t_D nadawca zarejestruje tylko jedną emisję to stan całego układu przy wcześniej przyjętym założeniu: $\exp(i\Delta_r t_D) = -1$ jest dany wektorem

$$\begin{split} |\widetilde{\Psi}\rangle &= e^{i\delta_3 \frac{t_2}{2}} (\alpha |10\rangle_A |10\rangle_B - \beta e^{i\delta_3 t_j} |00\rangle_A |10\rangle_B) \\ &+ \epsilon e^{i\delta_3 t_j} (\alpha |00\rangle_A |00\rangle_B + \beta |10\rangle_A |00\rangle_B) \,. \end{split}$$
(7.73)

Widać, że systemy nadawcy i odbiorcy po pierwszym etapie detekcji znajdują się nadal w stanie splątanym. Co ciekawe, w stanie (7.73) kwantowa informacja, początkowo należąca tylko do nadawcy, jest teraz współdzielona przez obie strony. W celu ostatecznego przesłania tej informacji nadawca musi usunąć to splątanie przez wykonanie pomiaru stanu swojego atomu. Możliwe jest też odesłanie informacji z powrotem do nadawcy. Może to jednak zrobić wyłącznie odbiorca, mierząc stan swojego atomu. Jednakże przypadek odsyłania informacji nie będzie dalej rozważany.

(iii) etap detekcji II

W trzecim etapie protokołu nadawca wykonuje pomiar stanu swojego atomu, podczas gdy odbiorca czeka z wyłączonymi laserami. Pomiar odbywa się w dwóch krokach.

(a) Najpierw nadawca odwzorowuje stan swojego atomu na stan modu pola swojej wnęki. Włącza laser L_A na czas $t_4 = \pi/(2\delta_5)$, wykonując w ten sposób operacje (6.31) i (6.46).

(b) Następnie czeka przez czas t_D z wyłączonymi laserami, rejestrując wskazania detektorów. Ponownie czas pomiaru wybrany jest tak, żeby warunek $\exp(i\Delta_r t_D) = -1$ był spełniony. Ewolucja stanu całego układu w tym

7.4. NIEEFEKTYWNY POMIAR W TELEPORTACJI

kroku jest następująca

$$\begin{split} |\widetilde{\Psi}\rangle &= ie^{-\kappa t}e^{i\delta_{3}t}e^{i\delta_{3}\frac{t_{4}}{2}}|01\rangle_{A}\otimes(\alpha e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}|10\rangle_{B} + \beta\epsilon e^{i\delta_{3}t_{j}}e^{i\Delta_{r}t_{4}}e^{i\Delta_{r}t}|00\rangle_{B}) \\ &- e^{i\delta_{3}t_{j}}|00\rangle_{A}\otimes(\beta e^{i\delta_{3}\frac{t_{2}}{2}}|10\rangle_{B} - \alpha\epsilon e^{i\Delta_{r}t_{4}}e^{i\Delta_{r}t}|00\rangle_{B}). \end{split}$$
(7.74)

Jeśli któryś detektor zasygnalizuje wykrycie emisji w czasie t_D , to wtedy po tym kroku podukład odbiorcy przechodzi do stanu

$$|\Psi\rangle = \alpha |10\rangle_B + \beta \theta |00\rangle_B , \qquad (7.75)$$

gdzie $\theta = -\epsilon \exp(i\Delta_r t_4) \exp(i\delta_3(t_j - t_2/2))$. W przeciwnym przypadku, gdy nie zostanie wykryta emisja żadnego fotonu, to podukład odbiorcy po tym kroku znajdzie się w stanie

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \beta |10\rangle_B + \alpha \phi |00\rangle_B, \qquad (7.76)$$

gdzie $\phi = \epsilon \exp(i\Delta_r t_4) \exp(-i\delta_3 t_2/2)$. Po tym etapie podukład nadawcy pozostanie w stanie $|00\rangle_A$.

(iv) etap odtwarzania

Po drugim etapie detekcji nadawca przesyła odbiorcy klasycznym kanałem informacyjnym wyniki pomiarów. Teraz odbiorca musi wykonać niezbędne lokalne operacje, żeby odzyskać początkowy stan atomu nadawcy. Jego działania zależą od wyników pomiarów.

Jeśli w trzecim etapie nastąpiła emisja, to odbiorca potrzebować będzie dwóch kroków. Najpierw czeka z wyłączonymi laserami przez taki czas t_{θ} , że $\theta e^{i\Delta_r t_{\theta}} = 1$. Następnie włącza oba swoje lasery na czas $t_5 = \pi/(2\delta_4)$, wykonując operacje (6.50) i (6.51), które odpowiadają zadziałaniu kwantową bramką NOT.

Jeżeli podczas trzeciego etapu nie nastąpiła żadna emisja, wówczas odbiorca po prostu czeka z wyłączonymi laserami przez taki czas t_{ϕ} , żeby spełniony był warunek $\phi e^{i\Delta_r t_{\phi}} = 1$.

Ostatecznie, po zakończonym pomyślnie protokole, atom odbiorcy będzie się znajdował w stanie $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$.

7.4 Nieefektywny pomiar w teleportacji

W analizach wcześniej opisywanych protokołów założono, że detektory są doskonałe. Również nie wzięto pod uwagę możliwości absorpcji fotonu przez lustra albo płytkę światłodzielącą. Tymczasem w rzeczywistych eksperymentach nieefektywność detektorów, jak i pochłanianie w elementach optycznych

137

są poważnymi problemami. Pomyślne zakończenie teleportacji w przedstawionych protokołach zależy od otrzymania prawidłowych wyników pomiaru. Jeśli na przykład w etapie detekcji z układu uciekną dwa fotony, lecz wskutek absorpcji bądź nieefektywnej detekcji zostanie wykryty tylko jeden z nich, to obie komunikujące się strony bedą przekonane o udanym przesłaniu kubitu, podczas gdy w rzeczywistości cały układ znajdować się będzie w stanie iloczynowym. Jeszcze gorzej wygląda sprawa w przypadku teleportacji z asekuracja, ponieważ tam dalsze działania obu stron zależa od niepewnego wyniku. Nadmiarowe kodowanie protokołu teleportacji z asekuracją w tym rodzaju zakłóceń nie jest w niczym pomocne. Żeby móc wykorzystać opisane w podrozdziale 2.8 "głosowanie większością" konieczne jest zakodowanie chronionego stanu w stanie splatanym przynajmniej trzech kubitów. Dlatego zjawiska absorpcji muszą być tak stłumione, żeby ich wpływ na wynik działania protokołów był zaniedbywalnie mały. Na przykład wprowadzenie absorpcji w lustrach wnęki rezonansowej już na poziomie równania "master" skutkuje pojawieniem się w hamiltonianie efektywnym (5.13) dodatkowego wyrazu $-i\kappa' a^{\dagger}a$ oraz dodatkowego operatora emisji $C = \sqrt{2\kappa' a}$, gdzie κ' jest współczynnikiem opisującym tłumienie spowodowane ta absorpcją. Aby wpływ pochłaniania w lustrach mógł być pomijalny należy do budowy wneki rezonansowej wybrać lustro częściowo przepuszczalne, dla którego spełniony będzie warunek $\kappa \gg \kappa'$. Niestety spełnienie tego warunku w obecnie dostępnych optycznych wnękach rezonansowych wymaga przyjęcia wartości κ ponad stukrotnie większej niż wartość wymagana w przedstawionym modelu teleportacji [73, 76].

Znacznie bliżej obecna technika jest osiągnięcia efektywności detektorów wymaganych przez model Bosego i innych. Najbliższe ideału są detektory VLPC (visible-light photon counters) oparte na efekcie lawinowego wzmocnienia sygnału wewnątrz półprzewodnika. W tych detektorach zbudowanych z kawałka krzemu, znajdującego się w polu elektrostatycznym, w wyniku zjawiska fotoelektrycznego wewnetrznego powstaje pojedyncza para elektrondziura. Pod wpływem działania pola elektrycznego elektron przyśpiesza i rozpoczyna lawinę, zwiększającą liczbę nośników ładunku. Testy wykonywane na tych detektorach wskazuja, że efektywność tych urządzeń może przekroczyć 90% [79,103]. Shigeki Takeuchi i inni przedstawili w artykule [79] wyniki doświadczenia, w którym zmierzona została efektywność wykrycia pojedynczego fotonu w detektorze VLCP równa 88%. Detektory tego typu mają ponadto możliwość rozróżnienia jednego fotonu od dwóch fotonów, co pozwala odróżnić przypadki trafienia dwóch fotonów do jednego detektora od pomyślnych realizacji protokołu. Zarówno wysoka efektywność jak i zdolność rozróżniania liczby fotonów sprawiają, że obecnie dostępne detektory wydają się być wystarczająco bliskie idealnym, by móc posłużyć w urządze-

7.4. NIEEFEKTYWNY POMIAR W TELEPORTACJI

niu teleportacyjnym zaproponowanym przez Bosego i innych. Przypuszczenia te łatwo można sprawdzić poprzez zastąpienie w rachunkach operatorów emisji (4.13) i (4.14) operatorami emisji (4.20) i (4.21). Prawdopodobieństwo sukcesu zmniejsza się wówczas do wartości danej następującym wzorem: $\overline{P}_{suk}(\eta) = \eta \overline{P}_{suk}$. Wzór ten jest zgodny z intuicją, ponieważ tylko część pomyślnych przypadków emisji jednego fotonu zostanie przez niedoskonałe detektory zarejestrowana. Dla wartości parametrów (7.59) efektywność 88% zmniejsza prawdopodobieństwo sukcesu z 49% do 43%. Redukcja prawdopodobieństwa pomyślnego zakończenia protokołu nie jest więc zaniedbywalnie mała, ale nie jest też duża. Znacznie gorszy wpływ na teleportację mają przypadki niewykrycia jednej z dwóch emisji. Dwukrotne zadziałanie operatorem emisji na połaczony stan nadawcy i odbiorcy w etapie detekcji powoduje, że etap ten kończy się stanem $|\Phi(t_D)\rangle = |00\rangle_A \otimes |00\rangle_B$. Tymczasem z powodu niezarejestrowania jednej z tych emisji przypadek taki zostanie przez nadawcę uznany błędnie za pomyślny. Niestety konsekwencją takich błędów będzie zmniejszenie się średniej wierności teleportowanego stanu. Takie same skutki powoduje niewykrycie emisji podczas etapu przygotowania, jednak prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest bardzo małe i dla otrzymania prostych wzorów zdarzenie takie zostanie zaniedbane. Prawdopodobieństwo mylnego uznania przypadku teleportacji z dwoma emisjami w etapie detekcji za udany jest dane następującym wzorem: $P_{myl}(\eta) = 2\eta(1-\eta)P_1P_{2E}$, gdzie prawdopodobieństwo wystąpienia dwóch emisji w etapie detekcji $P_{2\rm E}$ najłatwiej można obliczyć, odejmując od jedności prawdopodobieństwo wystąpienia tylko jednej emisji i prawdopodobieństwo braku jakiejkolwiek emisji. Prawdopodobieństwo nie wystąpienia żadnej emisji ani w etapie przygotowania, ani w etapie detekcji jest równe $P_1P_2(t_D)$, a po uśrednieniu po wszystkich stanach poczatkowych przyjmuje następująca postać

$$\overline{P}_{0\text{emi}} = \frac{1}{6} P_B (1 + e^{-2\kappa t_D}) (e^{-\kappa t_1} e^{-2\kappa t_D} + 2).$$
 (7.77)

Więc ostatecznie dostaje się następujący wzór na średnie prawdopodobieństwo mylnego potraktowania porażki jako sukcesu:

$$\overline{P}_{\rm myl}(\eta) = 2\eta (1-\eta) (\overline{P}_1 - \overline{P}_{\rm suk}(t_D) - \overline{P}_{\rm 0emi}), \qquad (7.78)$$

gdzie

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{3} P_B (2 + e^{-\kappa t_1}) \,. \tag{7.79}$$

Atom odbiorcy po protokole uznanym za pomyślny znajdować się będzie w stanie mieszanym opisanym następującą macierzą gęstości

$$\rho_{\eta} = \frac{\overline{P}_{\text{suk}}(t_D)\rho_{\text{at}B} + \overline{P}_{\text{myl}}(\eta)|0\rangle\langle 0|}{\overline{P}_{\text{suk}}(t_D) + \overline{P}_{\text{myl}}(\eta)}.$$
(7.80)

A zatem wierność w przypadku użycia niedoskonałych detektorów o efektywności η jest dana wzorem

$$\overline{F}(\eta) = \frac{\overline{P}_{\text{suk}}(t_D)\overline{F}(t_D) + \overline{P}_{\text{myl}}(\eta)2/3}{\overline{P}_{\text{suk}}(t_D) + \overline{P}_{\text{myl}}(\eta)}.$$
(7.81)

Dla parametrów (7.59) detektor o efektywności $\eta = 88\%$ powoduje możliwość popełnienia pomyłki w około 3% przypadków i w konsekwencji redukcję średniej wierności z 99,9% do 97,8%. Jak widać, na szczęście, wpływ nieefektywności detektorów na średnią wierność teleportowanego stanu nie jest na tyle duży, by mógł być przyczyną zrezygnowania z prób eksperymentalnej realizacji opisywanego modelu. W przypadku uśredniania przy przyjęciu najbardziej naturalnego rozkładu prawdopodobieństwa występowania wartości kubitów, redukcja średniej wierności jest tylko nieznacznie większa i nadal nie stanowi poważnego problemu.

