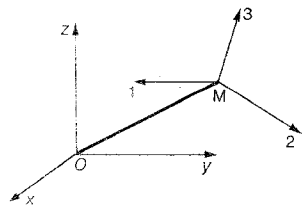
ROZDZIAŁ I

ELEMENTY RACHUNKU WEKTOROWEGO I TENSOROWEGO

1. UKŁADY ODNIESIENIA

Własności przestrzenne ciał materialnych opisujemy zwykle w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Aby opisać procesy fizykalne zachodzące w przestrzeni, należy ustalić układy odniesienia. Wybór układu współrzędnych jest w zasadzie dowolny i dokonujemy go na ogół tak, aby najwygodniej i jednoznacznie opisać stan układu fizycznego lub zachodzącego w nim procesu. Najczęściej wygodnie jest posługiwać się w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej układami współrzędnych *prostokątnych kartezjańskich*. Układ współrzędnych kartezjańskich $Oxyz$ związany z ciałem materialnym znajdującym się



Rys. I.1. Nieruchomy kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$ i przesunięty o odległość OM ruchomy układ współrzędnych M123 o tej samej orientacji przestrzennej (prawoskrętnej)

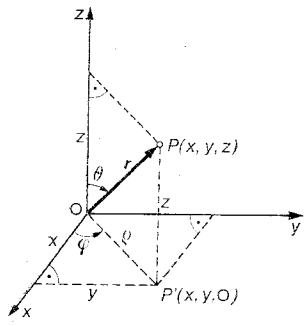
w spoczynku nazywamy *układem nieruchomym* (stałym) lub *laboratoryjnym*, a układ M123 związany z mikroukładem (atomem lub molekułą) danego ciała — *układem ruchomym* lub *molekularnym*. Stosować będziemy jedynie *prawoskrętne układy* współrzędnych, tj. kierunek osi Oz względem osi Ox i Oy określa reguła śruby prawoskrętnej. O dwóch układach współrzędnych tego samego rodzaju, np. prawoskrętnych lub lewoskrętnych, mówimy, że zgodnie orientują przestrzeń (rys. I.1). Współrzędne punktu w układzie nieruchomym $Oxyz$ oznaczać będziemy przez $x_x=x$, $x_y=y$, $x_z=z$

lub krótko x_i, gdzie łaciński wskaźnik i, zwany *wskaźnikiem wolnym*, przebiega w trójwymiarowej przestrzeni wartości x, y, z. Podobnie w układzie molekularnym M123 współrzędne punktu oznaczać będziemy przez x_1, x_2, x_3, czyli krótko x_α, gdzie grecki wskaźnik α przebiega swoje wartości 1, 2, 3.

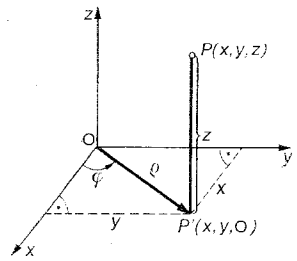
1.1. Współrzędne kuliste (sferyczne)

Obierzmy w przestrzeni, z danym w niej układem współrzędnych $Oxyz$, dowolny punkt $P(x, y, z)$ oraz jego rzut $P'(x, y, z)$ na płaszczyznę xOy (rys. I.2). Trójkę liczb r, θ, φ, takich że:

$$\infty > r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$



Rys. I.2. Układ współrzędnych sferycznych



Rys. I.3. Układ współrzędnych walcowych

nazywamy *współrzędnymi sferycznymi punktu P*, przy czym, ponieważ $\rho = r \sin\theta$, mamy następujące związki wyrażające współrzędne prostokątne kartezjańskie x, y, z za pomocą współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \tag{1a}$$

Kąty θ i φ nazywamy odpowiednio *kątem biegunowym* i *kątem azymutalnym* promienia wodzącego r. Dla elementu objętościowego mamy:

$$dV = r^2 dr\, d\Omega, \tag{1b}$$

gdzie

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{1c}$$

jest elementarnym kątem bryłowym.

1.2. Współrzędne walcowe (cylindryczne)

Trójkę liczb ρ, φ, z takich, że (rys. I.3):

$$\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad z \geqslant 0,$$

nazywamy *współrzędnymi walcowymi punktu* $P(x, y, z)$, które związane są ze współ-

rzędnymi prostokątnymi następująco:

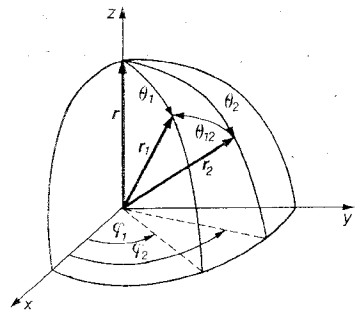
$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi, \tag{1d}$$
$$z = z.$$

Dla elementu objętościowego mamy:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \tag{1e}$$

1.3. Kąt między promieniami wodzącymi

Jeśli położenie punktu P_1 określone jest przez współrzędne sferyczne r_1, θ_1, φ_1, zaś punktu P_2 – przez współrzędne r_2, θ_2, φ_2, to wierzchołki promieni wodzących $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1$, i $\boldsymbol{r}_2$



Rys. I.4. Kąt między dwoma promieniami wodzącymi we współrzędnych sferycznych

(rys. I.4) opiszą trójkąt sferyczny, do którego stosuje się podstawowy wzór cosinusów trygonometrii sferycznej:

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1). \tag{1f}$$

2. TRANSFORMACJE ORTOGONALNE

W fizyce często spotykamy się z zadaniem przejścia od jednego układu współrzędnych, np. laboratoryjnego *Oxyz*, do innego, np. molekularnego układu M123. Przyjmując dla prostoty, że oba układy mają wspólny początek *O*, możemy napisać następujące równanie transformacyjne:

$$x_i = c_{i\alpha} x_\alpha, \tag{2}$$

gdzie współczynniki liniowego przekształcenia $c_{i\alpha}$ w przypadku kartezjańskich układów prostokątnych są cosinusami kątów między osiami i oraz α obu układów, $c_{i\alpha} = \cos(i, \alpha)$, czyli są *cosinusami kierunkowymi*.

Tutaj oraz dalej stosować będziemy umowę sumacyjną Einsteina orzekającą, że ilekroć w jakimś wyrażeniu powtarza się dwukrotnie dolny wskaźnik, oznacza to sumowanie

względem tego wskaźnika po wszystkich jego wartościach. W równaniu (2) α jest *wskaźnikiem sumacyjnym* przebiegającym kolejno wartości 1, 2, 3, wobec czego mamy:

$$x_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + c_{i3} x_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha} x_\alpha . \tag{2a}$$

Jak widzimy, na mocy umowy Einsteina opuszczamy po prostu znak sumowania. Oczywiste jest przy tym, że powtarzający się w równaniu (2) wskaźnik α, oznaczający zgodnie z (2a) sumowanie, może być zastąpiony przez dowolną inną literę, np. β lub γ. Wskaźniki sumacyjne α nazywamy często *wskaźnikami związanymi* (niemymi lub ślepymi), natomiast występujący jednokrotnie wskaźnik i nazywamy *wskaźnikiem wolnym*.

Analogicznie do równania (2), określającego przejście od układu laboratoryjnego do układu molekularnego, możemy napisać transformację odwrotną:

$$x_\alpha = c_{\alpha i} x_i , \tag{3}$$

pozwalającą na przejście od układu molekularnego M123 do laboratoryjnego *Oxyz*. Między współczynnikami transformacji (2) i (3) zachodzi równość:

$$c_{i\alpha} = c_{\alpha i} .$$

Transformację (3) możemy przedstawić tabelką:

α \ i	x	y	z
1	c_{1x}	c_{1y}	c_{1z}
2	c_{2x}	c_{2y}	c_{2z}
3	c_{3x}	c_{3y}	c_{3z}

(3a)

zawierającą 9 cosinusów kierunkowych; np. cosinusy kierunkowe osi M1 względem osi *Ox*, *Oy*, *Oz* są c_{1x}, c_{1y}, c_{1z}.

Cosinusy kierunkowe spełniają warunki ortonormalizacji:

$$c_{i\alpha} c_{j\alpha} = c_{\alpha i} c_{\alpha j} = \delta_{ij} , \tag{4}$$

mamy tutaj symetryczny symbol δ_{ij} – zwany deltą Kroneckera – zdefiniowany przez:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i = j , \\ 0 \text{ dla } i \neq j . \end{cases} \tag{5}$$

Na podstawie (4)

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + c_{3i}^2 = 1 , \tag{4a}$$

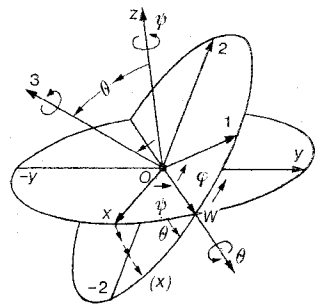
tzn. suma kwadratów cosinusów kierunkowych jest równa jedności (jest to warunek *unormowania* cosinusów kierunkowych), natomiast suma iloczynów mieszanych

$$c_{i1} c_{j1} + c_{i2} c_{j2} + c_{i3} c_{j3} = 0 , \quad i \neq j \tag{4b}$$

wyraża warunek *prostopadłości*, czyli *ortogonalności*.

W związku z warunkami (4) mówimy, że przekształcenie, które przeprowadza jeden prostokątny układ współrzędnych w drugi, nazywamy liniowym *przekształceniem ortogonalnym*.

W wielu konkretnych zadaniach wygodnie jest wyrażać cosinusy kierunkowe, zestawione w tabelce (3a), przez 3 kąty Eulera θ, φ, ψ. Niech płaszczyzna układu laboratoryjnego xOy przecina się z płaszczyzną $1O2$ układu molekularnego wzdłuż prostej OW, zwanej linią węzłów, która jest prostopadła do osi Oz oraz $O3$ (rys. I.5).



Rys. I.5. Kąty Eulera

Kąty Eulera definiujemy następująco: *kąt nutacji* θ — między osiami Oz i $O3$, *kąt precesji* ψ — między osią Ox a linią węzłów OW oraz *kąt czystego obrotu* φ — między linią węzłów OW a osią $O1$. Kąty θ, φ i ψ mierzy się w kierunkach określonych regułą śruby prawoskrętnej, tj. takich, które odpowiadają przedstawionym na rysunku I.5 kierunkom obrotu osi: Oz — dla kąta ψ, OW — dla kąta φ oraz $O3$ — dla kąta θ. Tak określone kąty zmieniają się w granicach:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

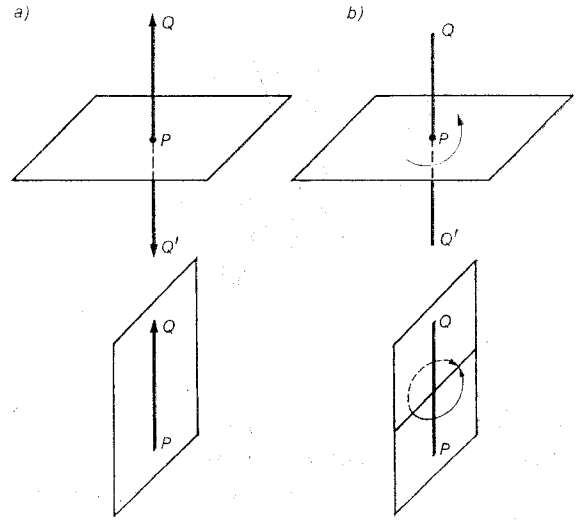
Cosinusy kierunkowe tabelki (3a) wyrażają się w następujący sposób przez kąty Eulera θ, ψ, φ:

$$\left.\begin{aligned}
c_{1x} &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
c_{1y} &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c_{1z} &= \sin\varphi\sin\theta,\\
c_{2x} &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
c_{2y} &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c_{2z} &= \cos\varphi\sin\theta,\\
c_{3x} &= \sin\psi\sin\theta,\\
c_{3y} &= -\cos\psi\sin\theta,\\
c_{3z} &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

3. RACHUNEK WEKTOROWY

Wielkości fizyczne, których wartość określa w zupełności liczba rzeczywista, nazywamy *wielkościami skalarnymi* lub krótko skalarami. Wielkościami skalarnymi są: masa, temperatura, objętość, potencjał, energia itp.

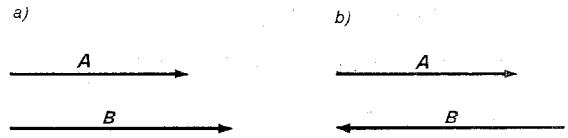
W fizyce występują również *wielkości wektorowe*, których jednoznaczne określenie wymaga podania nie tylko wartości, ale również pewnego kierunku i zwrotu lub obrotu



Rys. I.6. Graficzne przedstawienie wektorów: a) wektora biegunowego, b) wektora osiowego

Oba rodzaje wektorów odróżniamy za pomocą operacji odbicia zwierciadlanego. Jeśli dokonamy operacji odbicia każdego z tych wektorów w płaszczyźnie prostopadłej do ich kierunków, to wektor biegunowy zmieni swój zwrot na przeciwny, natomiast wektor osiowy pozostaje bez zmiany. Na odwrót, odbicie każdego z tych wektorów w płaszczyźnie równoległej do ich kierunków pozostawia wektor biegunowy bez zmiany, natomiast zmienia skręt wektora osiowego na przeciwny

(skrętu). Rozróżniamy dwa rodzaje wektorów: biegunowe i osiowe. *Wektor biegunowy* (zwany zwykle wprost wektorem) można przedstawić jednoznacznie odcinkiem prostej, jej kierunkiem i zwrotem. Graficznie wektor biegunowy przedstawiamy w postaci strzałki



Rys. I.7. Dwa wektory kolinearne: a) o zwrotach zgodnych (równoległa orientacja), b) o zwrotach przeciwnych (antyrównoległa orientacja)

(rys. I.6a), przy czym linia łącząca punkty P i Q określa kierunek, a ich porządek (od P do Q) – zwrot wektora. Długość odcinka PQ stanowi wartość bezwzględną wektora lub miarę wektora. Typowymi przykładami wektorów biegunowych są: siła $\boldsymbol{F}$, prędkość $\boldsymbol{v}$, pęd $\boldsymbol{p}$, pole elektryczne $\boldsymbol{E}$.

Wektor osiowy (zwany nieraz pseudowektorem) możemy przedstawić odcinkiem o określonym kierunku i orientacji, z którą wiążemy pewien kierunek obrotu (skrętu)

Jeśli wektory $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ (niezerowe) są względem siebie prostopadłe, to $\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \cos 90° = 0$, wobec czego $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$; czyli iloczyn skalarny dwóch wektorów wzajemnie prostopadłych jest równy zeru.

Warto tutaj zwrócić uwagę, że według definicji (7) iloczyn skalarny dwóch wektorów jednostkowych $\boldsymbol{A}^0$ i $\boldsymbol{B}^0$ (przy czym $A^0 = B^0 = 1$) jest cosinusem kąta między nimi, przy czym mamy w rzeczywistości:

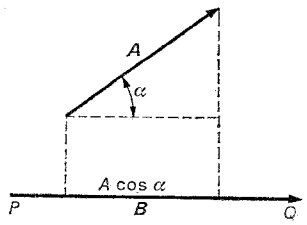
$$\boldsymbol{A}^0 \cdot \boldsymbol{B}^0 = \cos(\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{B}^0) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \boldsymbol{A}^0 \| \boldsymbol{B}^0, \\ 0, & \text{jeśli } \boldsymbol{A}^0 \perp \boldsymbol{B}^0. \end{cases} \tag{7a}$$

A zatem iloczyn skalarny dwóch wektorów jednostkowych równoległych ($\boldsymbol{A}^0 \| \boldsymbol{B}^0$) równa się jedności (w przypadku jednostkowych wektorów antyrównoległych będzie równy -1), zaś wektorów ortogonalnych ($\boldsymbol{A}^0 \perp \boldsymbol{B}^0$) – równa się zeru.

Iloczyn skalarny wektora $\boldsymbol{A}$ i wektora jednostkowego $\boldsymbol{B}^0$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^0 = A \cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \tag{7b}$$

jest rzutem wektora $\boldsymbol{A}$ na kierunek wektora $\boldsymbol{B}$ (rys. I.9).



Rys. I.9. Rzut wektora $\boldsymbol{A}$ na kierunek wektora $\boldsymbol{B}$

Gdy kąt α między wektorami jest ostry ($\alpha < 90°$), rzut ma wartość dodatnią, gdy kąt α jest rozwarty ($\alpha > 90°$), rzut ma wartość ujemną, zaś dla $\alpha = 90°$ rzut jest równy zeru

W przypadku dwóch równych wektorów definicja (7) daje:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A^2, \tag{7c}$$

stąd długość wektora (czyli jego miara)

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}. \tag{7d}$$

Dzielenie przez wektor nie jest określone, czyli jest operacją matematycznie niezdefiniowaną.

3.3. Iloczyn wektorowy

W fizyce często używamy iloczynu innego niż (7), który nie jest wielkością skalarną, ale wektorową. *Iloczyn wektorowy* dwóch wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ oznaczamy zwykle za Gibbsem przez $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (lub niekiedy $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ albo $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$) i mówimy: „$\boldsymbol{A}$ mnożone wektorowo przez $\boldsymbol{B}$".

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ (o wspólnym początku, rys. I.10) nazywa się wektor $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, którego: 1) kierunek jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, 2) zwrot jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej (korkociągu),

(np. śruby prawoskrętnej — rys. I.6b). Przykładami wektorów osiowych są: prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$, moment pędu $\boldsymbol{K}$, pole magnetyczne $\boldsymbol{B}$.

Wektory kolinearne (współliniowe) są to wektory leżące na prostych równoległych lub na tej samej prostej. *Wektory komplanarne* (współpłaszczyznowe) są to wektory leżące w płaszczyznach równoległych lub w tej samej płaszczyźnie.

Dwa *wektory* $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ *są równe* z definicji, jeżeli mają te same kierunki (są kolinearne), ten sam zwrot i jednakowe wartości (miary). O dwóch wektorach $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ kolinearnych i mających te same zwroty mówimy, że mają *orientację* (konfigurację) *równoległą* (rys. I.7a), natomiast jeśli mają zwroty przeciwne, mówimy, że mają *orientację antyrównoległą* (rys. I.7b).

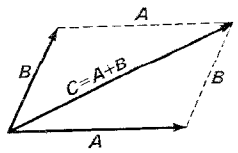
Wektorem jednostkowym, czyli *wersorem*, nazywa się wektor mający wartość równą jednostce. Oznaczamy go niekiedy symbolem A^0 albo też $\boldsymbol{I}$ itp.

3.1. Dodawanie i odejmowanie wektorów

Suma dwóch wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ daje trzeci wektor $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, który zdefiniowany jest konstrukcją geometryczną, zwaną regułą równoległoboku (rys. I.8). Suma ta jest różna od sumy algebraicznej odcinków i dlatego nazywamy ją często dla odróżnienia *sumą geometryczną*.

Aby otrzymać *różnicę dwóch wektorów* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, należy zdefiniować wektor przeciwny $-\boldsymbol{B}$. Przez *wektor przeciwny* do wektora $\boldsymbol{B}$ rozumiemy wektor $-\boldsymbol{B}$ o tej samej długości i kierunku, ale o przeciwnym zwrocie. Zatem odejmowanie wektora $\boldsymbol{B}$ od wektora $\boldsymbol{A}$ definiujemy jako dodanie do $\boldsymbol{A}$ wektora przeciwnego $-\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$



Rys. I.8. Geometryczne dodawanie wektorów

Sumę $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ tworzymy przesuwając $\boldsymbol{B}$ równolegle do własnego kierunku, aż początek wektora $\boldsymbol{B}$ pokryje się z końcem wektora $\boldsymbol{A}$. Wektor $\boldsymbol{C}$, który łączy początek $\boldsymbol{A}$ z końcem $\boldsymbol{B}$ (przesuniętego) jest sumą $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

Do wektorów stosuje się *prawo przemienności*: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$, *prawo łączności*: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. Jeśli s jest skalarem, to $s(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=s\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{B}$, a więc do mnożenia wektora przez skalar stosuje się *prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania*.