Ostatnią przeszkodą w teleportacji stanów atomowych są ciemne zliczenia w niedoskonałych detektorach. Ta wada detektorów polega na wskazywaniu przez detektor wykrycia fotonu chociaż w rzeczywistości nie miała miejsca żadna emisja fotonu. Niestety takie ciemne zliczenia będą powodować zmniejszenie średniego prawdopodobieństwa sukcesu i zmniejszenie średniej wierności teleportowanego stanu. Jedyne co można zrobić, to osłabić wpływ tego zjawiska na proces teleportacji przez dobranie takiego detektora i takich parametrów, żeby czas oddzielający wystąpienia ciemnych zliczeń był średnio znacznie większy od czasu trwania teleportacji. Niestety detektory o dużych efektywnościach cechuja się też stosunkowo dużymi czestościami ciemnych zliczeń. W detektorze testowanym przez Takeuchiego ciemne zliczenia występowały z częstością 20 kHz. Zatem pomiędzy kolejnymi ciemnymi zliczeniami upływa średnio 50 μ s. Niestety dokładnie tyle samo trwa etap detekcji i w związku z tym wpływ ciemnych zliczeń na teleportację będzie duży. Dlatego obecnie istniejące detektory muszą zostać udoskonalone przynajmniej w tej dziedzinie, żeby mogły posłużyć w doświadczalnym teleportowaniu stanów atomowych.

Rozdział 8

Teleportacja stanów splątanych

Teleportacja z asekuracją stanu pojedynczego atomu jest w modelu zaproponowanym przez Bosego i innych niemożliwa do wykonania. W podrozdziale 7.3 wykazano, że wbrew temu, co Bose i inni twierdzili w artykule [19], stan początkowy można uratować tylko w jednym z dwóch niepomyślnych przypadków. Oczywiście daje się zrealizować teleportację z asekuracją stanu pojedynczego atomu w innych modelach, na przykład takich, w których atom sprzężony jest z dwoma modami pola wnęki rezonansowej [104]. Jednak w układzie wykorzystanym do teleportacji przez Bosego i innych nadmiarowe kodowanie zaproponowane w artykule [97] wydaje się być przydatne tylko do teleportowania stanów dwóch lub większej liczby atomów. Stany takie muszą mieć ponadto zawsze takie same liczby N_0 . Stanem spełniającym takie warunki jest stan splątany dwóch atomów

$$\alpha |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \beta |0\rangle_1 |1\rangle_2. \tag{8.1}$$

Jak widać, ten stan splątany jest superpozycją dwóch stanów o takiej samej liczbie $N_0 = 1$, więc kubit zakodowany w amplitudach α i β można przesłać, zabezpieczając się przed każdym niepomyślnym wynikiem pomiaru. Poza takim praktycznym aspektem zajęcia się teleportacją stanu (8.1), silną motywacją jest również rosnące zainteresowanie algorytmami i protokołami wykorzystującymi większą, niż jeden liczbę kubitów [105–107]. Nie jest to dziwne zważywszy, że praktyczne zastosowania algorytmów kwantowych wymagają użycia rejestrów kwantowych o dużych rozmiarach. Jednym z zagadnień znajdujących się w centrum zainteresowania jest również teleportacja stanów splątanych. Oczywiście stan splątany dwóch atomów (8.1) można teleportować, wykonując niezależnie teleportację stanu każdego z atomów. Jednak dwukrotne powtórzenie protokołu oznacza mniejsze prawdopodobieństwo sukcesu. W przypadku modelu Bosego i innych teleportacja stanu dwóch atomów będzie miała co najwyżej 25% szanse powodzenia. Tymczasem dla stanów fotonowych w postaci (8.1) Lee [108] zaproponował protokół kończący się powodzeniem w połowie przypadków. Autorowi tej rozprawy udało się zaprojektować protokół, który teleportuje splątane stany atomowe z prawdopodobieństwem sukcesu zbliżonym do 50%, a ponadto wykorzystuje nadmiarowe kodowanie, pozwalając na wielokrotne powtarzanie teleportacji [86].

8.1 Generowanie stanów splątanych odległych atomów

Protokół teleportacji z asekuracją stanu splątanego dwóch atomów, który zostanie przedstawiony w następnym podrozdziale wymaga umiejętności wytworzenia stanu splątanego odległych atomów. Stany splątane atomów są bardzo ważnym narzędziem w informatyce kwantowej i dlatego zaproponowanych zostało wiele układów służących do wytwarzania stanów splątanych odległych atomów [19, 106, 109–115]. Jednak prawie wszystkie propozycje mają prawdopodobieństwo sukcesu mniejsze od 50%, ponieważ liniowe elementy optyczne umożliwiają wykorzystanie co najwyżej dwóch z czterech stanów Bella [20,21]. Ponadto w części proponowanych układów [106,112,113] populacja poziomu wzbudzonego jest znaczna w trakcie całego etapu detekcji, wprowadzającego splątanie. W związku z tym emisja spontaniczna z poziomu wzbudzonego prowadzi w tych modelach do bardzo dużej redukcji prawdopodobieństwa sukcesu. Tylko propozycja Browna i innych [111] unika wszystkich wspomnianych problemów. Zastosowali oni, podobnie do Bosego i innych, atom trójpoziomowy typu Λ i odpowiednio duże odstrojenia od rezonansu, by podczas całego protokołu obsadzenie poziomu wzbudzonego było zaniedbywalnie małe. Natomiast ograniczenia optyki liniowej Brown i inni obeszli, stosując na tyle słabe pompowanie laserem jednego z przejść, żeby spełniony był warunek $\Omega_{\kappa} \ll \kappa$. Jednak przyjęcie takiego warunku sprawia, że niemożliwe staje się wykonanie na takich splątanych atomach wielu operacji. W szczególności warunek $\Omega_\kappa \ll \kappa$ uniem
ożliwia użycie jakiejkolwiek operacji z rozdziału 6 i w rezultacie wykonanie nadmiarowego kodowania i teleportacji. Brown i inni [111] uznali, że splątanie odległych atomów z prawdopodobieństwem sukcesu większym od 50% przy wykorzystaniu silnego pompowania jest niemożliwe. Pomimo tego autorowi tej rozprawy udało się skonstruować protokół realizujący właśnie takie zadanie [87] i to przy wykorzystaniu dokładnie tego samego układu, który przez Bosego i innych wykorzystany był jedynie do splątania odległych atomów z prawdopodobieństwem sukcesu 50%. Chodzi tutaj naturalnie o artykuł [19] i o urządzenie przedstawione na rysunku 7.1. Jest to dowód na to, że protokół jest równie ważny jak samo urządzenie. W dużym uproszczeniu ten ulepszony protokół polega na tym, by najpierw w obu wnękach wytworzyć jednofotonowy stan pola, następnie splątać stan obu pól przez poczekanie na zarejestrowanie pierwszej emisji i ostatecznie "przenieść" splątanie z pól na atomy.

Najpierw warto dokładnie przeanalizować ten protokół na najprostszym przykładzie, gdy w każdej wnęce znajduje się tylko jeden atom i można zastosować operacje z podrozdziału 6.1. Na początku protokołu pola obu wnęk znajdują się w stanie próżni, a oba atomy są przygotowane w stanie $|1\rangle$. Tak więc początkowym stanem całego układu jest stan $|10\rangle_A \otimes |10\rangle_B$. Protokół składa się z czterech etapów.

(i) W pierwszym etapie oba atomy oświetlane są laserami przez czas t_1 . A zatem na obu układach wnęka-atom wykonywana jest operacja O_2 i pod warunkiem, że w tym czasie nie będzie żadnej emisji, układ przechodzi do stanu $|01\rangle_A \otimes |01\rangle_B$. Wtedy zaczyna się etap detekcji, który jest drugim etapem protokołu. Co ciekawe, w tym protokole wystąpienie emisji podczas operacji oświetlania atomów laserami w pierwszym etapie nie jest przypadkiem niepomyślnym. Zadziałanie operatora emisji (7.11) na stan całego układu podczas trwania tego etapu prowadzi do powstania stanu splątanego obu pól $(|00\rangle_A |01\rangle_B + i\epsilon |01\rangle_A |00\rangle_B)$ pod koniec pierwszego etapu. Takie splątanie misji w pierwszym etapie etap detekcji, więc w przypadku wystąpienia emisji w pierwszym etapie etap detekcji jest zbędny. Dlatego po zakończeniu pierwszego etapu należy wówczas przejść od razu do trzeciego etapu. Niestety zarejestrowanie dwóch emisji kończy protokół niepowodzeniem.

(ii) W drugim etapie protokołu, czeka się, aż któryś z detektorów zasygnalizuje wykrycie emisji fotonu. Tak jak w poprzednich protokołach pomiar wykonywany jest przy wyłączonych laserach. Średni czas oczekiwania na emisję fotonu, a więc też średni czas tego etapu, jest równy $\bar{t}_{det} = (4\kappa)^{-1}$. Do czasu wystąpienia tej emisji zmiana stanu każdego z układów atom-wnęka jest dana operacją O_8 . Natomiast wykrycie emisji odpowiada zadziałaniu na stan obu układów operatora emisji (7.11). Bezpośrednio po nastąpieniu emisji układ przechodzi do stanu splątanego $(|00\rangle_A|01\rangle_B + i\epsilon|01\rangle_A|00\rangle_B)$. Drugi etap kończy się natychmiast po zarejestrowaniu pierwszej emisji, ponieważ każda zwłoka zwiększa prawdopodobieństwo wystąpienia drugiej emisji, niszczącej wytworzone splątanie.

(iii) Trzeci etap odpowiada za przeniesienie splątania z pól obu wnęk na atomy, znajdujące się w tych wnękach. Zadanie to realizuje się przez włączenie obu laserów na czas t_2 i wykonanie tym samym operacji O_1 i O_3 . Po tym etapie oba atomy znajdują się już w stanie maksymalnego splątania $(|00\rangle_A|10\rangle_B + i\epsilon|10\rangle_A|00\rangle_B)$. Pozostaje już tylko usunięcie czynnika fazowego $i\epsilon$. Jeśli w tym etapie nastąpi jakakolwiek emisja fotonu to cały protokół kończy się porażką.

(iv) W ostatnim etapie protokołu usunięty zostaje czynnik fazowy $i\epsilon$ przy wykorzystaniu ewolucji Zeemana.