3.2. Iloczyn skalarny

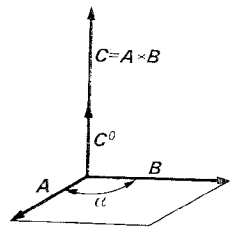
Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ nazywamy iloczyn ich wartości $A=|\boldsymbol{A}|$ i $B=|\boldsymbol{B}|$ przez cosinus kąta zawartego między nimi, czyli $\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Oznaczamy ten iloczyn przez $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ (iloczyn z kropką) lub przez $(\boldsymbol{AB}.)$ Zatem na mocy definicji iloczyn skalarny wektorów, czyli iloczyn wewnętrzny

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \tag{7}$$

jest skalarem i stosuje się do niego prawo przemienności: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

3) wartość bezwzględna wynosi $C = AB \sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Na mocy tej definicji iloczyn wektorowy, czyli zewnętrzny zapisujemy w postaci:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^0 AB|\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})|, \tag{8}$$



Rys. I.10. Iloczyn wektorowy $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$
Wartość bezwzględna iloczynu $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB \sin \alpha$ równa się polu powierzchni równoległoboku zbudowanego na wektorach $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$

gdzie $\boldsymbol{C}^0$ jest wektorem jednostkowym w kierunku wektora $\boldsymbol{C}$. Iloczyn wektorowy, czyli wektor $\boldsymbol{C}$, ma własność wektora osiowego.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że jeśli wektor $\boldsymbol{A}$ jest równoległy do $\boldsymbol{B}$, to

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0, \tag{8a}$$

ponieważ $\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 0$. A zatem (8a) jest warunkiem równoległości dwu wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, który w szczególności daje:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0, \tag{8b}$$

co oznacza, że wektorowy iloczyn wektora przez ten sam wektor jest równy zeru.

Łatwo zauważyć, że do iloczynu wektorowego nie stosuje się prawo przemienności, bowiem mamy:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}, \tag{8c}$$

natomiast zachodzi prawo rozdzielności względem dodawania:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}. \tag{8d}$$

3.4. Iloczyny wielokrotne

W wielu zagadnieniach występują iloczyny mieszane lub wielokrotne. Mamy dla *iloczynu mieszanego skalarnego* trzech wektorów *prawo zamienności* (do iloczynu mieszanego skalarnego stosujemy nieraz oznaczenie $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]$):

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}, \tag{9}$$

skąd wynika, że przy zachowaniu kolejności wektorów można wzajemnie zamieniać mnożenie wektorowe i skalarne. Iloczyn mieszany (9) nie zmienia wartości przy permutacji cyklicznej w porządku wektorów (permutacja cykliczna: ABC, BCA, CAB), natomiast zmienia znak, jeżeli kolejność wektorów nie jest cykliczna (permutacja niecykliczna: CBA, BAC, ACB). A więc mamy:

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{C}, \tag{9a}$$

co oznacza, że przy niecyklicznej zmianie kolejności wektorów w iloczynie mieszanym układ prawoskrętny zamienia się na lewoskrętny. Oznacza to, że iloczyn mieszany nie jest prawdziwym (właściwym) skalarem, lecz pseudoskalarem (zwanym też pojemnością skalarną), gdyż zmieni on znak również przy odbiciu zwierciadlanym układu współrzędnych. W szczególności, jeśli weźmiemy wartość bezwzględną (9), to skalar

$$V=|(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}| \tag{9}$$

jest objętością równoległościanu, którego powierzchnia podstawy jest $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, a wektor $\boldsymbol{C}$ jest krawędzią lub skośną wysokością (rys. I.11). Stąd wynika, że trzy wektory są komplanarne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=0. \tag{9c}$$

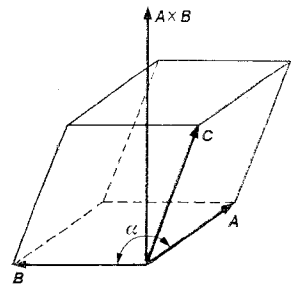
Podwójny iloczyn wektorowy

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}, \tag{10}$$

zwany również *iloczynem mieszanym wektorowym*, jest wektorem.

Iloczyn mieszany wektorowy (10) można przedstawić w postaci użytecznej tożsamości:

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}, \tag{10a}$$



Rys. I.11. Iloczyn mieszany $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

przy czym należy pamiętać, iż w tym przypadku nie zachodzi prawo łączności:

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}.$$

Iloczyny więcej niż trzech wektorów można zawsze sprowadzić do jednego z trzech wprowadzonych typów iloczynów mieszanych. W ten sposób otrzymujemy użyteczne niekiedy tożsamości na iloczyny wielokrotne wektorowe:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}), \tag{11}$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}]\boldsymbol{C}-[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]\boldsymbol{B}-[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}]\boldsymbol{A}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{A}\times[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}). \tag{13}$$

3.5. Wektory w kartezjańskim układzie współrzędnych

Weźmy pod uwagę układ kartezjański $Oxyz$ i obierzmy na każdej osi wektor o długości 1 i zwrocie zgodnym ze zwrotem osi. Wektory te nazywamy *jednostkowymi* i oznaczać je będziemy symbolami $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{y}^0$, $\boldsymbol{z}^0$ (stosowane zwykle symbole $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ będziemy przypisywać

molekularnemu układowi współrzędnych). Trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe x^0, y^0, z^0 (zwane niekiedy wektorami bazy) tworzą układ zwany *bazą jednostkową prostokątną* (rys. I.12).

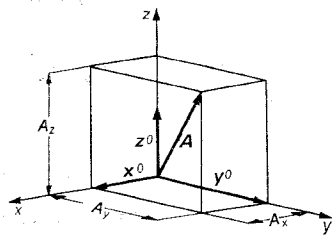
Wektory jednostkowe bazy spełniają warunki ortonormalizacyjne wynikające z definicji iloczynu skalarnego (7) dwóch wektorów:

$$\begin{aligned} x^0 \cdot x^0 = y^0 \cdot y^0 = z^0 \cdot z^0 = 1, \\ x^0 \cdot y^0 = y^0 \cdot z^0 = z^0 \cdot x^0 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

W układzie kartezjańskim możemy dany wektor A zapisać jako sumę trzech wektorów składowych $x^0 A_x$, $y^0 A_y$, $z^0 A_z$ skierowanych wzdłuż osi Ox, Oy, Oz:

$$A = x^0 A_x + y^0 A_y + z^0 A_z, \tag{15}$$

przy czym A_x, A_y, A_z nazywamy współrzędnymi wektora A (rys. I.12).



Rys. I.12. Wektor A w układzie współrzędnych kartezjańskich

Biorąc pod uwagę, że $A_x = A \cos(A, x^0)$, etc., możemy na podstawie (15) napisać dla dowolnego wektora jednostkowego A^0 zadanego w układzie kartezjańskim:

$$A^0 = x^0 \cos(A^0, x^0) + y^0 \cos(A^0, y^0) + z^0 \cos(A^0, z^0), \tag{15a}$$

gdzie $\cos(A^0, x^0), \ldots$ są cosinusami kierunkowymi wektora A^0.

Mnożąc skalarnie każdą ze stron (15a) przez siebie, otrzymujemy:

$$1 = \cos^2(A^0, x^0) + \cos^2(A^0, y^0) + \cos^2(A^0, z^0) \tag{15b}$$

znane prawo na sumę kwadratów trzech cosinusów kierunkowych.

Podobnie na podstawie (14) i (15) możemy iloczyn skalarny dwóch wektorów zapisać w postaci:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{16}$$

W szczególności dla $A = B$ otrzymujemy stąd na kwadrat wektora:

$$A^2 = A \cdot A = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \tag{16a}$$

Uwzględniając własności iloczynów wektorowych wektorów jednostkowych:

$$\left.\begin{aligned} x^0 \times x^0 = y^0 \times y^0 = z^0 \times z^0 = 0, \\ x^0 \times y^0 = -y^0 \times x^0 = z^0, \\ y^0 \times z^0 = -z^0 \times y^0 = x^0, \\ z^0 \times x^0 = -x^0 \times z^0 = y^0, \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

możemy wektorowy iloczyn wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_y B_z-A_z B_y)\boldsymbol{x}^0+(A_z B_x-A_x B_z)\boldsymbol{y}^0+(A_x B_y-A_y B_x)\boldsymbol{z}^0. \tag{17}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}=A_y B_z-A_z B_y, \text{ etc.}$$

możemy również zapisać iloczyn wektorowy w postaci:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}^0 & \boldsymbol{y}^0 & \boldsymbol{z}^0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{17a}$$

Skorzystaliśmy tutaj ze znanego twierdzenia algebry, że wyznacznik macierzy trzeciego stopnia można rozdzielić na sumę trzech wyznaczników drugiego stopnia:

$$\begin{vmatrix} c_{1x} & c_{1y} & c_{1z} \\ c_{2x} & c_{2y} & c_{2z} \\ c_{3x} & c_{3y} & c_{3z} \end{vmatrix}=c_{1x}\begin{vmatrix} c_{2y} & c_{2z} \\ c_{3y} & c_{3z} \end{vmatrix}-c_{1y}\begin{vmatrix} c_{2x} & c_{2z} \\ c_{3x} & c_{3z} \end{vmatrix}+c_{1z}\begin{vmatrix} c_{2x} & c_{2y} \\ c_{3x} & c_{3y} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Po prawej stronie podwyznacznik (minor) drugiego stopnia stojący przy elemencie c_{1i} powstaje z wyznacznika trzeciego stopnia przez usunięcie z niego elementów tego wiersza oraz tej kolumny, w której znajduje się c_{1i}.

Podobnie iloczyn mieszany (9) może być zapisany w postaci wyznacznikowej:

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{9d}$$

3.6. Niezmienniczość układu odniesienia względem obrotu

Podobnie do transformacji współrzędnych punktu określonych przez równania (2) i (3) możemy teraz napisać prawa transformacyjne dla składowych wektora kartezjańskiego*:

$$A_i=c_{i\alpha}A_\alpha, \tag{19a}$$

$$A_\alpha=c_{\alpha i}A_i, \tag{19b}$$

przy czym równanie (19a) określa transformację składowych wektora zadanych w układzie laboratoryjnym $Oxyz$ do molekularnego układu współrzędnych M123, zaś równanie (19b) określa transformację odwrotną od układu molekularnego do laboratoryjnego.

Na podstawie (19a) otrzymujemy na kwadrat wektora

$$A^2=A_i A_i=c_{i\alpha}c_{i\beta}A_\alpha A_\beta=\delta_{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta=A_\alpha A_\alpha=A_1^2+A_2^2+A_3^2, \tag{16b}$$

* W układach współrzędnych krzywoliniowych należy rozróżniać kontrawariantne i kowariantne prawa transformacyjne.

ponieważ podobnie do warunków ortonormalizacji (4) mamy:

$$c_{\alpha i} c_{\beta i} = c_{i\alpha} c_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{4c}$$

Zastosowaliśmy tutaj wprowadzoną poprzednio konwencję sumowania po dwukrotnie powtarzającym się wskaźniku i.

Zestawiając ze sobą wyrażenia (16a) i (16b) widzimy, że kwadrat wektora ma w obu układach współrzędnych taką samą wartość:

$$A^2 = A_i A_i = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_\alpha A_\alpha. \tag{16c}$$

Wielkość A^2 nazywamy *niezmiennikiem względem obrotu układu odniesienia*, przy czym

$$A = \sqrt{A_i A_i} = \sqrt{A_\alpha A_\alpha}$$

określa wartość wektora, która jest taka sama we wszystkich układach współrzędnych kartezjańskich (o zgodnej orientacji, np. prawoskrętnej) obróconych względem siebie. Oczywiście łatwo się przekonać, że również iloczyn skalarny dwóch wektorów (16) jest niezmiennikiem, to znaczy możemy napisać wobec transformacji (19):

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i B_i = A_\alpha B_\alpha. \tag{16d}$$

3.7. Wartość wyznacznika transformacji

Łatwo zauważyć na podstawie (18), że wartość wyznacznika macierzy transformacji $(c_{\alpha i})$, którą oznaczamy przez $\det(c_{\alpha i})$, jest równa -1 lub $+1$ w zależności od tego czy przy transformacji zmieniamy skręt osi układu, czy też nie. Aby to objaśnić, rozważmy najpierw transformację tożsamości (identyczności), która nie zmienia skrętu osi układu

$$(c_{\alpha i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\alpha i}), \tag{20}$$

gdzie teraz symbol Kroneckera $\delta_{\alpha i}$ oznaczony przez $(\delta_{\alpha i})$ ma znaczenie macierzy jednostkowej. Macierz jednostkowa ma na głównej przekątnej jako elementy jedynki, natomiast pozostałe elementy są zerami. Jej wyznacznik jest $\det(\delta_{\alpha i}) = +1$. Podobnie przy transformacji od układu prawoskrętnego do prawoskrętnego (lub od lewoskrętnego do lewoskrętnego) będziemy mieli $\det(c_{\alpha i}) = +1$. Tak więc dla transformacji, która nie zmienia skrętu osi układu współrzędnych, mamy zawsze $\det(c_{\alpha i}) = +1$. Liniowe transformacje ortogonalne o wyznaczniku $\det(c_{\alpha i}) = +1$ nazywamy *transformacjami właściwymi*.

Dla transformacji, które zmieniają skręt układu (np. od prawoskrętnego do lewoskrętnego lub na odwrót), mamy $\det(c_{\alpha i}) = -1$. Takie transformacje nazywamy *niewłaściwymi*; należą do nich w szczególności: odbicie, czyli zmiana znaku jednej współrzędnej (np. x_3 przy symetrii względem płaszczyzny xOy, rys. I.13a)

$$x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = -z \tag{20a}$$

i inwersja (przekształcenie względem środka symetrii, rys. I.13b)

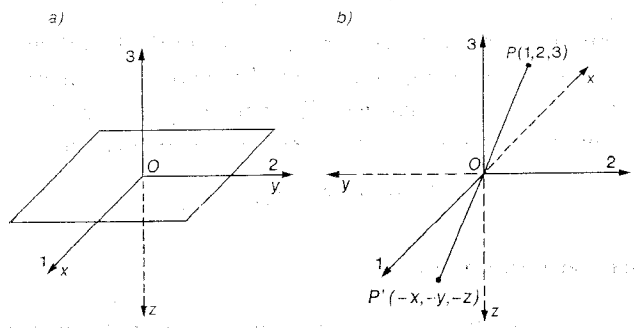
$$x_\alpha = -x_i. \tag{20b}$$

W zapisie macierzowym współczynniki transformacji (20a) i (20b) zapisujemy następująco:

$$(c_{\alpha i})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{20c}$$

$$(c_{\alpha i})=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-(\delta_{\alpha i}). \tag{20d}$$

Macierz (20d) nazywamy niekiedy *operatorem inwersji*, którego działanie polega na zmianie znaku wszystkich współrzędnych.



Rys. I.13. Transformacje niewłaściwe
a) odbicie zwierciadlane; oś $O3$ przechodzi w położeniu swego obrazu zwierciadlanego (oś Oz) względem płaszczyzny $1\ O2$ (lub xOy) zwanej płaszczyzną symetrii,
b) inwersja względem środka symetrii (początku układu współrzędnych) przeprowadza każdy punkt $P(1, 2, 3)$ w położenie $P'(-x, -y, -z)$, czyli zmienia zwroty wszystkich osi na przeciwne

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania możemy powiedzieć, że wektory biegunowe (rys. I.6a) transformują się według praw (11a), (11b), natomiast prawo transformacji wektora osiowego (rys. I.6b) ma postać:

$$A_\alpha=\pm c_{\alpha i}A_i, \tag{21}$$

gdzie znak plus odnosi się do transformacji właściwych, które nie zmieniają skrętu osi układu współrzędnych, zaś znak minus – do transformacji niewłaściwych, zmieniających skręt układów.

4. TENSORY KARTEZJAŃSKIE

W fizyce oprócz skalarów i wektorów stosujemy wielkości tensorowe. W istocie rzeczy skalar, który określony jest jednoznacznie przez jedną liczbę nie związaną z żadnym układem odniesienia, nazywamy *tensorem zerowego rzędu* (*rangi*)* i możemy oznaczyć symbolem $T^{(0)}$. Omówione poprzednio wielkości wektorowe nazywamy *tensorami pierwszej*

* Stosujemy termin ranga tensora zamiast rząd tensora, bowiem terminem rząd będziemy dalej określać kolejne przybliżenia rachunku zaburzeń.

rangi $T^{(1)}$ i, jak widzieliśmy, są one całkowicie określone przez podanie wartości ich trzech składowych T_x, T_y, T_z wzdłuż osi Ox, Oy, Oz kartezjańskiego układu współrzędnych. W zapisie wskaźnikowym (lub tensorowym) tensor pierwszej rangi oznaczamy symbolem T_i, gdzie wskaźnik wolny i przebiega zbiór liczb x, y, z. W zapisie macierzowym tensor pierwszej rangi zapisujemy w postaci macierzy jednokolumnowej lub jednowierszowej:

$$(T_i)=\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}=(T_x\, T_y\, T_z). \tag{22}$$

Tensor drugiej rangi $T^{(2)}$, który możemy oznaczyć symbolem T_{ij} z dwoma dolnymi wskaźnikami wolnymi i, j, zapisujemy w postaci macierzy kwadratowej:

$$(T_{ij})=\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Widzimy, że pierwszy wskaźnik dolny i oznacza wiersz macierzy, a drugi j — jej kolumnę. Spośród dziewięciu składowych tensora drugiej rangi (23), trzy: T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} nazywamy składowymi diagonalnymi; leżą one na przekątnej głównej macierzy kwadratowej; zaś pozostałe sześć składowych, $T_{xy}, \ldots$, składowymi niediagonalnymi.

Podobnie możemy wprowadzić pojęcie tensorów wyższej rangi niż druga, a mianowicie tensora n-tej rangi $T^{(n)}$, przez który będziemy rozumieli wielkość określoną w układzie kartezjańskim przez zbiór 3^n składowych. Rozwinięta w ten sposób koncepcja tensorów przedstawiona jest w tablicy I.1.

Tablica I.1

Wielkości tensorowe

Ranga tensora	Nazwa tensora	Zapis tensorowy	Liczba składowych tensora
0	Tensor zerowej rangi $T^{(0)}$, czyli skalar	T	$3^0=1$
1	Tensor pierwszej rangi $T^{(1)}$, czyli wektor	T_i	$3^1=3$
2	Tensor drugiej rangi $T^{(2)}$	T_{ij}	$3^2=9$
3	Tensor trzeciej rangi $T^{(3)}$	T_{ijk}	$3^3=27$
4	Tensor czwartej rangi $T^{(4)}$	T_{ijkl}	$3^4=81$
5	Tensor piątej rangi $T^{(5)}$	T_{ijklm}	$3^5=243$
.	. . . . .	. . . .	. . . .
.	. . . . .	. . . .	. . . .
.	. . . . .	. . . .	. . . .
n	Tensor n-tej rangi $T^{(n)}$	$T_{i_1, \ldots, i_n}$	3^n

W fizyce przykładami tensorów drugiej rangi są: tensory przenikalności elektrycznej ε_{ij} i magnetycznej μ_{ij}, tensor przewodności elektrycznej σ_{ij}, tensor liniowej polaryzowalności elektrycznej a_{ij}. Do tensorów trzeciej rangi zaliczamy tensor piezoelektryczny d_{ijk},

tensor nieliniowej polaryzowalności elektrycznej b_{ijk}, etc. Przykładami tensorów czwartej rangi są: tensor elektrostrykcji, kwadratowego zjawiska elektrooptycznego.

Po tych wstępnych rozważaniach, pokazujących, że każdy tensor wyraża jakąś wielkość geometryczną lub fizyczną, należy rozpatrzyć podstawowe niezmiennicze operacje tensorowe (rachunek tensorowy), takie jak dodawanie, mnożenie i zwężanie tensorów, a także przestawianie wskaźników. Operacje te pozwalają tworzyć z danych tensorów nowe tensory, w zupełności określone niezależnie od tego, w jakim układzie współrzędnych przeprowadzono obliczenia. Tym samym operacje tensorowe są w istocie rzeczy odbiciem tych operacji na wielkościach geometrycznych lub fizycznych (przedstawionych tensorami), które dokonują się niezależnie od wyboru układu współrzędnych.