Ostatecznie otrzymuje się stan maksymalnie splątany dwóch odległych atomów. Prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia protokołu może być, przy warunku silnego pompowania laserem, bardzo dobrze przybliżone wyrażeniem

$$P_{\rm suk} = e^{-\lambda \pi} (2 - e^{-\lambda \pi/2}),$$
 (8.2)

gdzie $\lambda = \kappa/\delta$. Wykres 8.1 pokazuje, że prawdopodobieństwo sukcesu zmie-



Rysunek 8.1: Prawdopodobieństwo sukcesu dane wzorem (8.2) (linia ciągła) i obliczone numerycznie (punkty) dla parametrów (Δ ; Δ '; Ω ; g; γ)/2 π = (300; 300; 25; 25; 0) MHz.

rza do jedności wraz ze zmniejszającym się czynnikiem λ . Dla porównania, prawdopodobieństwo sukcesu policzono także metodą trajektorii kwantowych. W tych, jak i we wszystkich numerycznych obliczeniach w tej rozprawie, użyta została najogólniejsza postać hamiltonianu efektywnego dana wyrażeniem (5.13). Parametry (Δ ; Δ '; Ω ; g; κ ; γ)/ $2\pi = (300; 300; 25; 25; 0, 05; 0, 1)$ MHz zostały tak wybrane, żeby wszystkie warunki wymagane do wykonania operacji z tabelek 6.1 i 6.2, to znaczy ($\Delta_r = 0; \Delta \gg \gamma; \Omega = g; \Delta \gg \Omega; \delta \gg \kappa \gg \gamma s$), były spełnione. Prawdopodobieństwo sukcesu przybliżono stosunkiem liczby trajektorii, w których wytworzenie splątania zakończyło się
powodzeniem do liczby wszystkich trajektorii. Żeby takie przybliżenie było dobre, wygenerowano aż 20 000 trajektorii. Dla wspomnianych parametrów wierność uśredniona po wszystkich trajektoriach była równa około 0,99, a prawdopodobieństwo sukcesu wyniosło około 0,94. Ponadto, numeryczne obliczenia zostały powtórzone dla γ równego zero w celu sprawdzenia poprawności analitycznego wyrażenia (8.2) na prawdopodobieństwo sukcesu. Na rysunku 8.1, punkty przedstawiają prawdopodobieństwa sukcesu policzone z 20 000 trajektorii dla różnych wartości κ . Jak widać, wyniki analityczne doskonale zgadzają się z wynikami otrzymanymi numerycznie. Warto zwrócić uwagę na to, że ten protokół wytwarzania splątanych stanów odległych atomów ma wysokie szanse powodzenia, przewyższające 80% nawet dla wartości κ większych dwudziestokrotnie od wartości, które muszą być przyjęte, by protokół Bosego i innych [19] miał prawdopodobieństwo sukcesu zbliżone do 50%. Zbadany również został wpływ współczynnika emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego γ na omawiany protokół. Na rysunku 8.2 została wy-



Rysunek 8.2: Wykres zależności prawdopodobieństwa sukcesu (romby) i prawdopodobieństwa otrzymania pomyślnego wyniku pomiaru (puste kwadraty) od współczynnika emisji spontanicznej. Każda z przestawionych wartości obu prawdopodobieństw wyznaczona została z 20 000 trajektorii dla parametrów (Δ ; Δ '; Ω ; g; κ)/2 π = (300; 300; 25; 25; 0, 05) MHz.

kreślona zależność prawdopodobieństwa sukcesu (romby) od wartości współczynnika γ . Jak widać, prawdopodobieństwo sukcesu zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości γ . Taka zależność jest zgodna z oczekiwaniami, ponieważ w taki sam sposób emisja spontaniczna z poziomu wzbudzonego wpływała na prawdopodobieństwo sukcesu protokołu teleportacyjnego. Zaskakujący jest jednak wpływ współczynnika γ na wierność otrzymanego stanu splątanego. Jak widać na rysunku 8.3, zwiększanie współczynnika emisji spontanicznej



Rysunek 8.3: Wierność splątania obliczona numerycznie jako funkcja γ dla parametrów (Δ ; Δ '; Ω ; g; κ)/ $2\pi = (300; 300; 25; 25; 0, 05)$ MHz. Romby reprezentują wierność uśrednioną ze wszystkich udanych trajektorii, podczas gdy puste kwadraty odpowiadają wartościom uśrednionym ze wszystkich trajektorii, w których pomiar wskazywał na powodzenie. Do obliczeń wygenerowano 20 000 trajektorii.

Einsteina prowadzi do poprawienia wierności (romby). Zjawisko to można łatwo wytłumaczyć zależnością wierności od obsadzenia stanu wzbudzonego atomów. Jeśli parametr nasyceniowy *s* nie jest wystarczająco mały, to obsadzenie stanów wzbudzonych może być obniżone przez odpowiednio duży współczynnik emisji spontanicznej. Niestety nie można wykorzystać tej metody w protokołach przedstawionych w tej pracy, ponieważ w tym celu niezbędna jest umiejętność odróżnienia pomyślnych realizacji protokołu od tych, w których nastąpiła emisja spontaniczna z poziomu wzbudzonego któregoś z atomów. Prezentowane układy nie dają takiej możliwości. Gdyby pomyślne zakończenie protokołu było związane z zarejestrowaniem dwóch emisji, to wtedy taki wynik pomiaru zapewniałby, że nie mogła nastąpić żadna emisja z poziomu wzbudzonego. Tymczasem detekcja jednego fotonu nie daje takiej gwarancji, ponieważ taki wynik pomiaru można otrzymać również, gdy nastąpi jedna emisja z poziomu wzbudzonego jednego z atomów. Dlatego takie przypadki zmniejszają średnią wierność, ale nie zmniejszają średniego prawdopodobieństwa zarejestrowania jednego fotonu. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku pomiaru, który sugeruje pomyślne zakończenie protokołu, nazywane później skrótowo prawdopodobieństwem pomyślnego pomiaru, jest przedstawione na rysunku 8.2 pustymi kwadratami. Z punktu widzenia eksperymentatora prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru jest istotniejsze od prawdopodobieństwa sukcesu, ponieważ z tych dwóch prawdopodobieństw tylko to pierwsze jest wielkością dającą się wyznaczyć doświadczalnie. Z wykresu 8.2 widać, że wpływ współczynnika emisji spontanicznej na prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru jest faktycznie zaniedbywalnie mały. Z kolei, rysunek 8.3 pokazuje, że niemożność odrzucenia przypadków wystąpienia emisji z poziomu wzbudzonego atomu prowadzi do zmniejszenia średniej wierności.

W podrozdziale 7.4 pokazano, że nieefektywność detektorów może mieć zgubny wpływ na działanie protokołu, ponieważ nie tylko zmniejsza prawdopodobieństwo sukcesu, ale i wierność stanu końcowego. W protokole teleportacyjnym pogorszenie wierności nie było duże, ale w przeciwieństwie do obecnie przedstawianego protokołu plątania odległych atomów, nie trzeba tam było podejmować żadnego działania natychmiast po emisji fotonu. Dlatego należy zbadać wpływ nieefektywnego pomiaru na proces wytwarzania splątanych stanów odległych atomów. Niestety w przedstawionym protokole po wystąpieniu pierwszej emisji w drugim etapie natychmiast należy przepisać splątany stan pól na stan atomów, ponieważ w przeciwnym razie na pewno będzie mieć miejsce druga emisja, po której układ przejdzie do stanu $|00\rangle_A |00\rangle_B$. Zatem protokół działa prawidłowo tylko pod warunkiem zarejestrowania pierwszej emisji i dlatego nieefektywność detektorów prowadzi do zmniejszenia prawdopodobieństwa sukcesu. Jeśli oba detektory mają taką samą efektywność η , to prawdopodobieństwo sukcesu będzie dane wzorem $P_{\rm suk}(\eta) = \eta P_{\rm suk}$. Jeszcze gorszym przypadkiem jest zarejestrowanie tylko drugiej emisji, ponieważ taki przypadek zostanie błędnie zinterpretowany jako pomyślny. Prawdopodobieństwo popełnienia takiej pomyłki jest równe $P_{\rm mvl}(\eta) = \eta(1-\eta)(2-P_{\rm suk})$. Oczywiście prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru będzie sumą $P_{\rm suk}(\eta)$ i $P_{\rm myl}(\eta)$. Niestety dla przyjętych parametrów, nawet dla największej obecnie dostępnej efektywności detektorów $\eta = 88\%$, prawdopodobieństwo błędnego uznania przypadku z dwoma emisjami za udany jest duże $P_{\rm myl}(\eta) \approx 11\%$. W celu sprawdzenia, jak mocno wpływa efektywność $\eta = 88\%$ na wierność, przeprowadzone zostały po raz kolejny obliczenia numeryczne. Otrzymana została średnia wierność równa zaledwie 0,86 oraz prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru równe 0,96. Inna niedoskonałościa detektorów sa ciemne zliczenia. Jeśli detektor zasygnalizuje wykrycie fotonu przed wystąpieniem pierwszej emisji, to rozpoczęty zostanie trzeci etap protokołu przed powstaniem maksymalnie splątanego stanu obu pól. W takim przypadku układ powróci do stanu początkowego, podczas gdy eksperymentator będzie przekonany o wytworzeniu maksymalnie splątanego stanu obu atomów. Na szczęście średni czas trwania całego protokołu jest bardzo krótki, równy około 1 μ s. Tymczasem nawet dla najczulszego detektora testowanego przez Takeuchiego średni czas pomiędzy dwoma ciemnymi zliczeniami wynosi około 50 μ s. Dlatego można przyjąć, że wpływ ciemnych zliczeń na protokół wytwarzania stanów splątanych odległych atomów jest słaby.

Na koniec badania działania protokołu rozważony zostanie przypadek wykrycia dwóch emisji. Prawdopodobieństwo zarejestrowania dwóch emisji podczas trwania protokołu jest równe $\eta^2(1 - P_{suk})$. Jak widać z rysunku 8.1, P_{suk} dąży do jedności gdy λ zmierza do zera. Dlatego prawdopodobieństwo zarejestrowania dwóch fotonów będzie zaniedbywalnie małe dla wystarczająco małej wartości λ . Wówczas układ nie potrzebuje detektorów mających zdolność odróżnienia jednego fotonu od dwóch fotonów.

Po gruntownym przebadaniu protokołu, wytwarzającego stany splątane odległych atomów dla najprostszego modelu, czas na uogólnienie tego protokołu do wersji, która działa w układach wielu atomów uwięzionych wewnątrz wnęki. Modyfikacja urządzenia, obsługującego protokół, polega wyłącznie na umieszczeniu w każdej z wnęk pewnej liczby dodatkowych atomów. Schemat



Rysunek 8.4: Urządzenie do wytwarzania stanów splątanych wybranych dwóch odległych atomów.

takiego urządzenia przedstawiony jest na rysunku 8.4. Dodatkowe atomy znajdujące się we wnęce, nie poddawane operacji platania, mogą znajdować się początkowo w dowolnym stanie oznaczonym przez $|\Phi\rangle$. Jeśli jednak stan $|\Phi\rangle$ byłby superpozycją innych stanów, i jeśli podczas całego procesu powinien pozostać niezmodyfikowany w żaden sposób, to na wszystkie stany w superpozycji $|\Phi\rangle$ trzeba narzucić warunek takiej samej liczby atomów znajdujących się w stanie $|0\rangle$. W celu uniknięcia nieporozumienia liczba atomów znajdujących się w stanie $|0\rangle$, ale nie uwzględniająca atomu plątanego, zostanie oznaczona symbolem N'_0 . Operacje jakie można wykonać we wnęce zawierającej wiele atomów są przedstawione w podrozdziale 6.2. Ponieważ w protokole potrzebnych będzie tylko sześć z nich, to dla przejrzystości tekstu warto je w tym miejscu jeszcze powtórzyć. Zarówno wytworzenie stanów jednofotonowych w pierwszym etapie, jak i przeniesienie splątania z pól na atomy w trzecim etapie wymagać będą włączenia laserów na czas $t_L = \pi/(2\delta_5)$. Włączenie lasera na taki czas odpowiada wykonaniu następujących operacji

$$|\Phi\rangle|10\rangle \rightarrow i e^{i\Delta_r (N'_0+1)t_L} e^{-\frac{\kappa t_L}{2}} e^{i\frac{N'_0+1}{2}\delta_3 t_L} |\Phi\rangle|01\rangle, \qquad (8.3)$$

$$|\Phi\rangle|01\rangle \quad \to \quad ie^{i\Delta_r(N_0'+1)t_L}e^{-\frac{\kappa t_L}{2}}e^{i\frac{N_0+1}{2}\delta_3 t_L}|\Phi\rangle|10\rangle, \tag{8.4}$$

$$|\Phi\rangle|00\rangle \rightarrow e^{i\Delta_r(N'_0+1)t_L}|\Phi\rangle|00\rangle.$$
 (8.5)

Tymczasem w etapie detekcji oba lasery będą wyłączone, co prowadzić będzie do ewolucji danej równaniami

$$e^{-iHt}|\Phi\rangle|10\rangle = e^{iN_0'\Delta_r t}|\Phi\rangle|10\rangle, \qquad (8.6)$$

$$e^{-iHt}|\Phi\rangle|01\rangle = e^{i(\Delta_r+\delta_3)(N'_0+1)t}e^{-\kappa t}|\Phi\rangle|01\rangle, \qquad (8.7)$$

$$e^{-iHt}|\Phi\rangle|00\rangle = e^{i\Delta_r(N_0'+1)t}|\Phi\rangle|00\rangle.$$
(8.8)

Niech na początku protokołu cały układ będzie przygotowany w stanie $|\Phi\rangle_A|10\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B|10\rangle_B$. Nowa wersja protokołu składa się z trzech etapów.