4.1. Własności tensorów drugiej rangi

Aby podać ścisłe definicje tensorów, musimy określić prawa transformacji ich składowych od jednego do drugiego układu współrzędnych. A więc tensor pierwszej rangi, czyli wektor (biegunowy), definiujemy jako wielkość, która w odniesieniu do układu osi Ox_i ma trzy składowe T_i (22), transformujące się według prawa (19) już poprzednio wprowadzonego:

$$T_i = c_{i\alpha} T_\alpha . \tag{24}$$

W podobny sposób tensor drugiej rangi definiujemy jako wielkość, która w odniesieniu do układu współrzędnych x_i ma 9 składowych T_{ij} przedstawionych w macierzy (23), transformujących się według równań:

$$T_{ij} = c_{i\alpha} c_{j\beta} T_{\alpha\beta} . \tag{25}$$

Przypominamy, że i oraz j są wskaźnikami wolnymi, zaś α i β — wskaźnikami związanymi, względem których zgodnie z konwencją Einsteina wykonujemy umowanie, czyli piszemy w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} T_{ij} = {} & c_{i1} c_{j1} T_{11} + c_{i1} c_{j2} T_{12} + c_{i1} c_{j3} T_{13} + c_{i2} c_{j1} T_{21} + c_{i2} c_{j2} T_{22} + \\ & + c_{i2} c_{j3} T_{23} + c_{i3} c_{j1} T_{31} + c_{i3} c_{j2} T_{32} + c_{i3} c_{j3} T_{33} . \end{aligned} \tag{25a}$$

Jeśli uprzytomnimy sobie, że każdej parze wskaźników i oraz j przebiegających wartości x, y, z odpowiada jedno takie równanie, to będziemy mieli 9 takich równań z 9 składnikami po prawej stronie, określających składowe macierzy (23). Z tego przykładu widoczna jest zaleta symboliki tensorowej, która jest niesłychanie prosta, zwięzła i przejrzysta.

Transformację odwrotną tensora drugiej rangi, od układu molekularnego do laboratoryjnego, zapisujemy następująco:

$$T_{\alpha\beta} = c_{\alpha i} c_{\beta j} T_{ij} . \tag{25b}$$

Porównując tabelkę (3a) lub wyznacznik (18) z macierzą (23) widzimy, że zarówno współczynniki transformacji $c_{\alpha i}$ jak też tensor T_{ij} są układami 9 liczb; nie oznacza to jednak identyczności tych wielkości. Macierz $(c_{\alpha i})$ jest zespołem współczynników wiążących dwa układy współrzędnych (molekularny z laboratoryjnym), natomiast tensor T_{ij} jest wielkością

fizyczną odnoszącą się w danej chwili tylko do jednego układu współrzędnych, w którym przedstawia 9 składowych.

Jeśli w macierzy (23) tensora T_{ij} zamienimy wiersze i kolumny, wtedy otrzymamy tensor T_{ji}, który nazywamy *tensorem przestawionym* (transponowanym) i oznaczamy przez T_{ij}^T, przy czym jego macierz ma postać:

$$(T_{ij})^T=(T_{ji})=\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}. \tag{23a}$$

Jeśli więc T_{ij} są składowymi tensora z prawem transformacji (25), to również $T_{ji}=T_{ij}^T$ są składowymi tensora transponowanego, które przekształcają się według prawa:

$$T_{ji}=c_{j\beta}\,c_{i\alpha}\,T_{\beta\alpha}=c_{i\alpha}\,c_{j\beta}\,T_{\beta\alpha}. \tag{25c}$$

4.2. Dodawanie tensorów

Dodawać lub odejmować możemy tylko tensory tej samej rangi i o jednakowych wskaźnikach oraz określone w tym samym punkcie i układzie współrzędnych. Przez *sumę dwóch tensorów* A_{ij} oraz B_{ij} rozumiemy taki trzeci tensor C_{ij}, którego składowe są sumami odpowiednich składowych tensorów dodawanych:

$$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}. \tag{26}$$

Tensor jest *symetryczny*, jeśli

$$S_{ij}=S_{ji}, \tag{26a}$$

natomiast tensor jest *skośnie symetryczny* czyli *antysymetryczny*, jeśli

$$A_{ij}=-A_{ji}. \tag{26b}$$

Własności symetrii i antysymetrii tensora są niezależne od układu odniesienia. Każdy tensor drugiej rangi T_{ij} możemy rozłożyć jednoznacznie na sumę tensora symetrycznego S_{ij} oraz antysymetrycznego A_{ij}:

$$T_{ij}=S_{ij}+A_{ij}, \tag{27}$$

gdzie

$$S_{ij}=\tfrac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji}) \tag{27a}$$

jest tensorem symetrycznym, zaś

$$A_{ij}=\tfrac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji}) \tag{27b}$$

tensorem antysymetrycznym.

Na podstawie (26a) lub (27a) tensor symetryczny ma w trójwymiarowej przestrzeni 6 niezależnych składowych: 3 składowe diagonalne S_{xx}, S_{yy}, S_{zz} oraz 3 niediagonalne $S_{xy}=S_{yx}$, $S_{yz}=S_{zy}$, $S_{zx}=S_{xz}$. Tensor S_{ij} możemy zapisać w postaci macierzy symetrycznej względem przekątnej:

$$(S_{ij})=\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{pmatrix}. \tag{27c}$$

Szczególnym przykładem tensora symetrycznego jest tensor jednostkowy Kroneckera δ_{ij},

który zapisujemy w postaci symetrycznej macierzy jednostkowej:

$$(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{27d}$$

Tensor antysymetryczny ma w przestrzeni kartezjańskiej tylko 3 niezależne składowe niediagonalne: $A_{xy}=-A_{yx}$, $A_{yz}=-A_{zy}$, $A_{zx}=-A_{xz}$, bowiem na podstawie (27b) składowe diagonalne znikają. W postaci macierzowej zapisujemy tensor antysymetryczny następująco:

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix}0 & A_{xy} & A_{xz}\\ -A_{xy} & 0 & A_{yz}\\ -A_{xz} & -A_{yz} & 0\end{pmatrix}. \tag{27e}$$

4.3. Mnożenie tensorów

Jeśli wszystkie składowe tensora T_{ij} pomnożymy przez pewien skalar s, to otrzymamy nowy tensor sT_{ij} tej samej rangi.

Mnożymy dwa tensory przez siebie, mnożąc odpowiednie składowe poszczególnych tensorów. Przy mnożeniu tensorów nie obowiązują te ograniczenia, które należy uwzględnić przy dodawaniu tensorów. Można mnożyć przez siebie dowolną liczbę tensorów o różnych rangach, w wyniku czego otrzymujemy tensory wyższej rangi. Na przykład, mnożąc wektor (A_i) przez wektor (B_j), otrzymamy tensor drugiej rangi:

$$T_{ij}=A_i B_j. \tag{28}$$

Podobnie tensor trzeciej rangi możemy otrzymać przez mnożenie tensora drugiej rangi T_{ij} i tensora pierwszej rangi T_k:

$$T_{ijk}=T_{ij}T_k\neq T_i T_{jk}. \tag{28a}$$

Mnożenie tensorów, w wyniku którego otrzymujemy nowy tensor z różnymi wskaźnikami wolnymi (tak jak w (28) lub (28a)), nazywamy *mnożeniem zewnętrznym* tensorów. Ogólnie tensor rangi r mnożymy zewnętrznie przez tensor rangi s, mnożąc parami wszystkie składowe pierwszego tensora przez wszystkie składowe drugiego tensora. W wyniku otrzymujemy nowy tensor rangi $r+s$:

$$T^{(r)}T^{(s)}=T^{(r+s)}. \tag{28b}$$

4.4. Zwężenie (kontrakcja) tensorów

W rachunku tensorowym stosujemy często operację zwaną zwężeniem tensora lub jego kontrakcją, w wyniku której otrzymuje się nowy tensor o randze dwukrotnie niższej (obniżenie rangi tensora). Operacja zwężenia tensora ma charakter specyficznie tensorowy (nie ma odpowiednika w działaniach arytmetycznych takich jak dodawanie, mnożenie) i polega na przyrównaniu dwóch wolnych wskaźników tensora, które stają się wskaźnikami związanymi, czyli sumacyjnymi. Inaczej mówiąc, *kontrakcja tensora* polega na sumowaniu względem obranej pary wskaźników. Jeśli np. w tensorze trzeciej rangi T_{ijk}

wykonamy sumowanie po wskaźnikach j oraz k, otrzymamy w rezultacie tensor pierwszej rangi $T_i = T_{ijj}$. A więc widzimy, że wektor lub tensor pierwszej rangi T_i można otrzymać z tensora trzeciej rangi T_{ijk} przez kontrakcję względem wskaźników j oraz k. W ten sposób widzimy, że dzięki kontrakcji tensora drugiej rangi T_{ij} względem wskaźników i oraz j otrzymujemy tensor zerowej rangi, czyli skalar. W przypadku tensorów wyższej rangi możemy dokonać kontrakcji kilkakrotnie. Gdy w tensorze dowolnej n-tej rangi dokonamy p-krotnej kontrakcji po parach wskaźników, wtedy otrzymamy w rezultacie nowy tensor, którego ranga będzie pomniejszona o $2p$:

$$T^{(n)} \xrightarrow{\text{kontrakcja } p\text{-krotna}} T^{(n-2p)}.$$

Twierdzenie to można łatwo sprawdzić, jeśli posłużymy się prawami transformacji ortogonalnych składowych tensora n-tej rangi:

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_n} &= c_{i_1 \alpha_1} \dots c_{i_n \alpha_n} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \\ T_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= c_{\alpha_1 i_1} \dots c_{\alpha_n i_n} T_{i_1 \dots i_n}. \end{aligned} \tag{29}$$

Obecnie możemy podać ścisłą definicję tensora n-tej rangi w przestrzeni d-wymiarowej, przez który rozumiemy układ d^n składowych $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ($\alpha_n = 1, 2, 3, \dots, d$) przyporządkowany kartezjańskim układom współrzędnych* w ten sposób, że przy przejściu od jednego układu do innego transformują się one zgodnie z prawami (29).