(i) Oświetlanie laserem dwóch wybranych atomów (jednego z wnęki A i jednego z wnęki B) przez czas t_L . Jeśli nie nastąpi żadna emisja podczas tego etapu, to układ przejdzie do stanu $|\Phi\rangle_A|01\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B|01\rangle_B$. Jeśli jednak zostanie zarejestrowany jeden foton w czasie t_j , to układ pod koniec tego etapu znajdzie się w stanie $|\Phi\rangle_A|\Phi\rangle_B(|00\rangle_A|01\rangle_B + \epsilon\theta(t_L - t_j)|01\rangle_A|00\rangle_B)$, gdzie wprowadzone zostało oznaczenie $\theta(t) = \exp[(i/2)(N'_{0A} - N'_{0B})\delta_3 t]$. Wtedy należy przejść do trzeciego etapu, omijając drugi.

(ii) Czekanie na zarejestrowanie pierwszej emisji. Średni czas trwania drugiego etapu jest dany przez $\overline{t}_{det} = (4\kappa)^{-1}$. Po wykryciu emisji, pola obu wnęk zostają splątane $|\Phi\rangle_A |\Phi\rangle_B (|00\rangle_A |01\rangle_B + \epsilon |01\rangle_A |00\rangle_B)$.

(iii) Przenoszenie splątania z obu pół na dwa odległe atomy przez oświetlenie tych atomów laserami przez czas t_L . Oba lasery nie zostają jednak włączone jednocześnie. Laser L_B musi być włączony z pewnym opóźnieniem t_{ϕ} . Oczywiście laser L_B również kończy pracę później o t_{ϕ} od lasera L_A . Po zakończeniu tego etapu układ przechodzi do stanu $|\Phi\rangle_A|\Phi\rangle_B(|00\rangle_A|10\rangle_B + \phi|10\rangle_A|00\rangle_B)$, gdzie $\phi = \epsilon\theta(2t_L - t_j)\exp[-i\Delta_r t_{\phi}]$, jeśli foton został zarejestrowany w pierwszym etapie lub $\phi = \epsilon\theta(t_L)\exp[-i\Delta_r t_{\phi}]$ dla przypadku wystąpienia pierwszej emisji dopiero w drugim etapie. Eksperymentator wybiera takie t_{ϕ} żeby $\phi = 1$.

Prawdopodobieństwo pomyślnego zakończenia tego zmodyfikowanego protokołu jest również dane wyrażeniem (8.2), jednak z $\lambda = \kappa/\delta_5$. Również dla tego trudniejszego modelu przeprowadzone zostały obliczenia numeryczne. Parametry $(\Delta; \Delta'; \Omega; g; \kappa; \gamma)/2\pi = (1000; 1000, 9; 30; 0, 7; 0, 001; 0, 1)$ MHz przyjęto tak, żeby spełnione były wszystkie warunki nałożone na parametry w podrozdziale 6.2 oraz dodatkowy warunek wprowadzony w podrozdziale 7.2. Wszystkim tym założeniom można nadać zwartą postać, to znaczy ($\Delta_r = \delta_1$; $\Delta \gg \Omega \gg q$; $\Delta \gg \gamma$; $\delta_5 \gg \kappa \gg \gamma s_1$). W obliczeniach numerycznych przyjęto, że w każdej wnęce znajdują się trzy atomy, tak jak na rysunku 8.4. Znacznie większa przestrzeń stanów powiększonego o cztery atomy układu spowodowała bardzo duże wydłużenie czasu obliczeń i dlatego tym razem wygenerowano tylko 1000 trajektorii. W każdej z trajektorii losowane były liczby $N'_{0A}, N'_{0B} \in \{0, 1, 2\}$ i odpowiadające im stany początkowe $|\Phi\rangle_A, |\Phi\rangle_B \in \{|1\rangle_1|1\rangle_2, c_1|1\rangle_1|0\rangle_2 + c_2|0\rangle_1|1\rangle_2, |0\rangle_1|0\rangle_2\}$ z losowymi zespolonymi amplitudami c_1 i c_2 . Średnia wierność stanu końcowego, przy uwzględnieniu warunku niemodyfikowania stanów $|\Phi\rangle_A$ i $|\Phi\rangle_B$, wyniosła 0,99. Prawdopodobieństwo sukcesu, przybliżone stosunkiem liczby trajektorii z udanym zakończeniem protokołu do wszystkich trajektorii wyniosło 0,91. Uwzględnienie faktu, że stosowany model nie pozwala wykryć przypadków wystąpienia emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego któregoś z atomów, powoduje zmniejszenie średniej wierności do 0,98 ale prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru pozostaje równe 0,91.

Możliwe jest również wykonanie splątania wybranych odległych atomów przy parametrach (Δ ; Ω ; g; κ ; γ)/ $2\pi = (400; 30; 0, 7; 0, 003; 0, 1)$ MHz. Jednakże dla takich parametrów, wyrażenie analityczne na δ_1 nie jest wystarczająco precyzyjne i dlatego również i ta wielkość musi być wyznaczona numerycznie. Ponownie wygenerowano 1000 trajektorii, otrzymując średnią wierność równą około 0, 97, a prawdopodobieństwo sukcesu około 0, 90.

8.2 Protokół teleportacji z asekuracją

W tym rozdziale zostanie zaprezentowany protokół, który umożliwia teleportowanie splątanych stanów dwóch atomów z asekuracją. Układ jest przedstawiony na rysunku 8.5 i składa się z dwóch optycznych wnęk rezonansowych W_A i W_B , dwóch detektorów D_+ i D_- , dwóch laserów L_A i L_B emitujących światło spolaryzowane kołowo lewoskrętnie, dwóch laserów L'_A i L'_B , emitujących światło spolaryzowane kołowo prawoskrętnie oraz półprzepuszczalnej płytki światłodzielącej P. Do odbiorcy należą lasery L_B i L'_B oraz wnęka



Rysunek 8.5: Schemat urządzenia do teleportowania atomowych stanów splątanych z asekuracją. Stan atomów nadawcy 1 i 2 we wnęce W_A jest teleportowany do atomów odbiorcy 1 i 2 we wnęce W_B .

rezonansowa W_B , wewnątrz której uwięzione są dwa atomy. Do nadawcy należy reszta urządzenia. Na początku założymy, że detektory są doskonałe. Muszą także rozróżniać jeden foton od dwóch fotonów. Stan nadawcy, który ma być przesłany z asekuracją jest stanem początkowym dwóch pierwszych atomów uwięzionych we wnęce nadawcy W_A . Niech tym stanem będzie

$$|\psi_0\rangle = \alpha |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \beta |0\rangle_1 |1\rangle_2.$$
(8.9)

Trzeci atom uwięziony we wnęce nadawcy jest atomem zapasowym i razem z pierwszym atomem odbiorcy posłuży w namiarowym kodowaniu. Zarówno trzeci atom nadawcy, jak i oba atomy odbiorcy muszą być na początku przygotowane w stanie $|1\rangle$. Pola obu wnęk znajdują się początkowo w stanie

próżni. Korzystając z konwencji przyjętej w podrozdziale 6.2, stan początkowy całego układu zostanie zapisany w następujący sposób

$$|\Phi(0)\rangle = (\alpha |1010\rangle_A + \beta |0110\rangle_A) \otimes |110\rangle_B.$$
(8.10)

W celu nadania wzorom jeszcze bardziej zwartej postaci przyjęty zostanie w dalszej części następujący zapis stanu całego układu: $|x_1x_2x_3n\rangle_A \otimes |x_1x_2n\rangle_B = |x_1x_2x_3n; x_1x_2n\rangle$. Wówczas stan początkowy przyjmuje poniższą formę

$$|\Phi(0)\rangle = \alpha |1010;110\rangle + \beta |0110;110\rangle.$$
(8.11)

Cały protokół teleportacyjny składa się z pięciu etapów: (i) etapu przygotowania, (ii) etapu kodowania, (iii) etapu detekcji I, (iv) etapu detekcji II i (v) etapu odtwarzania. W każdym etapie konieczne jest wykonanie odpowiedniej liczby kroków, żeby ostatecznie dostać pożądany rezultat.

(i) etap przygotowania

Celem etapu przygotowania jest wytworzenie maksymalnie splątanego stanu trzeciego atomu nadawcy i pierwszego atomu odbiorcy. Do zrealizowania tego zadania idealnie nadaje się technika, opisana w poprzednim podrozdziale. Zatem etap przygotowania wymaga wykonania trzech kroków.

(a) Najpierw nadawca i odbiorca wykonują operację (6.31). Po prostu włączają lasery L_A i L_B , oświetlając swoje atomy, to znaczy nadawca wzbudza swój trzeci atom, a odbiorca pierwszy. Po czasie $t_1 = \pi/(2\delta_5)$ obaj wyłączają lasery, a obie wnęki znajdują się w stanie jednofotonowym. Dla uproszczenia przypadki wystąpienia emisji w tym etapie uznane zostaną za niepomyślne, chociaż jak wiadomo wystąpienie jednej emisji w tym etapie można wykorzystać do splątania atomów. Takie przybliżenie będzie mieć jednak zaniedbywalnie mały wpływ na prawdopodobieństwo sukcesu, ponieważ długość całego protokołu wymusza wybranie takiego κ , żeby stosunek κ/δ_5 był niezwykle mały. Niezwykle mała wartość tego stosunku pozwala też zaniedbać κ w operacjach oświetlania atomu laserem.

(b) Następnie, obie strony komunikacji czekają, aż jeden z detektorów zasygnalizuje wykrycie emisji. Wszystkie lasery są wyłączone i dlatego przed wystąpieniem emisji ewolucja stanu całego układu jest opisana przez (6.27). Natomiast zarejestrowanie jednego fotonu odpowiada zadziałaniu na stan układu operatora emisji (7.11) i prowadzi do wytworzenia maksymalnie splątanego stanu pól obu wnęk rezonansowych.

(c) Zaraz po zarejestrowaniu emisji, nadawca i odbiorca muszą natychmiast włączyć lasery L_A i L_B . Oświetlają oni te same atomy co w pierwszym etapie przez czas t_1 , wykonując operację (6.32). Taka operacja powoduje przeniesienie splątanego stanu obu pól na stan trzeciego atomu nadawcy i pierwszego atomu odbiorcy. Wtedy kończy się wytworzenie maksymalnie splątanego stanu tych dwóch atomów, a stan całego układu jest dany wektorem

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \alpha |1000;110\rangle + \alpha \epsilon e^{\frac{i}{2}\delta_{3}t_{1}} |1010;010\rangle \\ &+ \beta |0100;110\rangle + \beta \epsilon e^{\frac{i}{2}\delta_{3}t_{1}} |0110;010\rangle \,. \end{aligned}$$
(8.12)

(ii) etap kodowania

W etapie kodowania wprowadzone zostaje nadmiarowe kodowanie [97]. Oryginalny stan początkowy dwóch pierwszych atomów nadawcy, który ma być teleportowany, zostaje zakodowany w splątanym stanie wszystkich atomów nadawcy i pierwszego atomu odbiorcy. Algorytm kodowania stanu splątanego dwóch atomów różni się od przedstawionego wcześniej algorytmu kodowania stanu jednego atomu. Pomimo różnic, cel pozostaje jednak taki sam, to znaczy zamienić jedną parę amplitud stanu (8.12), nie ruszając drugiej pary. Zadanie to daje się wykonać w czterech krokach.

(a) W pierwszym kroku nadawca odwzorowuje stan swojego pierwszego atomu w stanie pola wnęki, skierowując laser L_A na ten właśnie atom i włączając ten laser na czas t_1 . Działanie takie odpowiada wykonaniu operacji (6.31) i (6.46). Podczas tego kroku oba lasery odbiorcy są wyłączone, a stan jego części układu zmienia się według równania (6.27). Po zakończeniu pierwszego kroku stan całego układu jest opisany nieunormowanym wektorem

$$\begin{split} |\tilde{\Phi}\rangle &= i\alpha\varphi_1 e^{i\frac{3}{2}\delta_3 t_1} |0001;110\rangle + i\alpha\epsilon\varphi_1 e^{i\frac{3}{2}\delta_3 t_1} |0011;010\rangle \\ &+\beta |0100;110\rangle + \beta\epsilon e^{\frac{i}{2}\delta_3 t_1} |0110;010\rangle \,, \end{split}$$
(8.13)

gdzie $\varphi_1 = \varphi(t_1).$

(b) W drugim kroku etapu kodowania musi być wzbudzany trzeci atom nadawcy. Jak widać, $v_2 = 1$ we wszystkich stanach superpozycji (8.13). Celem drugiego kroku jest zróżnicowanie tych wielkości. Częstość Rabiego zależy od v_k i dlatego, gdy wartość v_2 będzie różna w każdej parze stanów, to będzie można na każdej parze wykonać niezależnie różne operacje w tym samym czasie. Dzięki temu możliwa stanie się wymiana tylko jednej pary amplitud. Nadawca włącza laser L_A na taki czas, żeby wykonać jednocześnie operacje (6.31), (6.32), (6.39) oraz (6.46). Oczywiście czas tego kroku musi spełnić następujące warunki: $t_2\delta_5 = \pi/2 + 2m_1\pi$ i $t_2\sqrt{2}\delta_5 = \pi/2 + 2m_2\pi$. Niestety spełnienie obu tych warunków jest możliwe tylko w przybliżeniu dla $m_1 = 7$ i $m_2 = 10$. Również podczas tego kroku odbiorca ma wyłączone lasery i w związku z tym ewolucja jego stanu jest zgodna z (6.27). Po drugim kroku otrzymuje się stan zbliżony do

$$\begin{split} |\tilde{\Phi}\rangle &= -\alpha\varphi_{1}\varphi_{2}e^{i\frac{3}{2}\delta_{3}(t_{1}+t_{2})}|0010;110\rangle - \alpha\epsilon\varphi_{1}\varphi_{2}^{2}e^{i\delta_{3}(\frac{3}{2}t_{1}+4t_{2})}|0002;010\rangle \\ &+\beta|0100;110\rangle + i\beta\epsilon\varphi_{2}e^{i\delta_{3}(\frac{1}{2}t_{1}+t_{2})}|0101;010\rangle, \end{split}$$
(8.14)

gdzie $\varphi_2 = \varphi(t_2)$. W superpozycji (8.14) stany z małymi modułami amplitud zostały zaniedbane, ale zostały uwzględnione, tak jak i wiele innych niedoskonałości, w obliczeniach numerycznych.

(c) Trzeci krok jest najważniejszy w etapie kodowania. Poprzednie dwa kroki były przygotowaniem do trzeciego, w którym wytworzony zostaje splątany stan trzech atomów i pola wnęki rezonansowej. W tym celu nadawca musi wymienić amplitudy jednej pary stanów, nie wymieniając amplitud drugiej pary stanów. Nadawca może to zrobić przez włączenie lasera L_A i pompowanie nim swojego drugiego atomu przez czas, który doprowadzi do wykonania operacji (6.37), (6.39), (6.40) i (6.46). W tym miejscu pojawia się ten sam problem, co w drugim kroku, ponieważ czas trzeciego kroku musi jednocześnie spełnić dwa warunki: $t_3\delta_5 = 2m_1\pi$ i $t_3\sqrt{2}\delta_5 = \pi/2 + 2m_2\pi$. Przybliżone rozwiązanie można znaleźć dla $m_1 = 3$ i $m_2 = 4$. Lasery odbiorcy są nadal wyłączone. Tak jak w poprzednim kroku, zaniedbane zostaną stany o znikomej populacji. Wówczas otrzymuje się wektor stanu całego układu w postaci

$$\begin{split} |\tilde{\Psi}\rangle &= \alpha \varphi_1 \varphi_2 e^{i\frac{3}{2}\delta_3(t_1+t_2)} |0010;110\rangle + i\alpha \epsilon \varphi_1 \varphi_2^2 \varphi_3^2 e^{i\delta_3(\frac{3}{2}t_1+4t_2+4t_3)} |0101;010\rangle \\ &- \beta \varphi_3 e^{i\frac{3}{2}\delta_3 t_3} |0100;110\rangle + \beta \epsilon \varphi_2 \varphi_3^2 e^{i\delta_3(\frac{1}{2}t_1+t_2+4t_3)} |0002;010\rangle , \quad (8.15) \end{split}$$

gdzie $\varphi_3 = \varphi(t_3)$. Chociaż po tym kroku splątanie już jest wytworzone, to można łatwo sprawdzić, że stan (8.15) nie zabezpiecza jeszcze informacji kwantowej zawartej w początkowym stanie dwóch pierwszych atomów nadawcy. Na przykład, jeśli zostaną zarejestrowane dwa fotony, to amplitudy α i β bezpowrotnie przepadną.

(d) W celu zakończenia procesu zabezpieczania informacji kwantowej nadawca oświetla swój trzeci atom, używając lasera L_A . To działanie jest czwartym krokiem etapu kodowania. Nadawca musi wykonać jednocześnie operacje (6.37), (6.40) oraz (6.46) i dlatego czas trwania czwartego kroku musi jednocześnie spełniać dwa warunki: $t_4\delta_5 = 2m_1\pi$ i $t_4\sqrt{2}\delta_5 = \pi/2 + 2m_2\pi$. Jest oczywiste, że czas tego kroku jest taki sam jak poprzedniego i w związku z tym $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi(t_4)$. Stany o małym obsadzeniu ponownie zostaną w analitycznych rozważaniach zaniedbane.

Odbiorca podczas czwartego kroku etapu kodowania wykonuje dwie czynności. Najpierw czeka z wyłączonymi laserami przez czas $t_4 - t_1/2$ a następnie

wytwarza maksymalnie splątany stan swojego drugiego atomu i pola swojej wnęki. Proces plątania wykonuje przez skierowanie lasera L_B na swój drugi atom i włączenie go na czas $t_1/2$. Działanie takie odpowiada operacji (6.35). Odbiorca koordynuje swoje działanie z operacją nadawcy tak, żeby czwarty krok skończył się dla nich dokładnie w tym samym momencie. Wtedy stan całego układu jest opisany przez następujący wektor

$$\begin{split} |\tilde{\Phi}\rangle &= (\alpha \varphi_{1} \varphi_{2} e^{i\frac{3}{2}\delta_{3}(t_{1}+t_{2})} |0010\rangle_{A} - \beta |0100\rangle_{A}) \otimes (i|101\rangle_{B} + |110\rangle_{B}) \\ &+ (i\alpha \epsilon \varphi_{1} \varphi_{2}^{2} \varphi_{3}^{2} e^{i\delta_{3}(\frac{7}{4}t_{1}+4t_{2}+\frac{7}{2}t_{3})} |0101\rangle_{A} \\ &+ i\beta \epsilon \varphi_{2} \varphi_{3}^{3} e^{i\delta_{3}(\frac{3}{4}t_{1}+t_{2}+\frac{13}{2}t_{3})} |0011\rangle_{A}) \otimes (i|001\rangle_{B} + |010\rangle_{B}) \,. \end{split}$$
(8.16)

To jest koniec etapu kodowania. Jeśli nadawca chciałby przechowywać zakodowany stan przez dłuższy czas, to powinien przenieść stan pola swojej wnęki na swój pierwszy atom. Wówczas stan początkowy byłby nadmiarowo zakodowany w stanie czterech atomów. Jednakże w tym przypadku nadmiarowe kodowanie ma posłużyć w przesyłaniu informacji za pomocą stanu pola, a stan (8.16) idealnie się do tego celu nadaje.

(iii) etap detekcji I

Trzecim etapem protokołu jest pierwszy etap detekcji, w którym nadawca po prostu czeka przez czas $t_D \gg \kappa^{-1}$, wykonując połączony pomiar stanu pól obu wnęk rezonansowych. Podobnie jak w propozycji Bosego i innych, tylko zarejestrowanie wyłącznie jednej emisji powoduje przeniesienie informacji kwantowej do odbiorcy. Jednak tym razem, w przeciwieństwie do propozycji Bosego i innych, informacja kwantowa nie ulegnie zniszczeniu w przypadku wykrycia dwóch emisji lub nie wykrycia żadnej. Ewolucja stanu całego układu pod nieobecność jakiegokolwiek pola laserowego jest dana równaniem (6.27). Jeśli nadawca nie zarejestruje żadnego fotonu w tym etapie, to układ przechodzi do stanu

$$|\Phi\rangle = -\alpha\varphi_1\varphi_2 e^{i\frac{3}{2}\delta_3(t_1+t_2)}|0010;110\rangle + \beta|0100;110\rangle.$$
(8.17)

To jest jeden z niepomyślnych przypadków. Początkowy stan, który nadawca chciał teleportować, jest zmodyfikowany przez czynniki fazowe, ale nie jest stracony. Taki zmodyfikowany stan początkowy jest przechowywany w drugim i trzecim atomie nadawcy. Zanim protokół będzie mógł być powtórzony nadawca musi przygotować swój pierwszy atom w stanie $|1\rangle$. W tym celu włącza on oba swoje lasery (L_A i L'_A) na czas $t_5 = \pi/(2\delta_4)$, wykonując operację (6.50). Podczas tej operacji oba lasery odbiorcy są wyłączone.

Jeśli ewolucja dana równaniem (6.27) zostanie przerwana przez emisję w czasie $t_j < t_D$, to zdarzenie takie odpowiadać będzie zadziałaniu na stan

całego układu operatorem emisji C_{\pm} . Postać tego operatora emisji jest dana wzorem 7.11, lecz ma zamiast czynnika ϵ inny czynnik ϵ_1 . Potem zmiana stanu przez ewolucje (6.27) będzie kontynuowana. Jeśli nadawca zarejestruje w tym etapie drugą emisję fotonu, to wówczas układ przejdzie do stanu

$$|\Phi\rangle = \alpha \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3^{-1} e^{i\delta_3(t_1 + 3t_2 - 3t_3)} |0100;000\rangle + \beta |0010;000\rangle. \quad (8.18)$$

Widać, że informacja kwantowa nie została stracona również i w tym drugim niepomyślnym przypadku. Przed powtórzeniem protokołu konieczne jest jednak przygotowanie przez nadawcę swojego pierwszego atomu w stanie $|1\rangle$ oraz przygotowanie przez odbiorcę jego obu atomów w stanie $|1\rangle$, przy użyciu operacji (6.50). Działania te wykonują w dwóch krokach. Najpierw, obaj włączają wszystkie swoje lasery (L_A , L'_A , L_B i L'_B) na czas $t_5 = \pi/(2\delta_4)$ i oświetlają swoje pierwsze atomy. Później odbiorca oświetla oboma laserami swój drugi atom przez czas t_5 , podczas gdy nadawca czeka z wyłączonymi laserami.

Jeżeli nie będzie drugiej emisji, to wtedy transfer kwantowej informacji zostanie wykonany, a układ znajdzie się w stanie

$$\begin{split} |\tilde{\Phi}\rangle &= \alpha \epsilon \varphi_1 \varphi_2^2 \varphi_3^2 e^{i\delta_3(\frac{7}{4}t_1 + 4t_2 + \frac{7}{2}t_3 + t_j)} |0100; 010\rangle \\ &- \beta \epsilon_1 |0100; 100\rangle + \alpha \epsilon_1 \varphi_1 \varphi_2 e^{i\frac{3}{2}\delta_3(t_1 + t_2)} |0010; 100\rangle \\ &+ \beta \epsilon \varphi_2 \varphi_3^3 e^{i\delta_3(\frac{3}{4}t_1 + t_2 + \frac{13}{2}t_3 + t_j)} |0010; 010\rangle \,. \end{split}$$
(8.19)

Po tym etapie nadawca dzieli kwantową informację z odbiorcą. Możliwe jest teraz również odesłanie tej informacji z powrotem do nadawcy, jednak taki przypadek nie będzie dalej rozpatrywany.

(iv) etap detekcji II

W czwartym etapie protokołu nadawca wykonuje pomiar stanu swojego trzeciego atomu. Podczas tego etapu odbiorca czeka z wyłączonymi laserami. Ten etap składa się z dwóch kroków.

(a) Najpierw, nadawca włącza laser L_A i wykonuje operacje (6.31) i (6.46), żeby przenieść stan trzeciego atomu na stan pola.