4.5. Kontrakcje iloczynu tensorów

Jeśli przypomnimy sobie własności symetrycznego tensora jednostkowego Kroneckera δ_{ij}, zapisanego w postaci macierzowej przez (20), to łatwo zauważyć, że proces zwężania tensora (czyli przyrównywanie i sumowanie dwóch wskaźników) możemy traktować jako mnożenie tensora przez tensor jednostkowy δ_{ij}, czyli możemy napisać:

$$\left.\begin{aligned} T_{ij}\delta_{ij} &= T_{ii} \quad \text{(skalar)}, \\ T_{ijk}\delta_{jk} &= T_{ijj} \quad \text{(wektor)}, \\ T_{ijkl}\delta_{kl} &= T_{ijkk} \quad \text{(tensor drugiej rangi)}, \\ T_{ijkl}\delta_{ij}\delta_{kl} &= T_{iijj} \quad \text{(skalar)}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Procesy zwężania przeprowadzamy nie tylko na tensorach, ale również na iloczynach dowolnych tensorów. Na przykład, weźmy pod uwagę tensor drugiej rangi T_{ij} oraz tensor trzeciej rangi T_{klm}; iloczyn tych tensorów $T_{ij}T_{klm}$ jest tensorem piątej rangi. Jeśli teraz wykonamy kontrakcję względem dowolnej pary wskaźników, np. j oraz m, otrzymamy w rezultacie tensor rangi trzeciej:

$$T_{ij}T_{klm}\delta_{jm} = T_{ij}T_{klj} = T_{ikl}. \tag{31}$$

* Przy definiowaniu tensorów w krzywoliniowych układach współrzędnych należy rozróżniać tensory kowariantne i kontrawariantne, podlegające różnym prawom transformacji. My stosujemy i stosować będziemy dalej tylko prostokątne układy kartezjańskie, w których znika różnica między tensorami kowariantnymi i kontrawariantnymi. Tensory transformujące się zgodnie z prawami (29) liniowych transformacji ortogonalnych nazywamy *tensorami kartezjańskimi*.

Dokonany tutaj proces nazywamy *kontrakcją iloczynu tensorów* T_{ij} oraz T_{klm} po wskaźnikach j oraz m.

W ogólnym przypadku, gdy mamy iloczyn tensora rangi r przez tensor rangi s, $T^{(r)}T^{(s)} = T_{i_1 \ldots i_r} T_{k_1 \ldots k_s}$, wtedy w wyniku jednokrotnej kontrakcji po dowolnej parze wskaźników otrzymamy nowy tensor rangi $r+s-2$. W ogólności tensor o randze $r+s$ daje po p kontrakcjach nowy tensor o randze $r+s-2p$:

$$T^{(r)}T^{(s)} \xrightarrow{\text{kontrakcja } p\text{-krotna}} T^{(r+s-2p)}.$$

Mnożenie typu (31), polegające na połączeniu mnożenia zewnętrznego tensorów i kontrakcji, nazywamy niekiedy *mnożeniem wewnętrznym tensorów*.

4.6. Ślad tensora

Dzięki jednokrotnej, dwukrotnej etc. kontrakcji tensora danej rangi możemy otrzymać jego *niezmienniki*, czyli *ślady tensora* (sumę elementów głównej przekątnej macierzy kwadratowej nazywamy jej *śladem*):

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(T_{ij}) &= T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii}, \\ \mathrm{Tr}(T_{ijkl}) &= T_{iijj}, \text{ etc.} \end{aligned} \tag{32}$$

W szczególności ślad tensora jednostkowego Kroneckera wynosi 3:

$$\mathrm{Tr}(\delta_{ij}) = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3. \tag{32a}$$

Zwróćmy tutaj uwagę na jeszcze jedną własność tensora jednostkowego, którą nazywamy *własnością zastępowania wskaźników*:

$$\left.\begin{aligned} T_i\delta_{ij} = T_j, \quad T_{ij}\delta_{jk} = T_{ik}, \\ T_{ijk}\delta_{kl} = T_{ijl}, \\ \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{32b}$$

a więc w wyniku mnożenia T_i przez δ_{ij} wskaźnik i zostaje zastąpiony przez j.

Tensor symetryczny drugiej rangi (27a) można przedstawić w postaci sumy:

$$S_{ij} = K_{ij} + D_{ij}, \tag{32c}$$

gdzie

$$K_{ij} = \tfrac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij} \tag{32d}$$

jest *tensorem kulistym* czyli *izotropowym*, wyrażającym się przez ślad tensora symetrycznego $S_{kk} = \mathrm{Tr}(S_{kl})$ oraz tensor jednostkowy δ_{ij}, natomiast tensor

$$D_{ij} = S_{ij} - \tfrac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij} \tag{32e}$$

nazywamy *dewiatorem* czyli *tensorem anizotropowym*. Łatwo się przekonać, że ślad tensora anizotropowego znika:

$$\mathrm{Tr}(D_{ij}) = D_{ii} = 0, \tag{32f}$$

ponieważ $\mathrm{Tr}(\delta_{ij}) = \delta_{ii} = 3$.

4.7. Symetryzacja (mieszanie) tensorów

Poprzednio pokazaliśmy, że symetryczna część tensora drugiej rangi T_{ij} daje się zapisać w postaci (27a), a więc jako średnia arytmetyczna tensorów T_{ij} oraz T_{ji} powstających w wyniku dwóch możliwych przestawień wskaźników i oraz j. Operację symetryzacji można rozszerzyć na tensor dowolnej rangi względem wszystkich wskaźników lub tylko względem pewnej dowolnie wybranej liczby wskaźników. Jeśli chcemy symetryzować tensor względem wskaźników o liczbie s, to dokonujemy na tych wskaźnikach $s!$ możliwych przestawień i bierzemy średnią arytmetyczną wszystkich $s!$ otrzymanych w ten sposób tensorów. Jeśli wskaźniki tensora podlegające symetryzacji tworzą zwartą grupę, to wynik symetryzacji oznaczamy w okrągłym nawiasie, np. (ijk). Jeśli tak nie jest, wtedy możemy użyć oznaczenia (symbolu) $(ij|kl|m)$, w którym wskaźniki między pionowymi kreskami nie podlegają operacji symetryzacji. Oczywiście w przypadku trywialnym $s=1$ symetryzacja nie zmienia danego tensora, przestawienie jest bowiem tylko jedno – tożsamościowe. W przypadku $s=2$ dla tensora drugiej rangi symetryzacja określona jest przez (27a), natomiast w przypadku tensora trzeciej rangi T_{ijk} symetryzacja względem wskaźników j oraz k jest określona przez

$$T_{i(jk)}=\tfrac{1}{2}(T_{ijk}+T_{ikj}). \tag{33}$$

Jeśli tensor trzeciej rangi będziemy symetryzować względem wszystkich $s=3$ wskaźników, to będziemy mieli $3!=6$ możliwych przestawień wskaźników i zamiast (33) otrzymamy:

$$T_{(ijk)}=\tfrac{1}{6}(T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij}+T_{jik}+T_{ikj}+T_{kji}). \tag{33a}$$

Analogicznie przeprowadzamy symetryzację przy dowolnej liczbie wskaźników, otrzymując oczywiście w wyniku tensor symetryczny względem tych wskaźników, które uczestniczyły w procesie symetryzacji.

Tensor nazywamy *całkowicie symetrycznym* lub *symetrycznym* względem pewnej liczby wskaźników, jeśli się nie zmienia przy przestawieniu jego wskaźników.

4.8. Antysymetryzacja (alternacja) tensorów

W przypadku tensora drugiej rangi T_{ij} wynik antysymetryzacji (uskośniania) określony jest przez (27b). Aby przeprowadzić antysymetryzację tensora względem dowolnej liczby s jego wskaźników, postępujemy w następujący sposób: dokonujemy na tych wskaźnikach $s!$ wszystkich możliwych przestawień, z tym że przy parzystych przestawieniach (cyklicznych) nie zmieniamy znaku tensorów, natomiast przy przestawieniach nieparzystych zmieniamy znak na przeciwny. Ostatecznie bierzemy średnią arytmetyczną wszystkich otrzymanych w ten sposób $s!$ tensorów. Zwykle wskaźniki biorące udział w antysymetryzacji ujmuje się w nawiasy kwadratowe. Dla $s=3$ antysymetryzacja tensora trzeciej rangi T_{ijk} daje:

$$T_{[ijk]}=\tfrac{1}{6}(T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij}-T_{jik}-T_{kji}-T_{ikj}). \tag{34}$$

Tensor nazywamy *antysymetrycznym* (skośnie symetrycznym) względem pewnych wskaźników, jeżeli zmienia znak przy przestawieniu dowolnych dwóch spośród tych wskaź-

ników (a więc zmienia znak przy dowolnym nieparzystym przestawieniu tych wskaźników, ale zachowuje znak przy ich parzystym przestawieniu). Zgodnie z tym mamy dla antysymetrycznego tensora drugiej rangi:

$$A_{ij} = -A_{ji},$$

oraz trzeciej rangi:

$$A_{ijk} = -A_{jik} = A_{jki} = -A_{kji} = A_{kij} = -A_{ikj}. \tag{34a}$$

Łatwo się przekonać, że ślad tensora antysymetrycznego drugiej rangi znika:

$$\mathrm{Tr}(A_{ij}) = A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = 0, \tag{35}$$

a więc w tensorze antysymetrycznym nie występują elementy położone na głównej przekątnej macierzy, jak widać z (27e).