(b) Następnie nadawca wyłącza laser, a stan układu jest zmieniany według równania (6.27). Stan układu jest dany wówczas wektorem

$$\begin{split} |\tilde{\Phi}\rangle &= \alpha \epsilon \varphi_1 \varphi_2^2 \varphi_3^2 e^{i\delta_3(\frac{7}{4}t_1 + 4t_2 + \frac{7}{2}t_3 + t_j)} |0100; 010\rangle - \beta \epsilon_1 |0100; 100\rangle \\ &+ e^{i(\Delta_r + 3\delta_3)t_D} e^{-\kappa t_D} [i\beta \epsilon \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3^3 e^{i\delta_3(\frac{9}{4}t_1 + t_2 + \frac{13}{2}t_3 + t_j)} |0001; 010\rangle \\ &+ i\alpha \epsilon_1 \varphi_1^2 \varphi_2 e^{i\frac{3}{2}\delta_3(2t_1 + t_2)} |0001; 100\rangle] \,. \end{split}$$
(8.20)

Nadawca ponownie czeka przez czas t_D , wykonując pomiar stanu pól obu wnęk. Wykrycie emisji fotonu odpowiada zadziałaniu operatora emisji na stan całego układu (8.20). W tym przypadku układ przejdzie do stanu

$$|\Phi\rangle = \alpha \epsilon \epsilon_1 \varphi_1 \varphi_3^{-3} e^{i\delta_3(\frac{3}{4}t_1 + \frac{1}{2}t_2 - \frac{13}{2}t_3 - t_j)} |0000; 100\rangle + \beta |0000; 010\rangle.$$
(8.21)

W przeciwnym przypadku, gdy nadawca nie zarejestruje żadnego fotonu, to układ znajdzie się w stanie

$$|\Phi\rangle = -\alpha\epsilon\epsilon_1\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3^2 e^{i\delta_3(\frac{7}{4}t_1 + 4t_2 + \frac{7}{2}t_3 + t_j)}|0100;010\rangle + \beta|0100;100\rangle.$$
(8.22)

(v) etap odtwarzania

Ogólnie, może być potrzebne kilkukrotne powtórzenie protokołu zanim nadawca zarejestruje tylko jedną emisję w trzecim etapie. Łatwo można sprawdzić, że po \mathcal{N} powtórkach protokołu układ należący do odbiorcy znajdzie się w stanie $\alpha \theta |100\rangle_B + \beta |010\rangle_B$, jeśli w czwartym etapie zostanie wykryty jeden foton lub w stanie $\alpha \phi |010\rangle_B + \beta |100\rangle_B$, jeśli nie będzie w czwartym etapie żadnej emisji, gdzie

$$\phi = -\epsilon \epsilon_1 \alpha_1^{\mathcal{N}+1} \alpha_2^{\mathcal{N}+2} \alpha_3^2 \exp\left[\frac{i}{2} \delta_3 \left(\frac{7}{2} t_1 + 8t_2 + 7t_3 + 2t_j\right)\right] \mu_0^{\mathcal{N}_0} \mu_2^{\mathcal{N}_2},$$

$$\theta = \epsilon \epsilon_1 \alpha_1^{\mathcal{N}+1} \alpha_2^{\mathcal{N}} \alpha_3^{-3} \exp\left[\frac{i}{2} \delta_3 \left(\frac{3}{2} t_1 + t_2 - 13t_3 - 2t_j\right)\right] \mu_0^{\mathcal{N}_0} \mu_2^{\mathcal{N}_2}, \quad (8.23)$$

 $\mu_0 = -\exp[i\frac{3}{2}\delta_3(t_1+t_2)]$ i $\mu_2 = \alpha_3^{-1}\exp[i\delta_3(t_1+3t_2-3t_3)]$. Symbolami \mathcal{N}_0 i \mathcal{N}_2 oznaczono liczby powtórek spowodowanych przez nie zarejestrowanie żadnego fotonu bądź przez zarejestrowanie dwóch fotonów w trzecim etapie. W celu odtworzenia oryginalnej informacji kwantowej, odbiorca musi usunąć czynnik fazowy θ bądź ϕ . W przypadku nie zarejestrowania żadnej emisji w czwartym etapie, odbiorca musi oprócz usunięcia czynnika fazowego również wymienić amplitudy. Te działania są istotą piątego etapu protokołu. Podczas tego etapu oba lasery nadawcy są wyłączone.

W przypadku wystąpienia emisji w czwartym etapie odbiorca musi wykonać trzy kroki, żeby usunąć czynnik fazowy θ .

- (a) Po pierwsze, odbiorca oświetla laserem L_B swój pierwszy atom przez czas t_1 w celu wykonania operacji (6.31) i (6.46).
- (b) Następnie wyłącza laser i czeka przez taki czas t_{θ} , który spełnia warunek $-\theta \varphi_1^2 e^{i\Delta_r t_{\theta}} e^{i2\delta_3 t_1} = 1.$

(c) Ostatecznie ponownie włącza laser L_B i oświetla swój pierwszy atom przez czas t_1 . W ten sposób wykonane zostają operacje (6.32) i (6.46).

Jeżeli w czwartym etapie nie zostanie zarejestrowany żaden foton, to odbiorca musi wykonać cztery kroki, aby usunąć czynnik fazowy ϕ i wymienić amplitudy.

- (a) Najpierw włącza laser L_B i oświetla swój pierwszy atom przez czas t_1 . W ten sposób realizuje operacje (6.31) i (6.46).
- (b) Następnie oświetla laserem L_B swój drugi atom przez czas t_1 . Później laser ten zostaje wyłączony, a operacje (6.31) oraz (6.32) są ukończone.
- (c) W trzecim kroku odbiorca czeka z wyłączonymi laserami przez taki czas t_{ϕ} , żeby spełniony był warunek $\phi e^{i\Delta_r t_{\phi}} = 1$.
- (d) Ostatecznie odbiorca znowu włącza laser L_B i oświetla swój pierwszy atom przez czas t_1 , w ten sposób wykonując operacje (6.32) i (6.46).

Po tym ostatnim etapie protokołu system odbiorcy znajduje się w stanie: $\alpha |100\rangle_B + \beta |010\rangle_B$.

8.3 Badanie protokołu teleportacji z asekuracją

Przy śledzeniu zmian stanu całego układu podczas działania protokołu konieczne było wprowadzenie wielu przybliżeń. Niestety ich ilość jest zbyt duża by móc wyznaczyć wiarygodne wartości wierności i prawdopodobieństwa analitycznie. Dlatego użyteczność tego protokołu może być zbadana jedynie numerycznie. W tym celu znowu została wykorzystana metoda trajektorii kwantowych. Jak to przedstawiono w poprzednim rozdziale, zarówno wierność teleportowanego stanu jak i prawdopodobieństwo sukcesu zależą od modułów amplitud α i β stanu początkowego. Potrzebne jest zatem uśrednienie obu wielkości po wszystkich możliwych stanach początkowych. Dlatego w każdej trajektorii teleportowany był inny, wybrany losowo stan początkowy. Obliczenia te, jak i wszystkie wcześniejsze obliczenia numeryczne, przeprowadzone zostały przy wykorzystaniu hamiltonianu efektywnego (5.13). Proces teleportacji kończy się pomyślnie wtedy, gdy wykrycia emisji mają miejsce tylko podczas drugiego kroku etapu przygotowania, etapu detekcji I lub drugiego kroku etapu detekcji II. Jeśli detektory zasygnalizuja wykrycie fotonu podczas trwania innych kroków protokołu, to stan początkowy zostanie stracony. Oczywiście trajektorie, w których stan początkowy jest zniszczony, są liczone jako niepomyślne. Prawdopodobieństwo, że teleportacja zakończy się sukcesem można przybliżyć stosunkiem liczby udanych trajektorii do liczby wszystkich trajektorii. Stan początkowy może być również zniszczony przez wystąpienie spontanicznej emisji z poziomu wzbudzonego, któregoś z atomów. Jak wspomniano wcześniej, układ stosowany w teleportacji nie umożliwia wykrycia spontanicznej emisji atomowej i w związku z tym takie przypadki mogą być mylnie brane za pomyślne. Z tego powodu w eksperymencie zmniejszy się średnia wierność otrzymanego stanu. Żeby opis teoretyczny bardziej odpowiadał realnej sytuacji, należy uśrednić wierność po wszystkich trajektoriach, w których pomiar wskazywał na pomyślne zakończenie teleportacji. Z tego samego względu zamiast wyznaczać nieosiągalną doświadczalnie wielkość, jaką jest średnie prawdopodobieństwo sukcesu, lepiej jest obliczyć średnie prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru. Prawdopodobieństwo to można przybliżyć stosunkiem liczby trajektorii z pomiarami wskazującymi na sukces do liczby wszystkich trajektorii.

Numeryczne wyniki wskazały konieczność narzucenia na parametry bardziej wymagających ograniczeń. Niestety przy tak długich czasach operacji oświetlania atomu laserem, jak na przykład czas t_2 , warunek $\Delta \gg \Omega$ nie jest wystarczający, by analityczny wzór na δ_1 pozwolił na precyzyjne wyznaczenie wartości czynników fazowych. W rezultacie średnia wierność teleportowanego stanu drastycznie była zmniejszana. Dlatego do prawidłowego działania protokołu parametry muszą spełniać następujący zestaw założeń: $(10^{-1}\Delta \gg \Omega \gg \Omega' \gg g; \Delta' \gg \gamma; \delta_5 \gg \kappa \gg \gamma s_1; \Delta_r = \delta_1)$. Łatwo sprawdzić, że poniżej przedstawione wartości spełniają te warunki

$$(\Delta; \Omega; \Omega'; g; \gamma; \kappa)/2\pi = (2 \cdot 10^3; 10; 0, 84; 0, 07; 10^{-4}; 10^{-7})$$
MHz. (8.24)

W celu uczynienia średnich wartości dobrymi przybliżeniami badanych wielkości wygenerowano aż 30 000 trajektorii. Otrzymana została średnia wierność równa około 0,98 oraz średnie prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru równe 0,94. Obliczenia pokazały, że dla tych parametrów prawdopodobieństwo mylnego przyjęcia przypadku ze spontaniczną emisją atomową za pomyślny jest równe tylko 0, 1%. Jak widać, nadmiarowe kodowanie sprawia, że prawdopodobieństwo zachowania oryginalnego stanu jest znacznie większe, niż w protokole zaproponowanym przez Bosego i innych. W tym protokole w przypadku nie zarejestrowania dokładnie jednej emisji w etapie detekcji I, stan początkowy nie zostaje zniszczony i cały protokół może być powtarzany, dopóki w tym etapie nie zostanie wykryty dokładnie jeden foton. Wykres 8.6 przedstawia wzrost prawdopodobieństwa tego, że pomiar wskaże na powodzenie po liczbie powtórek nie większej od \mathcal{N} . Jak widać, prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru dla pojedynczej próby nie przekracza 1/2, podobnie jak to było w modelu Bosego i innych. Ponadto widać,



Rysunek 8.6: Zależność średniego prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru od liczby powtórzeń protokołu \mathcal{N} .

że prawdopodobieństwo to szybko dąży do nasycenia i dlatego protokół nie potrzebuje być wiele razy powtarzany.

Większość operacji w etapie kodowania jest wykonywanych w sposób przybliżony. Również operacje przywracające atomy do stanu $|1\rangle$ nie są przeprowadzane dokładnie. Jest zatem oczywiste, że te niedoskonałości będą się przy każdej powtórce protokołu kumulować i powodować zmniejszenie średniej wierności teleportowanego stanu. W celu sprawdzenia, jak bardzo pogarsza się średnia wierność przez nie odrzucanie przypadków ze zbyt duża liczbą powtórzeń, wykreślona została na rysunku 8.7 zależność średniej wierności od maksymalnej dopuszczonej w eksperymencie liczby powtórzeń. Widać, że faktycznie średnia wierność maleje przy zwiekszaniu \mathcal{N} . Dlatego jeśli potrzebna jest duża wartość średniej wierności, to można to osiągnąć przez odrzucenie przypadków, w których sukces został osiągnięty po zbyt wielu powtórzeniach protokołu. Oczywiście średnia wierność wzrasta wtedy kosztem średniego prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru. Warto zatem wykreślić zależność średniej wierności od prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru. Zależność ta została wykreślona na rysunku 8.8. Jak widać z tego wykresu, wzrosty wartości średniej wierności i odpowiadające im spadki wartości średniego prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru są większe przy małych wartościach maksymalnej liczby powtórzeń. Kiedy zaś liczba \mathcal{N} jest duża, to punkty odpowiadające jej kolejnym wartościom stają się nierozróżnialne. W związku z tym protokół będzie działać tak samo dobrze z



Rysunek 8.7: Zależność średniej wierności od maksymalnej liczby powtórek.



Rysunek 8.8: Średnia wierność jako funkcja średniego prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru. Punkty odpowiadają ustaleniu maksymalnej liczby powtórek na $\mathcal{N}=0,1,\ldots$

ograniczeniem liczby powtórek do sześciu, jak i bez ograniczeń, co widać na rysunku 8.8.

Rozważania analityczne wymusiły zastosowanie założeń bardzo ograniczających swobodę wyboru parametrów. Wartości parametrów zgodne z tymi założeniami są niestety nieosiagalne przy obecnej technice. Wartość κ z zestawu parametrów (8.24) jest mniejsza o wiele rzędów wielkości od wartości dostępnych doświadczalnie [73–77, 116]. Ponadto bardzo mała wartość κ prowadzi do bardzo długich czasów teleportacji, o wiele rzędów wielkości większych od osiąganych eksperymentalnie czasów utrzymywania stanu splątanego atomów. Dlatego warto osłabić ograniczenia narzucane przez rachunki analityczne i sprawdzić, czy nie da się przybliżyć wartości parametrów do wielkości dostępnych doświadczalnie. Po pierwsze, można wyznaczyć wartość δ_1 numerycznie, co pozwala wrócić do warunków ($\Delta \gg \Omega \gg \Omega' \gg$ $g; \Delta' \gg \gamma; \delta_5 \gg \kappa \gg \gamma s_1; \Delta_r = \delta_1$). Po drugie, warto użyć krótszej wersji drugiego kroku etapu kodowania. Taka sama operacja może być wykonana przez jednoczesne użycie operacji (6.31), (6.32), (6.41) oraz (6.46). Wtedy nadawca musi oświetlać swój trzeci atom przez czas, spełniający następujące dwa warunki: $t_2\delta_5 = \pi/2 + 2m_1\pi$ oraz $t_2\sqrt{2}\delta_5 = 3\pi/2 + 2m_2\pi$. Przybliżone rozwiązanie można znaleźć dla $m_1 = 1$ i $m_2 = 1$. To przybliżenie jest trochę mniej precyzyjne, ale skraca cały etap kodowania niemal dwukrotnie. Krótszy czas etapu, w którym nie może nastąpić żadna emisja oznacza, że może być przyjęta większa wartość κ bez zmniejszania prawdopodobieństwa sukcesu. Natomiast dla zrównoważenia redukcji średniej wierności, spowodowanej przyjęciem gorszego przybliżenia, policzone zostały numerycznie optymalne długości czasów t_2 i t_3 . Wszystkie te zabiegi pozwalają wybrać następujący zestaw parametrów

$$(\Delta; \Omega; \Omega'; g; \gamma; \kappa)/2\pi = (2 \cdot 10^3; 80; 6, 3; 0, 5; 10^{-4}; 1, 5 \times 10^{-5})$$
MHz. (8.25)

Jak widać, κ nadal jest wiele rzędów wielkości mniejsze od wartości dostępnych w obecnych wnękach rezonansowych, ale dalsze zwiększanie Ω zmniejsza średnią wierność. Nie można również zwiększyć κ bez zwiększania Ω , ponieważ prowadzi to do zmniejszania średniego prawdopodobieństwa sukcesu. Nie daje się zatem zbliżyć bardziej tej wielkości do realnych wartości, ale można bardziej skrócić czas trwania całego protokołu bez zwiększania κ . Wystarczy skorzystać z wniosku z rozdziału 7.2 i zamiast przyjmować czas etapów detekcji $t_D = 10\kappa^{-1}$, ustalić $t_D = 4\kappa^{-1}$.

Stosując wszystkie opisane powyżej techniki, wygenerowano 10 000 trajektorii dla parametrów (8.25). Otrzymana została średnia wierność równa 0,97 i średnie prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru równe 0,90. Prawdopodobieństwo błędnego przyjęcia przypadku z atomową emisją spontaniczną za pomyślny wyniosło około 1%. Również policzono, że średni czas trwania całego protokołu jest równy około 0,1 s. Niedawno Roos i inni [96] poinformowali o zaobserwowaniu czasu trwania splątania atomów przekraczającego 0,1 s.

Na koniec należy jeszcze zbadać wpływ nieefektywności detektorów na proces teleportacji atomowych stanów splątanych z asekuracją. Niestety w tym protokole jest bardzo wiele kroków, które zależą od wyników pomiaru. Błędne wyniki pomiaru, spowodowane nieefektywnym pomiarem, prowadzą do wykonywania przez nadawcę i odbiorcę niewłaściwych operacji. W wyniku tego otrzymany zostaje losowy stan końcowy, który w dodatku może zostać uznany za właściwą informację kwantową. Łatwo jest zatem przewidzieć, że nieefektywność detektorów zmniejszać będzie średnią wierność. Wykres 8.9 przedstawia zależność średniej wierności od nieefektywności de-



Rysunek 8.9: Wpływ nieefektywności detektorów na średnią wierność. Każdy punkt jest średnią policzoną z 2000 trajektorii dla parametrów (8.25).

tektorów. Z wykresu widać, że protokół jest bardzo czuły na nieefektywność detektorów. Nawet dla najwyższej obecnie dostępnej efektywności $\eta = 88\%$, średnia wierność wyniosła zaledwie 0,63. Wynik ten otrzymany został po uśrednieniu wierności otrzymanych z 10 000 trajektorii wygenerowanych dla parametrów (8.25).

Trudno jest natomiast przewidzieć, czy w tak skomplikowanym protokole wpływ nieefektywności detektorów na średnie prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru będzie zaniedbywalny, tak jak to było w poprzednich protokołach. Dlatego wykreślona została na rysunku 8.10 zależność średniego prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru od nieefektywności detektorów.



Rysunek 8.10: Zależność średniego prawdopodobieństwa pomyślnego pomiaru od nieefektywności detektorów. Każdy punkt został wyznaczony z 2000 trajektorii policzonych dla parametrów (8.25).

Jak widać, nawet przy tak wielu krokach zależnych od pomiarów, efektywność wykrywania fotonów nie ma wpływu na średnie prawdopodobieństwo pomyślnego pomiaru.

Rozdział 9

Zakończenie

Podstawowym celem pracy było przebadanie i uogólnienie metody teleportacji stanów atomowych z wykorzystaniem kwantowej interferencji pól wychodzących z dwóch rezonatorów.

Pierwszym osiągnięciem autora niniejszej pracy jest uogólnienie matematycznego modelu do przypadku niezerowych wartości współczynnika emisji spontanicznej z poziomu wzbudzonego atomów. To uogólnienie pozwoliło udowodnić autorowi, że konieczne jest narzucenie na parametry dodatkowego ograniczenia. Ograniczenie to wymaga, by iloczyn parametru nasycenia poziomu wzbudzonego s i współczynnika emisji spontanicznej γ był dużo mniejszy od współczynnika tłumienia modu wnęki κ . Bose i inni [19] uznali, że ustalenie odstrojenia od rezonansu Δ dużo większego od γ wystarcza, by zaniedbać zjawisko atomowej emisji spontanicznej i wybrali wartości parametrów takie, że γs jest niemalże dokładnie równe κ . Jednak wpływ atomowej emisji spontanicznej na stan układu zależy od iloczynu γs , co widać już w wyrażeniu na niehermitowski hamiltonian efektywny. Ponieważ czas trwania etapu detekcji jest celowo wybrany na tyle duży, aby czynnik tłumiący κ miał silny wpływ na stan układu, to dla parametrów Bosego i innych, atomowa emisja spontaniczna musi wpływać równie silnie na ten stan. Autor niniejszej pracy wykazał, że przyjęcie parametrów nie spełniających $\gamma s \ll \kappa$, prowadzi do drastycznego zmniejszenia prawdopodobieństwa sukcesu. W przypadku wartości parametrów wybranych przez Bosego i innych [19] to zmniejszenie jest aż dwukrotne.

Drugim osiągnięciem autora tej pracy jest opracowanie modelu matematycznego, umożliwiającego wykonanie większej ilości operacji na stanie układu. Model ten pozwolił na zrealizowanie drugiego celu niniejszej rozprawy, którym było przebadanie możliwości zastosowania nadmiarowego kodowania w teleportacji stanów atomowych. W tym celu autor zaprojektował algorytm kodujący informację kwantową zawartą w atomie do splątanego stanu dwóch kubitów. Zastosowanie nadmiarowości zawartej w tym splątanym stanie dwóch kubitów do idealnej komunikacji zaproponował van Enk i inni [97]. Bose i inni [19] uznali ten szczególny stan za doskonały sposób ochrony informacji kwantowej przed utratą spowodowaną niemożnością wykonania pełnego pomiaru w bazie Bella. Jednak ani van Enk i inni, ani Bose i inni nie podali algorytmu realizującego kodowanie do tego stanu splątanego. O ile wiadomo autorowi niniejszej rozprawy, zaproponowany przez niego algorytm nadmiarowego kodowania jest pierwszym tego typu. Autor wykazał ponadto, że nadmiarowość, zawarta w stanie splątanym dwóch kubitów, nie zabezpiecza w pełni informacji kwantowej w modelu teleportacji Bosego i innych. W jednym, na cztery możliwe, wyniku połączonego pomiaru i tak informację kwantową się traci. Fakt ten jest w sprzeczności z twierdzeniem Bosego i innych, zwłaszcza że ich model nie pozwala na wyeliminowanie wspomnianej wady.

Autor niniejszej pracy rozbudował również układ teleportacyjny tak, aby umożliwić teleportację stanów splątanych dwóch atomów. W tym celu autor zaprojektował również protokół realizujący taką teleportację z prawdopodobieństwem sukcesu równym około 50%. Już osiągniecie takiej wartości prawdopodobieństwa jest istotnym osiagnięciem, ponieważ teleportowanie stanu splątanego dwóch atomów poprzez dwukrotne powtórzenie protokołu Bosego i innych ma dwa razy mniejsze szanse powodzenia. Najistotniejsza cecha zaprojektowanego przez autora protokołu jest jednak wykorzystanie nadmiarowości, pozwalające w tym przypadku na uchronienie informacji kwantowej przed każdym niepomyślnym wynikiem pomiaru. Protokół ten został dokładnie przebadany numerycznie. Uzyskano wysokie, 94% prawdopodobieństwo tego, że po kilku powtórkach teleportacja zakończy się powodzeniem. Autor zbadał również wpływ nieefektywności detektorów na zaproponowany przez siebie protokół teleportacji stanów splątanych. Niestety otrzymane wyniki, świadczą o tym, że protokół ten jest niezwykle czuły na nieefektywność detektorów. Nieefektywny pomiar silnie wpływa na średnia wierność teleportowanego stanu. Przed tą niedoskonałością rzeczywistych detektorów wprowadzona do stanu nadmiarowość niestety nie chroni. Z drugiej strony nieefektywność pomiaru nie ma wpływu na prawdopodobieństwo uzyskania wyniku pomiaru sugerującego pomyślną teleportację.

Dodatkowym osiągnięciem autora tej pracy jest zaprojektowanie protokołu wytwarzającego stany splątane odległych atomów z prawdopodobieństwem sukcesu bliskim jedności. Protokół ten został zaprojektowany na potrzeby protokołu do teleportowania atomowych stanów splątanych, ale również sam w sobie jest niezwykle interesujący, ponieważ realizuje bardzo ważne zadanie. Takie dodatkowe zastosowanie układu teleportującego stany atomowe zaproponowane zostało również przez Bosego i innych [19]. Jednak ich protokół miał zaledwie 50% szanse powodzenia. Co ciekawe, Browne i inni [111] uznali, że silne pompowanie ogranicza prawdopodobieństwo pomyślnego wytworzenia splątanej pary atomów w takim układzie do właśnie 50%. Tymczasem, jak wspomniano, autor niniejszej pracy opracował protokół osiągający przy silnym pompowaniu efektywność równą 100%. Jest to dowodem na to, że protokół jest tak samo ważny jak samo urządzenie. Zresztą podobnie jest w klasycznej informatyce, gdzie oprogramowanie jest równie ważne jak sprzęt komputerowy.