Tensory można rozdzielić na część symetryczną i antysymetryczną, np. dla tensora drugiej rangi mamy:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}. \tag{36}$$

Podobnie można pokazać, że tensor trzeciej rangi wyraża się następująco:

$$T_{ijk} = T_{(ijk)} + T_{[ijk]} + \tfrac{2}{3}(T_{[ij]k} + T_{[kj]i}) + \tfrac{2}{3}(T_{(ij)k} - T_{k(ij)}). \tag{37}$$

4.9. Antysymetryczny tensor jednostkowy

Antysymetrycznym tensorem jednostkowym trzeciej rangi nazywa się taki tensor ε_{ijk} (zwany również tensorem Levi–Civita albo Ricci), którego składowe zmieniają znak przy przestawieniu dwóch dowolnych wskaźników, przy czym różne od zera elementy są równe ± 1. Z antysymetryczności tensora ε_{ijk} wynika, że wszystkie jego elementy, w których dwa wskaźniki się powtarzają, są równe zeru, tj.

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \varepsilon_{ijj} = 0, \qquad \text{etc}.$$

A więc różne od zera pozostają tylko te elementy, które mają wszystkie wskaźniki różne $i \neq j \neq k$. Jeśli się przyjmie w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej $\varepsilon_{xyz} = \pm 1$, to wszystkie niezerowe elementy tensora ε_{ijk} będą równe $+1$ lub -1 zależnie od tego, czy ciąg wskaźników i, j, k jest parzystą czy nieparzystą permutacją ciągu x, y, z. A więc możemy napisać:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{jeśli } i, j, k \text{ są różne i stanowią parzystą permutację ciągu } x, y, z, \\ -1, & \text{jeśli } i, j, k \text{ są różne i stanowią nieparzystą permutację ciągu } x, y, z, \\ 0, & \text{jeśli choć dwa wskaźniki spośród } i, j, k \text{ są sobie równe.} \end{cases} \tag{38}$$

Z definicji tej wynika, iż nieznikające elementy tensora ε_{ijk} są równe:

$$\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = +1, \qquad \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{yxz} = \varepsilon_{zyx} = -1. \tag{38a}$$

Antysymetryczny tensor ε_{ijk} jest pseudotensorem, gdyż transformuje się podobnie jak wektor osiowy, natomiast symetryczny tensor Kroneckera δ_{ij} transformuje się jak wektor biegunowy.

Iloczyn dwóch antysymetrycznych tensorów ε_{ijk} i ε_{lmn} można wyrazić przez liniową kombinację symetrycznych tensorów Kroneckera:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}=$$
$$=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{kl}\\ \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km}\\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn}\end{vmatrix}. \tag{39}$$

Przeprowadzając tutaj kontrakcję względem wskaźników i oraz l (albo mnożąc obustronnie przez δ_{il}), otrzymujemy ważną tożsamość na jednokrotnie zwężony iloczyn pseudotensorów jednostkowych:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}. \tag{39a}$$

Stosując znowu kontrakcję względem wskaźników j oraz m (lub mnożąc obustronnie przez δ_{jm}), otrzymujemy na dwukrotnie zwężony iloczyn:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=2\delta_{kn}, \tag{39b}$$

a stąd znajdujemy, wykonując trzecią kontrakcję względem wskaźników k i n:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6. \tag{39c}$$

Za pomocą tensora antysymetrycznego ε_{ijk} możemy iloczyn wektorowy (8) zapisać następująco:

$$C_i=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{40}$$

albo w postaci:

$$C_i=\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(A_jB_k-A_kB_j). \tag{40a}$$

Łatwo teraz sprawdzić, że iloczyn wektorowy transformuje się jak pseudowektor, czyli wektor osiowy.

Podobnie iloczyn mieszany (9) (który jest pseudoskalarem), zapisujemy w postaci:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\varepsilon_{ijk}A_jB_kC_i. \tag{40b}$$

5. ANALIZA WEKTOROWA I TENSOROWA

5.1. Pola fizyczne

Jeżeli każdemu punktowi danego obszaru przestrzennego przyporządkowana jest pewna wartość określonej wielkości fizycznej, to mówimy, że punkty te i odpowiadające im wielkości tworzą *pole fizyczne*. Rozróżniamy pola skalarne, wektorowe lub tensorowe zależnie od tego, czy każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkowujemy wielkość skalarną, wektorową czy też tensorową. Na przykład z polem skalarnym mamy do czynienia, gdy w danej chwili badamy rozkład temperatury lub gęstości w danym ciele albo roz-

Stogryn, D. E., Stogryn, A. P., Mol. Phys., 1966, **11**, 371.
Striżewski, W. L., Klimienko, W. M., Ż.E.T.F., 1967, **53**, 244.
Striżewski, W. L., Obuchowski, W. W., Ż.E.T.F., 1970, **58**, 929.
Suszczinski, M. M. *Spektry kombinacjonnogo rassiejanija molekuł i kristałłow*, Izd. Nauka, Moskwa 1969.
Takuma, H., Jennings, D. A., Proc. IEEE, 1965, **53**, 146.
Tanaś, R., Kielich, S., Optics Comm., 1975, **33**, 79.
Tanaś, R., Praca doktorska, Poznań 1975.
Topp, M. R., Jones, R. P., Rentzepis, P. M., Optics Comm., 1971, **3**, 264.
Terhune, R. W., Maker, P. D., Savage, C. M., Phys. Rev. Lett., 1965, **14**, 681.
Tripathi, B. P., Laroraya, R. K., Srivastava, S. L., Phys. Rev., 1971, **A4**, 2076; 1972, **A5**, 1565.
Ueda, Y., Shimoda, K., J. Phys. Soc. Japan, 1970, **28**, 196.
Vachaspati, Phys. Rev., 1962, **128**, 644; 1963, **130**, 2598.
Verdieck, J. F., Peterson, S. H., Savage, C. M., Maker, P. D., Chem. Phys. Lett., 1970, **7**, 219.
Vogt, H., Appl. Phys., 1974, **5**, 85; Vogt, H., Neumann, G., Optics Comm. 1976, **19**, 108.
Ward, J. F., New, G. H. C., Phys. Rev., 1969, **185**, 57.
Weinmann, D., Vogt, H., Phys. Stat. Solidi, 1974, **A23**, 463.
Wolkensztejn, M. W. *Molekularnaja optika*, Gostekhizdat, Moskwa 1951.
Wołejko, L., Kielich, S., Acta. Phys. Polon., 1975, **A47**, 367.
Wynne, J. J., Phys. Rev. Lett., 1972, **29**, 650; Phys. Rev., 1972, **B6**, 534.
Yu, W., Alfano, R. R., Phys. Rev., 1975, **A11**, 188.
Zavorotnev, Yu. D., Ovander, L. N., Phys. Stat. Solidi, 1975, **B68**, 443.
Zwanzig, R., J. Am. Chem. Soc., 1964, **86**, 3489.

Stąd wynika, że wektory grad φ i $d\boldsymbol{r}$ są do siebie prostopadłe. Ponieważ wektor $d\boldsymbol{r}$ jest styczny do powierzchni ekwiskalarnej w danym punkcie $P(x_i)$, przeto wektor grad φ jest prostopadły (normalny) do powierzchni ekwiskalarnej. Wektor grad φ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu wartości funkcji φ w danym punkcie pola skalarnego, przy czym ma zwrot skierowany od powierzchni ekwiskalarnej o mniejszej wartości do powierzchni o większej wartości. Linie prostopadłe do powierzchni ekwiskalarnych nazywamy *liniami pola*. Styczne do linii pola mają w każdym punkcie kierunek gradientu w tym punkcie.

5.3. Dywergencja i rotacja

Gdy w pewnym obszarze V przestrzeni możemy każdemu punktowi przyporządkować pewien wektor $\boldsymbol{A}$, będący funkcją współrzędnych x_i, wówczas obszar V wraz z $\boldsymbol{A}(x_i)$ jest *polem wektorowym*. Przez *dywergencję* wektora $\boldsymbol{A}$ rozumiemy iloczyn skalarny operatora wektorowego ∇ i wektora $\boldsymbol{A}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{43}$$

Gdy v oznacza prędkość przepływu gazu lub cieczy o gęstości ρ, wtedy wektor $\boldsymbol{A} = \rho\boldsymbol{v}$ przedstawia gęstość przepływu.

Równanie

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{44}$$

nazywamy *równaniem ciągłości*, które w przypadku cieczy nieściśliwej ma postać:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0, \tag{44a}$$

ponieważ $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

Iloczyn wektorowy operatora wektorowego ∇ oraz dowolnego wektora $\boldsymbol{A}$ nazywamy *rotacją* wektora $\boldsymbol{A}$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}^0 & \boldsymbol{y}^0 & \boldsymbol{z}^0 \\ \nabla x & \nabla y & \nabla z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \tag{45}$$

W zapisie tensorowym składowe rotacji wektora $\boldsymbol{A}$ możemy zapisać na podstawie (40):

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k. \tag{45a}$$

5.4. Stosowanie operatora ∇

Niech $f = f(x_i)$ oraz $g = g(x_i)$ będą funkcjami skalarnymi, natomiast $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x_i)$ oraz $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x_i)$ funkcjami wektorowymi. Stosując do tych funkcji operator wektorowy ∇, otrzymujemy na podstawie reguł o różniczkowaniu:

$$\left.\begin{aligned} \nabla(f\pm g) &= \nabla f \pm \nabla g, \\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{A} \pm \nabla\cdot\boldsymbol{B}, \\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) &= \nabla\times\boldsymbol{A} \pm \nabla\times\boldsymbol{B}, \end{aligned}\right\} \tag{46a}$$

Stosując operator ∇ do iloczynu dwóch funkcji otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \nabla fg &= g\nabla f + f\nabla g, \\ \nabla\cdot f\boldsymbol{A} &= \nabla f\cdot\boldsymbol{A} + f\nabla\cdot\boldsymbol{A}, \\ \nabla\times(f\boldsymbol{A}) &= \nabla f\times\boldsymbol{A} + f\nabla\times\boldsymbol{A}, \end{aligned}\right\} \tag{46b}$$

i podobnie dla iloczynów skalarnego i wektorowego:

$$\left.\begin{aligned} \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}), \\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}), \\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}). \end{aligned}\right\} \tag{46c}$$

Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej $f(\varphi)$, gdzie $\varphi=\varphi(x_i)$, mamy:

$$\nabla f(\varphi) = \frac{df}{d\varphi}\nabla\varphi. \tag{47}$$

Przykłady dla promienia wodzącego

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}^0 r_x + \boldsymbol{y}^0 r_y + \boldsymbol{z}^0 r_z = r\boldsymbol{r}^0,$$

którego wartość bezwzględna wynosi:

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2},$$

gdzie $\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{r}/r$, jest wektorem jednostkowym w kierunku $\boldsymbol{r}$.

Aby obliczyć gradient r, stosujemy prawo (47) dla $f(r) = r = \sqrt{\varphi}$, gdzie $\varphi = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = r^2$. Mamy:

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2r}, \qquad \nabla\varphi = 2\boldsymbol{r},$$

zatem

$$\operatorname{grad} r = \nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}^0. \tag{47a}$$

Dla dowolnej funkcji $f(r)$ możemy napisać na podstawie (47) i (47a) ogólnie:

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{df}{dr}\nabla r = \frac{df}{dr}\boldsymbol{r}^0. \tag{48}$$

Dla $f(r) = r^n$ otrzymujemy na podstawie (48):

$$\nabla r^n = nr^{n-1}\boldsymbol{r}^0 = nr^{n-2}\boldsymbol{r}. \tag{48a}$$

W podobny sposób obliczamy dla $f(r) = r^{-n}$ $(r \neq 0)$:

$$\nabla\left(\frac{1}{r^n}\right) = -nr^{-n-1}\boldsymbol{r}^0 = -nr^{-n-2}\boldsymbol{r}. \tag{48b}$$

W szczególności dla $n=1$ znajdujemy stąd

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{48c}$$

Gradient iloczynu skalarnego wektora A i promienia wodzącego r wynosi:

$$\operatorname{grad}(A \cdot r) = \nabla(A \cdot r) = A. \tag{48d}$$

Dla dywergencji i rotacji promienia wodzącego otrzymujemy:

$$\operatorname{div} r = \nabla \cdot r = 3, \tag{48e}$$

$$\operatorname{rot} r = \nabla \times r = 0, \tag{48f}$$

$$\operatorname{div} r^0 = \nabla \cdot r^0 = \frac{2}{r}, \tag{48g}$$

$$\operatorname{div}(A \times r) = A \cdot (A \times r) = 0, \tag{48h}$$

$$\operatorname{rot}(A \times r) = A \times (A \times r) = 2A. \tag{48i}$$

Uwaga: Jeśli punkt P_0 jest początkiem promienia wodzącego r, zaś punkt P jest jego końcem, to przy stosowaniu operatora ∇ należy zaznaczyć, względem którego punktu różniczkujemy (tj. który punkt się zmienia, a który jest stały). Oczywiste jest, że obie operacje będą się różnić znakiem:

$$\nabla_P f(r) = -\nabla_{P_0} f(r) = \frac{df}{dr} r^0. \tag{49}$$

W szczególności dla $f(r) = r$ otrzymujemy stąd

$$\nabla_P r = -\nabla_{P_0} r = r^0, \tag{49a}$$

co oznacza, że grad r jest wektorem jednostkowym o zwrocie od P_0 do P, gdy punkt P się zmienia, natomiast o zwrocie przeciwnym, gdy punkt P_0 się zmienia.

5.5. Wielokrotne stosowanie operatora ∇

Jeśli do funkcji skalarnej $\varphi(x_i)$ zastosujemy dwukrotnie operator ∇, to otrzymamy wielkość $\nabla\nabla\varphi$, która transformuje się jak symetryczny tensor drugiej rangi:

$$\nabla_i \nabla_j \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla_j \nabla_i \varphi. \tag{50}$$

Zwężając tutaj względem wskaźników i oraz j, czyli działając tensorem jednostkowym δ_{ij}, otrzymujemy dywergencję gradientu:

$$\delta_{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi = \nabla_i \nabla_i \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi. \tag{50a}$$

Iloczyn skalarny dwóch operatorów ∇ jest operatorem skalarnym zwanym *operatorem Laplace'a* lub krótko *laplasjanem*. Oznaczamy go symbolem ∇^2 lub Δ, przy czym mamy wobec definicji (42a):

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{50b}$$

Ponieważ laplasjan jest operatorem skalarnym, możemy go stosować nie tylko do funkcji skalarnych, ale i wektorowych, otrzymując w wyniku nowy wektor:

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}. \tag{50c}$$

Uwzględniając definicje (42a) i (45), można łatwo udowodnić tożsamość:

$$\text{rot grad}\,\varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0\,. \tag{51}$$

Stąd wynika, że jeśli dla jakiegoś wektora $\boldsymbol{A}$ mamy:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = 0\,, \tag{51a}$$

to wektor ten jest gradientem jakiejś funkcji skalarnej φ, czyli

$$\boldsymbol{A} = \text{grad}\,\varphi = \nabla \varphi\,. \tag{51b}$$

W takim przypadku mówimy, że pole wektora $\boldsymbol{A}$ jest *bezwirowe*.

Niektóre pola wektorowe w fizyce wiążemy z ich potencjałem za pomocą równania (51b) (np. pole prędkości $\boldsymbol{v} = \text{grad}\,\varphi$ potencjalnego ruchu cieczy w hydrodynamice, skalar φ nazywamy wtedy potencjałem prędkości). W innych przypadkach korzystniej jest wyrazić pole wektorowe przez ujemny gradient potencjału:

$$\boldsymbol{A} = -\text{grad}\,\varphi = -\nabla \varphi\,. \tag{51c}$$

W takich przypadkach wektor $\boldsymbol{A}$ ma kierunek największego spadku potencjału φ. Na przykład w elektrostatyce stosujemy (51c), kiedy wektorowi $\boldsymbol{A}$ odpowiada wektor $\boldsymbol{E}$ natężenia pola elektrycznego, zaś funkcji skalarnej φ potencjał φ_e ładunków elektrycznych:

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad}\,\varphi_e\,. \tag{51d}$$

Gdy wektor $\boldsymbol{A}$ przedstawia pole sił statycznych:

$$\boldsymbol{F}(x_i) = -\text{grad}\,U(x_i)\,, \tag{51e}$$

wtedy wielkość skalarną $U(x_i)$ nazywamy *energią potencjalną* w punkcie $P(x_i)$.

Mamy również tożsamość następującą:

$$\text{div rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0\,, \tag{52}$$

z której wynika, że jeśli dla jakiegoś wektora $\boldsymbol{B}$ mamy:

$$\text{div}\,\boldsymbol{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{52a}$$

to wektor

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}\,. \tag{52b}$$

Pole wektorowe $\boldsymbol{B}$, którego dywergencja znika, nazywamy polem *bezźródłowym* (wektor $\boldsymbol{B}$ nazywamy nieraz wektorowym potencjałem wektora $\boldsymbol{A}$). W takim polu potencjalnym spełnione jest równanie Laplace'a:

$$\Delta \varphi = \text{div grad}\,\varphi = 0\,, \tag{53}$$

które wobec (50) można również zapisać tensorowo:

$$\nabla_i \nabla_i\, \varphi = \delta_{ij} \nabla_i \nabla_j\, \varphi = 0\,. \tag{53a}$$

PRZYKŁADY: Aby obliczyć laplasjan funkcji $f(r)$, korzystamy z wyrażeń (46b), (48) i (48f) i otrzymujemy w ogólności ($r \neq 0$):

$$\Delta f(r) = \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}\,, \tag{54}$$

a stąd mamy w szczególności:

$$\Delta r^n = n(n+1)r^{n-2}, \tag{54a}$$

$$\Delta r^{-n} = n(n-1)r^{-n-2}. \tag{54b}$$

Z wyrażenia (54b) dla $n=1$ znajdujemy równanie Laplace'a:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0 \tag{54c}$$

dla potencjału $\varphi = 1/r$.

Mamy również dla $r \neq 0$:

$$\Delta\{f(r)\boldsymbol{r}^0\} = \left\{-\frac{2}{r^2}f(r)+\frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr}+\frac{d^2f(r)}{dr^2}\right\}\boldsymbol{r}^0. \tag{54d}$$

Dla dywergencji funkcji radialnej mamy w ogólności:

$$\operatorname{div}\{f(r)\boldsymbol{r}^0\} = \frac{2}{r}f(r)+\frac{df}{dr}, \tag{55}$$

skąd znajdujemy w szczególności:

$$\operatorname{div}(r^n\boldsymbol{r}^0) = (n+2)r^{n-1}, \tag{55a}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^n}\right) = -(n-2)r^{-n-1}. \tag{55b}$$

Dla $n=2$ otrzymujemy z (55b):

$$\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0. \tag{55c}$$

LITERATURA DO ROZDZIAŁU I

Banach, S. *Mechanika*, PWN, Warszawa 1956.
Boyle, L. L. *The Theory and Applications of Tensors in Molecular Physics*, Canterbury 1969.
Denis-Papin, M., Kaufmann, C. A. *Cours de calcul tensoriel*, Albin Michel, Paris 1953.
Gołąb, S. *Rachunek tensorowy*, PWN, Warszawa 1956.
Karaśkiewicz, E. *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Warszawa 1964.
Lichnerowicz, A. *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris 1947.
Margenau, H., Murphy, G. M. *Matematyka w fizyce i chemii*, PWN, Warszawa 1956.
Nye, J. F. *Własności fizyczne kryształów*, PWN, Warszawa 1962.
Piekara, A. *Mechanika ogólna*, PWN, Warszawa 1961.
Raszewski, P. K. *Wstęp do rachunku tensorowego*, PWN, Warszawa 1955.
Rubinowicz, W. *Wektory i tensory*, PWN, Warszawa 1950.
Rubinowicz, W., Królikowski, W. *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1955.
Schouten, J. A. *Tensor Analysis for Physicists*, Univ. Press, Oxford 1954
Suffczyński, M. *Elektrodynamika*, PWN, Warszawa 1965.
Synge, J. L., Schild, A. *Rachunek tensorowy*, PWN, Warszawa 1964.
Trajdos-Wróbel, T. *Wstęp do analizy wektorowej*, PWN, Warszawa 1959.
Weyssenhoff, J. *Zasady elektromagnetyki i optyki klasycznej*, PWN, Warszawa 1957.