Autor niniejszej pracy uprościł również rachunki i wprowadził formalizm operacji, dających się wykonać na stanie układu. Zaprojektowanie protokołu do teleportowania stanów splątanych oraz protokołu do wytwarzania stanów splątanych było nie tylko możliwe, ale i stosunkowo łatwe właśnie dzięki tej prostej formie zapisu ewolucji czasowych stanu układu. Autor tej pracy wierzy, że formalizm ten może być bardzo pomocny także przy projektowaniu wielu innych protokołów i algorytmów.

Bibliografia

- C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres i W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky i N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [3] D. Boschi, S. Branca, F. D. Martini, L. Hardy i S. Popescu, Phys. Rev. Lett. 80, 1121 (1998).
- [4] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter i Anton Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).
- [5] Y. H. Kim, S. P. Kulik i Y. H. Shih, Phys. Rev. Lett. 86, 1370 (2001).
- [6] J.-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs i A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. 86, 4435 (2001).
- [7] E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu i F. D. Martini, Phys. Rev. Lett. 88, 070402 (2002).
- [8] T. Jennewein, G. Weihs, J.-W. Pan i A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. 88, 017903 (2002).
- [9] I. Marcikic, H. D. Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden i N. Gisin, Nature 421, 509 (2003).
- [10] D. Fattal, E. Diamanti, K. Inoue i Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. 92, 037904 (2004).
- [11] Z. Zhao, Y.-A. Chen, A.-N. Zhang, T. Yang, H. J. Briegel i J.-W. Pan, Nature 430, 54 (2004).
- [12] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble i E. S. Polzik, Science 282, 706 (1998).
- [13] S. A. Babichev, J. Ries i A. I. Lvovsky, Europhysics Letters 64, 1 (2003).

- [14] W. P. Bowen, N. Treps, B. C. Buchler, R. Schnabel, T. C. Ralph, H. A. Bachor, T. Symul i Ping Koy Lam, Phys. Rev. A 67, 032302 (2003).
- [15] T. C. Zhang, K. W. Goh, C. W. Chou, P. Lodahl i H. J. Kimble, Phys. Rev. A 67, 033802 (2003).
- [16] M. A. Nielsen, E. Knill i R. Laflamme, Nature **396**, 52 (1998).
- [17] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James i R. Blatt, Nature 429, 734 (2004).
- [18] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri i D. J. Wineland, Nature 429, 737 (2004).
- [19] S. Bose, P. L. Knight, M. B. Plenio i V. Vedral, Phys. Rev. Lett. 83, 5158 (1999).
- [20] N. Lütkenhaus, J. Calsamiglia i K. A. Suominen, Phys. Rev. A 59, 3295 (1999).
- [21] D. Vitali, M. Fortunato i P. Tombesi, Phys. Rev. Lett. 85, 445 (2000).
- [22] D. Deutsch, Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- P. W. Shor, Proc. 35nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, red. S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press, 1994), p. 124.
- [24] L. Grover, Proceedings of 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 1996, p. 212.
- [25] L. Grover, Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [26] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood i I. L. Chuang, Nature 414, 883 (2001).
- [27] E. Schrödinger, Die Naturwissenschaften 48, 807 (1935).
- [28] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964).
- [29] M. Hirvensalo, Algorytmy kwantowe (Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne S.A., Warszawa, 2004).

- [30] K. Giaro i M. Kamiński, *Wprowadzenie do algorytmów kwantowych* (Akademicka Oficyna Wydawcza EXIT, Warszawa, 2003).
- [31] B. M. Terhal, M. M. Wolf i A. C. Doherty, Postępy Fizyki 56, 75 (2005).
- [32] M. Horodecki, Postępy Fizyki **53D**, 35 (2002).
- [33] L. Jacak, Postępy Fizyki **53D**, 72 (2002).
- [34] R. P. Feynman, Feynmana wykłady z fizyki (PWN, Warszawa, 1972), Tom III.
- [35] P. Kok, Ph.D. thesis, University of Wales, Bangor, 2001, quantph/0102070.
- [36] S. J. Freedman i J. S. Clauser, Phys. Rev. Lett. 28, 938 (1972).
- [37] A. Aspect, J. Dalibard i G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, 1804 (1982).
- [38] W. Titel, J. Brendel, H. Zbinden i N. Gisin, Phys. Rev. Lett. 81, 3563 (1998).
- [39] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter i A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. 81, 5039 (1998).
- [40] A. Aspect, P. Grangier i G. Roger, Phys. Rev. Lett. 47, 460 (1981).
- [41] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko i Y. H. Shih, Phys. Rev. Lett. 75, 4337 (1995).
- [42] M. A. Nielsen i I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [43] D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A 51, 1015 (1995).
- [44] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. Smolin i H. Weinfurter, Phys. Rev. A 52, 3457 (1995).
- [45] D. E. Knuth, *Sztuka programowania* (Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2002), Tom I.
- [46] A. M. Turing, Proc. Lond. Math. Soc. 2 42, 230 (1936).
- [47] A. Church, Am. J. Math. 58, 345 (1936).

- [48] W. K. Wootters i W. H. Żurek, Nature **299**, 802 (1982).
- [49] D. Dieks, Phys. Lett. A **92**, 271 (1982).
- [50] V. Bužek i M. Hillery, Phys. Rev. A 54, 1844 (1996).
- [51] V. Bužek, S. L. Braunstein, M. Hillery i D. Bruss, Phys. Rev. A 56, 3446 (1997).
- [52] M. Hillery i V. Bužek, Phys. Rev. A 56, 1212 (1997).
- [53] V. Bužek, V. Vedral, M. Plenio. P. L. Knight i M. Hillery, Phys. Rev. A 55, 3327 (1997).
- [54] V. Bužek i M. Hillery, Phys. Rev. Lett. **81**, 5003 (1998).
- [55] S. Massar i S. Popescu, Phys. Rev. A **61**, 062303 (2000).
- [56] D. Bures, Transactions of the American Mathematical Society 135, 199 (1969).
- [57] R. Jozsa i B. Schumacher, Journal of Modern Optics 41, 2343 (1994).
- [58] A. Uhlmann, Reports on Mathematical Physics 9, 273 (1976).
- [59] D. Bruss, A. Ekert i C. Macchiavello, Phys. Rev. Lett. 81, 2598 (1998).
- [60] A. Lamas-Linares, C. Simon, J. C. Howell i D. Bouwmeester, Science 296, 712 (2002).
- [61] C. E. Shannon, Bell System Tech. J. 27, 379-423, 623-656 (1948).
- [62] A. Wehrl, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).
- [63] P. W. Shor, Phys. Rev. A 52, 2493 (1995).
- [64] A. M. Steane, Proc. R. Soc. London A **452**, 2551 (1996).
- [65] C. Gobby, Z. L. Yuan i A. J. Shields, Appl. Phys. Lett. 84, 3762 (2004).
- [66] G. Brassard, S. Braunstein i R. Cleve, Physica D **120**, 43 (1998).
- [67] H. J. Carmichael, Statistical Methods in Quantum Optics 1 (Springer, Berlin, 1999).
- [68] M. Orszag, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 2000).

- [69] V. Gorini, A. Kossakowski i E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. 17, 821 (1976).
- [70] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. 48, 119 (1976).
- [71] A. Einstein, Phys. Z. 18, 121 (1917).
- [72] E. Schrödinger, Br. J. Philos. Sci. **III**, 109 (1952).
- [73] A. Kuhn, M. Hennrich i G. Rempe, Phys. Rev. Lett. 89, 067901 (2002).
- [74] J. McKeever, J. R. Buck, A. D. Boozer, A. Kuzmich, H. C. Nägerl, D. M. Stamper-Kurn i H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **90**, 133602 (2003).
- [75] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck i H. J. Kimble, Nature 425, 268 (2003).
- [76] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich i H. J. Kimble, Science **303**, 1992 (2004).
- [77] G. R. Guthöhrlein, M. Keller, K. Hayasaka, W. Lange i H. Walther, Nature 414, 49 (2001).
- [78] J. Kim, Y. Yamamoto i H. H. Hogue, Appl. Phys. Lett. **70**, 2852 (1997).
- [79] S. Takeuchi, J. Kim, Y. Yamamoto i H. H. Hogue, Appl. Phys. Lett. 74, 1063 (1999).
- [80] J. Kim, S. Takeuchi, Y. Yamamoto i H. H. Hogue, Appl. Phys. Lett. 74, 902 (1999).
- [81] H. J. Carmichael, S. Singh, R. Vyas i P. R. Rice, Phys. Rev. A 39, 1200 (1989).
- [82] P. L. Kelley i W. H. Kleiner, Phys. Rev. **136**, A316 (1964).
- [83] H. J. Carmichael, An Open Systems Approach to Quantum Optics (Springer, Berlin, 1993).
- [84] M. B. Plenio i P. L. Knight, Rev. Mod. Phys. **70**, 101 (1998).
- [85] L. Mandel i E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), Rozdz. Quantum correlations and photon statistics.

- [86] G. Chimczak, R. Tanaś i A. Miranowicz, Phys. Rev. A 71, 032316 (2005).
- [87] G. Chimczak, Phys. Rev. A **71**, 052305 (2005).
- [88] H. Haken, Światło (PWN, Warszawa, 1993).
- [89] B. Buck i C. V. Sukumar, Phys. Lett. A 81, 132 (1980).
- [90] S. Singh, Phys. Rev. A **25**, 3206 (1982).
- [91] P. L. Knight, Phys. Scr. **T12**, 51 (1986).
- [92] R. R. Puri i R. K. Bullough, J. Opt. Soc. Am. B 5, 2021 (1988).
- [93] S. J. D. Phoenix i P. L. Knight, J. Opt. Soc. Am. B 7, 116 (1990).
- [94] M. Alexanian i S. K. Bose, Phys. Rev. A 52, 2218 (1995).
- [95] G. Chimczak i R. Tanaś, J. Opt. B 4, 430 (2002).
- [96] C. F. Roos, G. P. T. Lancaster, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, S. Gulde, C. Becher, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler i R. Blatt, Phys. Rev. Lett. 92, 220402 (2004).
- [97] S. J. van Enk, J. I. Cirac i P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 78, 4293 (1997).
- [98] X. X. Yi, X. H. Su i L. You, Phys. Rev. Lett. **90**, 097902 (2003).
- [99] M. Feng, Phys. Rev. A 66, 054303 (2002).
- [100] A. Beige, D. Braun, B. Tregenna i P. L. Knight, Phys. Rev. Lett. 85, 1762 (2000).
- [101] E. Jané, M. B. Plenio i D. Jonathan, Phys. Rev. A 65, 050302(R) (2002).
- [102] B. Tregenna, A. Beige i P. L. Knight, Phys. Rev. A 65, 032305 (2002).
- [103] P. G. Kwiat i H. Weinfurter, Phys. Rev. A 58, R2623 (1998).
- [104] Y. L. Lim, A. Beige i L. C. Kwek, quant-ph/0408043.
- [105] T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac i P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 75, 3788 (1995).
- [106] L. M. Duan i H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **90**, 253601 (2003).

- [107] A. Miranowicz, S. K. Özdemir, Y. X. Liu, M. Koashi, N. Imoto i Y. Hirayama, Phys. Rev. A 65, 062321 (2002).
- [108] H. W. Lee, Phys. Rev. A **64**, 014302 (2001).
- [109] L. M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac i P. Zoller, Nature 414, 413 (2001).
- [110] C. Cabrillo, J. I. Cirac, P. García-Fernández i P. Zoller, Phys. Rev. A 59, 1025 (1999).
- [111] D. E. Browne, M. B. Plenio i S. F. Huelga, Phys. Rev. Lett. 91, 067901 (2003).
- [112] X.-L. Feng, Z.-M. Zhang, X.-D. Li, S.-Q. Gong i Z.-Z. Xu, Phys. Rev. Lett. 90, 217902 (2003).
- [113] C. Simon i W. T. M. Irvine, Phys. Rev. Lett. **91**, 110405 (2003).
- [114] S. Clark, A. Peng, M. Gu i S. Parkins, Phys. Rev. Lett. 91, 177901 (2003).
- [115] X. B. Zou, K. Pahlke i W. Mathis, Phys. Rev. A 68, 024302 (2003).
- [116] M. Hennrich, T. Legero, A. Kuhn i G. Rempe, Phys. Rev. Lett. 85, 4872 (2000).